2024北京西城高三（上）期末

数　　学

2024.1

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid x^2\geqslant 4\}$，则 $A\cup B=$

（A）$(-1,+\infty)$　　（B）$(-1,2]$

（C）$(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-2]\cup(-1,3)$

（2）在复平面内，复数 $\dfrac{\mathrm{i}-2}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则

（A）$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　（B）$\tan a>\tan b$

（C）$3-a<2-b$　　（D）$a|a|>b|b|$

（4）已知双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(0,2)$，渐近线为 $y=\pm\sqrt{3}x$，则 C 的方程是

（A）$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$

（C）$y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$　　（D）$\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$

（5）已知点 $O(0,0)$，点 P 满足 $|PO|=1$．若点 $A(t,4)$，其中 $t\in\mathbf{R}$，则 $|PA|$ 的最小值为

（A）5　　（B）4

（C）3　　（D）2

（6）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60^\circ, b=\sqrt{7}, a-c=2$，则 $\triangle ABC$ 的面积为

（A）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{3}{4}$

（7）已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，则

（A）$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数，且曲线 $y=f(x)$ 存在对称轴

（B） $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数，且曲线 $y=f(x)$ 存在对称中心

（C） $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，且曲线 $y=f(x)$ 存在对称轴

（D） $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，且曲线 $y=f(x)$ 存在对称中心

（8）设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“$|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$”是“$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{b}|^2$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

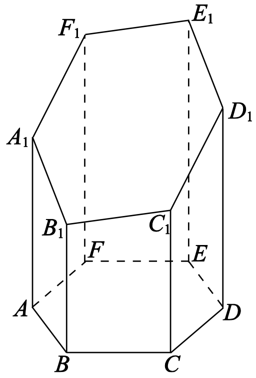
（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）设 $\{a_n\}$ 是首项为正数，公比为 q 的无穷等比数列，其前 n 项和为 S_n．若存在无穷多个正整数 k，使 $S_k\leqslant 0$，则 q 的取值范围是

（A） $(-\infty,0)$　　（B） $(-\infty,-1]$

（C） $[-1,0)$　　（D） $(0,1)$

（10）如图，水平地面上有一正六边形地块 $ABCDEF$，设计师规划在正六边形的顶点处矗立六根与地面垂直的柱子，用以固定一块平板式太阳能电池板 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$．若其中三根柱子 AA_1,BB_1,CC_1 的高度依次为 $12\text{m},9\text{m},10\text{m}$，则另外三根柱子的高度之和为



（A） 47m　　（B） 48m

（C） 49m　　（D） 50m

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）在 $(x-\sqrt{2})^4$ 的展开式中，x^2 的系数为_______．（用数字作答）

（12）设 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\omega x$．若曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称，则 ω 的一个取值为_______．

（13）已知函数 $f(x)=2\log_2 x-\log_2(x-4)$，则 $f(x)$ 的定义域是_______； $f(x)$ 的最小值是_______．

（14）已知抛物线 $C: y^2=8x$．

① 则 C 的准线方程为_______；

② 设 C 的顶点为 O，焦点为 F．点 P 在 C 上，点 Q 与点 P 关于 y 轴对称．若 QF 平分 $\angle PFO$，则点 P 的横坐标为_______．

（15）设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3, & x>a,\\ -x^2+a^2, & x\leqslant a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

② 当 $a \geqslant 0$ 时， $f(x)$ 存在最大值；

③ 当 $a<0$ 时，直线 $y=ax$ 与曲线 $y=f(x)$ 恰有3个交点；

④ 存在正数 a 及点 $M(x_1, f(x_1))$ $(x_1>a)$ 和 $N(x_2, f(x_2))$ $(x_2 \leqslant a)$，使 $|MN| \leqslant \frac{1}{100}$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2a\sin x\cos x-2\cos^2 x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$.

（Ⅰ）求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）若 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 对 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立，求 m 的最大值和 M 的最小值.

（17）（本小题 13 分）

生活中人们喜爱用跑步软件记录分享自己的运动轨迹．为了解某地中学生和大学生对跑步软件的使用情况，从该地随机抽取了 200 名中学生和 80 名大学生，统计他们最喜爱使用的一款跑步软件，结果如下：

	跑步软件一	跑步软件二	跑步软件三	跑步软件四
中学生	80	60	40	20
大学生	30	20	20	10

假设大学生和中学生对跑步软件的喜爱互不影响.

