（在此卷上答题无效）

2023～2024学年福州市高三年级第一次质量检测

数学试题

（完卷时间120分钟；满分150分）

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z}=1-\mathrm{i}$，则在复平面内，z 对应的点在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

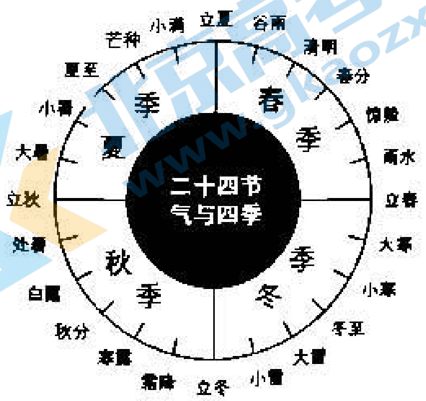
2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2<1\}$，$B=\{x\mid x>0\}$，则 $A\cup B=$

A．$(0,1)$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$(-1,+\infty)$　　D．$(-\infty,+\infty)$

3. 已知点 $P(x_0,2)$ 在抛物线 C：$y^2=4x$ 上，则 P 到 C 的准线的距离为

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

4. “二十四节气”是中国古代劳动人民伟大的智慧结晶，其划分如图所示．小明打算在网上搜集一些与二十四节气有关的古诗．他准备在春季的6个节气与夏季的6个节气中共选出3个节气，若春季的节气和夏季的节气各至少选出1个，则小明选取节气的不同情况的种数是



A．90　　B．180

C．270　　D．360

5. 一个正四棱台形油槽可以装煤油 $190000\ \mathrm{cm}^3$，其上、下底面边长分别为 $60\ \mathrm{cm}$ 和 $40\ \mathrm{cm}$，则该油槽的深度为

A．$\frac{75}{4}\ \mathrm{cm}$　　B．$25\ \mathrm{cm}$　　C．$50\ \mathrm{cm}$　　D．$75\ \mathrm{cm}$

6. 一个袋子中有大小和质地相同的4个球，其中有2个红球，2个黄球，每次从中随机摸出1个球，摸出的球不再放回．则第二次摸到黄球的条件下，第一次摸到红球的概率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

7. 已知 $a=\frac{1}{e}$，$b=\ln\sqrt{2}$，$c=\ln\sqrt[5]{5}$，则

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x$（$\omega>0$）的图象在区间 $[0,\pi]$ 上恰有5条对称轴，则 ω 的取值范围为

A. $\left[\frac{17}{4},\frac{21}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{17}{4},\frac{25}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{17}{4},\frac{25}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{33}{4},\frac{41}{4}\right)$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 某市抽查一周空气质量指数变化情况，得到一组数据：80，76，73，82，86，75，81．以下关于这组数据判断正确的有

A. 极差为13　　B. 中位数为82　　C. 平均数为79　　D. 方差为124

10. 已知圆 M：$x^2+y^2=1$，直线 l：$y=k(x+\sqrt{3})-1$，则

A. l 恒过定点 $(-\sqrt{3},-1)$　　B. 若 l 平分圆周 M，则 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. 当 $k=\sqrt{3}$ 时，l 与圆 M 相切　　D. 当 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ 时，l 与圆 M 相交

11. 已知函数 $f(x)=x^3-3ax+2$ 有两个极值点，则

A. $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称　　B. $f(x)$ 的极值之和为 -4

C. $\exists a\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)$ 有三个零点　　D. 当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 只有一个零点

12. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为2，球 O 与正四棱柱的上、下底面及侧棱都相切．P 为平面 CDD_1 上一点，且直线 BP 与球 O 相切，则

A. 球 O 的表面积为 4π　　B. 直线 BD_1 与 BP 夹角等于 $45°$

C. 该正四棱柱的侧面积为 $16\sqrt{2}$　　D. 侧面 ABB_1A_1 与球面的交线长为 2π

第Ⅱ卷

注意事项：

用0.5毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答．在试题卷上作答，答案无效．

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1+\lambda,2-\lambda)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 λ 的值为______．

14. 将圆周16等分，设每份圆弧所对的圆心角为 θ，则 $\sin\theta\cos\theta$ 的值为______．

15. 已知定义域为R的函数 $f(x)$ 同时具有下列三个性质，则 $f(x)=$______．（写出一个满足条件的函数即可）

①$f(x+y)=f(x)+f(y)$；②$f'(x)$ 是偶函数；③当 $x+y>0$ 时，$f(x)+f(y)<0$．

16. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的左焦点为 F，两条渐近线分别为 l_1，l_2．点 A 在 l_1 上，点 B 在 l_2 上，且点 A 位于第一象限，原点 O 与 B 关于直线 AF 对称．若 $|AF|=2b$，则 C 的离心率为______．

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分10分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}=S_n+2$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\log_2 a_{2n-1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

18.（本小题满分12分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $b=\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{6}$．

（1）若 $c=2$，求 a；

（2）求 $\triangle ABC$ 面积的最大值．

19.（本小题满分12分）

国际上常采用身体质量指数（Body Mass Index，缩写BMI）来衡量人体肥瘦程度，其计算公式是 $\text{BMI}=\frac{\text{体重（单位：kg）}}{\text{身高}^2\text{（单位：m}^2\text{）}}$．为了解某公司员工的身体肥瘦情况，研究人员从该公司员工体检数据中，采用比例分配的分层随机抽样方法抽取了50名男员工、30名女员工的身高和体重数据，计算得到他们的BMI值，并根据"中国成人的BMI数值标准"简称"指标"整理得到如下结果：

性别 \ 人数 \ 指标	偏瘦（BMI<18.5）	正常（18.5≤BMI<24）	偏胖（24≤BMI<28）	肥胖（BMI≥28）
男	12	17	11	10
女	9	11	7	3

（1）若该公司男员工有 1 500 名，则该公司共有多少名员工？

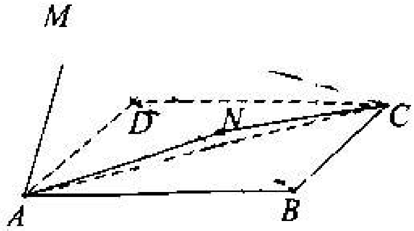
（2）以频率估计概率，分别从该公司男、女员工中各随机抽取 2 名员工，求抽到的员工中至少有一名是肥胖的概率.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在底面为菱形的四棱锥 $M-ABCD$ 中，$AD=BD=MB=2$，$MA=MD=\sqrt{2}$.

（1）求证：平面 $MAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）已知 $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{NB}$，求直线 BN 与平面 ACN 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，左、右顶点分别为 A,B. 点 C 在 E 上，$P(4,y_P)$，$Q(4,y_Q)$ 分别为直线 AC,BC 上的点.

（1）求 $y_P\cdot y_Q$ 的值；

（2）设直线 BP 与 E 的另一个交点为 D，求证：直线 CD 经过 F.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-a$，记曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l，l 在 x 轴上的截距为 x_2（$x_2>0$）.

（1）当 $x_1=\mathrm{e}$，$a=1$ 时，求切线方程；

（2）证明：$|x_1-\mathrm{e}^a|\geqslant|x_2-\mathrm{e}^a|$.