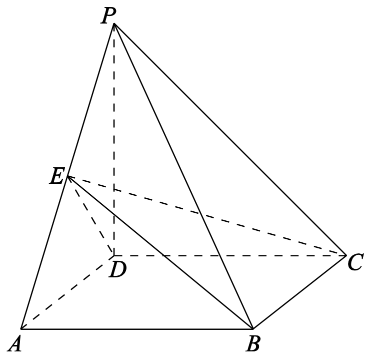
（Ⅰ）从该地区的中学生和大学生中各随机抽取1人，用频率估计概率，试估计这 2 人都最喜爱使用跑步软件一的概率；

（Ⅱ）采用分层抽样的方式先从样本中的大学生中随机抽取 8 人，再从这 8 人中随机抽取 3 人．记 X 为这 3 人中最喜爱使用跑步软件二的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记样本中的中学生最喜爱使用这四款跑步软件的频率依次为 x_1, x_2, x_3, x_4，其方差为 s_1^2；样本中的大学生最喜爱使用这四款跑步软件的频率依次为 y_1, y_2, y_3, y_4，其方差为 s_2^2；$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ 的方差为 s_3^2．写出 s_1^2, s_2^2, s_3^2 的大小关系.（结论不要求证明）

（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形， $PD \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB \perp$ 平面 PAD， E 为 PA 中点， $PD=AD=2$.



（Ⅰ）求证： $AB \perp$ 平面 PAD；

（Ⅱ）求直线 DE 与平面 PBC 所成角的大小；

（Ⅲ）求四面体 $PEBC$ 的体积.

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 $C(2,1)$．

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）过点 $N(0,1)$ 的直线交 E 于点 A,B（点 A,B 与点 C 不重合）．设 AB 的中点为 M，连接 CM 并延长交 E 于点 D．若 M 恰为 CD 的中点，求直线 AB 的方程．

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{e^{ax}}{x}$，其中 $a>0$．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $x_1<x_2$ 且 $x_1\cdot x_2>0$ 时，判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 与 $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$ 的大小，并说明理由．

（21）（本小题 15 分）

给定正整数 $N\geqslant 3$，已知项数为 m 且无重复项的数对序列 $A:(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$ 满足如下三个性质：

① $x_i,y_i\in\{1,2,\cdots,N\}$，且 $x_i\neq y_i\ (i=1,2,\cdots,m)$；

② $x_{i+1}=y_i\ (i=1,2,\cdots,m-1)$；

③ (p,q) 与 (q,p) 不同时在数对序列 A 中．

（Ⅰ）当 $N=3$，$m=3$ 时，写出所有满足 $x_1=1$ 的数对序列 A；

（Ⅱ）当 $N=6$ 时，证明：$m\leqslant 13$；

（Ⅲ）当 N 为奇数时，记 m 的最大值为 $T(N)$，求 $T(N)$．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

北京市西城区 2023—2024 学年度第一学期期末试卷

高三数学答案及评分参考

2024.1

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）C　　（2）A　　（3）D　　（4）D　　（5）C

（6）B　　（7）D　　（8）A　　（9）B　　（10）A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）12　　（12）3（答案不唯一）

（13）$(4,+\infty)$　　4　　（14）$x=-2$　　2

（15）①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由题设 $2a\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}-2\cos^2\frac{\pi}{6}=0$，

解得 $a=\sqrt{3}$. ………3 分

所以 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1$ ………5 分

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$. ………6 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π. ………7 分

（Ⅱ）因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$. ………9 分

所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin(2x-\frac{\pi}{6})\leqslant 1$，　即 $-2\leqslant 2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1\leqslant 1$.

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值1；

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -2．　　　　………11分

由题设 $m\leqslant -2$，且 $M\geqslant 1$．

所以 m 的最大值是 -2；M 的最小值是1．　　　　………13分

（17）（共13分）

解：（Ⅰ）记“这2人都最喜爱使用跑步软件一”为事件A，

则 $P(A)=\frac{80}{200}\times\frac{30}{80}=\frac{3}{20}$．　　　　………4分

（Ⅱ）因为抽取的8人中最喜爱跑步软件二的人数为 $8\times\frac{20}{80}=2$，

所以 X 的所有可能取值为0,1,2．　　　　………5分

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{5}{14}$，　$P(X=1)=\frac{C_2^1C_6^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，　$P(X=2)=\frac{C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\frac{3}{28}$．

………8分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

故 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$．　　　　………10分

（Ⅲ）$s_2^2<s_3^2<s_1^2$．　　　　………13分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $PD=AD$，E 为 PA 中点，

所以 $DE\perp PA$. ………1 分

又因为平面 $PAB\perp$ 平面 PAD，

平面 $PAB\cap$ 平面 $PAD=PA$，

且 $DE\subset$ 平面 PAB.

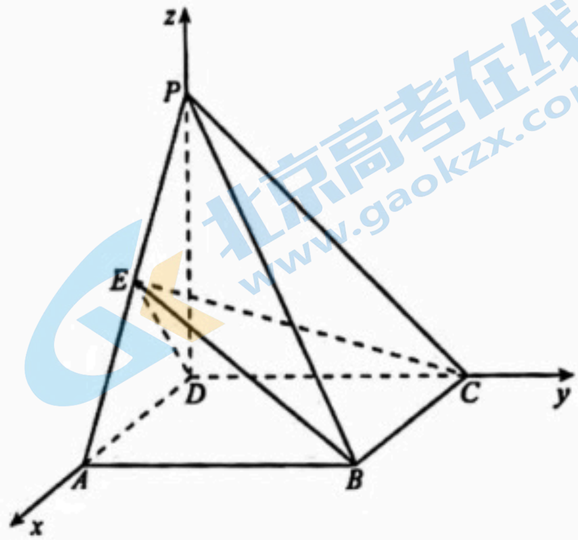
所以 $DE\perp$ 平面 PAB. ………2 分

所以 $DE\perp AB$. ………3 分

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AB$.

所以 $AB\perp$ 平面 PAD. ………4 分



（Ⅱ）因为 $AB\perp$ 平面 PAD，$AB\,/\!/\,CD$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD.

又 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 DA,DC,DP 两两相互垂直. ………5 分

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$， ………6 分

则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(1,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{DE}=(1,0,1)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ -2y+2z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=1$. 于是 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$. ………8 分

设直线 DE 与平面 PBC 所成角为 α，则

$\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{DE}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{1}{2}$. ………10 分

所以直线 DE 与平面 PBC 所成角的大小为 30°. ………11 分

（Ⅲ）因为 $\overrightarrow{EP}=(-1,0,1)$，

所以点 E 到平面 PBC 的距离为 $d=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EP}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ………13 分

因为 $CB\perp CP$，

所以四面体 $PEBC$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot d=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot CB\cdot CP\cdot d=\dfrac{2}{3}$. ………14 分

(19)（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设，$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2+b^2=c^2,\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ ………3 分

解得 $a^2=8$, $b^2=2$. ………4 分

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………5 分

（Ⅱ）若直线 AB 与 y 轴重合，则点 M 与原点重合，符合题意，

此时直线 AB 的方程为 $x=0$. ………6 分

若直线 AB 与 y 轴不重合，设其方程为 $y=kx+1$.

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2+4y^2=8\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kx-4=0$. ………8 分

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8k}{4k^2+1}$. ………9 分

所以 $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-4k}{4k^2+1}$， $y_M=kx_M+1=\dfrac{1}{4k^2+1}$. ………10 分

因为 M 是 CD 的中点，

所以 $x_D=2x_M-x_C=\dfrac{-8k}{4k^2+1}-2$， $y_D=2y_M-y_C=\dfrac{2}{4k^2+1}-1$. ………11 分

因为 $x_D^2+4y_D^2=8$， ………12 分

所以 $(\dfrac{-8k}{4k^2+1}-2)^2+4(\dfrac{2}{4k^2+1}-1)^2-8=0$.

整理得 $4k^3+k=0$. ………13 分

解得 $k=0$. ………14 分

但此时直线 AB 经过点 C，不符合题意，舍去.

综上，直线 AB 的方程为 $x=0$. ………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$． ………1 分

所以 $f(1)=e$，$f'(1)=0$． ………3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-e=0$． ………4 分

（Ⅱ）$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{(ax-1)e^{ax}}{x^2}$． ………6 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$．

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	↘		↗

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{1}{a},+\infty)$；单调递减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\frac{1}{a})$．

………10 分

（Ⅲ）当 $x_1<x_2$ 且 $x_1\cdot x_2>0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$，证明如下：

令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{(ax-1)e^{ax}+1}{x^2}$．

设 $h(x)=(ax-1)e^{ax}+1$，则 $h'(x)=a^2xe^{ax}$． ………12 分

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$．

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

从而 $h(x)>h(0)=0$，即 $g'(x)>0$．

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$． ………14 分

当 $0<x_1<x_2$ 时，$g(x_1)<g(x_2)$，即 $f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$；

当 $x_1<x_2<0$ 时，$g(x_1)<g(x_2)$，即 $f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$．

综上，当 $x_1<x_2$ 且 $x_1\cdot x_2>0$ 时，$f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$． ………15 分

（21）（共15分）

解：（Ⅰ）$A:(1,2),(2,3),(3,1)$，或 $A:(1,3),(3,2),(2,1)$.　　　　　　………4分

（Ⅱ）因为 (p,q) 和 (q,p) 不同时出现在 A 中，

故 $m\leqslant C_6^2=15$，所以1,2,3,4,5,6每个数至多出现5次.

又因为 $x_{i+1}=y_i\ (i=1,2,\cdots,m-1)$，

所以只有 x_1,y_m 对应的数可以出现5次，

故 $m\leqslant\dfrac{1}{2}\times(4\times4+2\times5)=13$.　　　　　　………9分

（Ⅲ）当 N 为奇数时，先证明 $T(N+2)=T(N)+2N+1$.

因为 (p,q) 和 (q,p) 不同时出现在 A 中，所以 $T(N)\leqslant C_N^2=\dfrac{1}{2}N(N-1)$.

当 $N=3$ 时，构造 $A:(1,2),(2,3),(3,1)$ 恰有 C_3^2 项，且首项的第1个分量与末项的第2个分量都为1.

对奇数 N，如果可以构造一个恰有 C_N^2 项的序列 A，且首项的第1个分量与末项的第2个分量都为1，那么对奇数 $N+2$ 而言，可按如下方式构造满足条件的序列 A'：

首先，对于如下 $2N+1$ 个数对集合：

$$\{(1,N+1),(N+1,1)\},\ \{(1,N+2),(N+2,1)\},$$
$$\{(2,N+1),(N+1,2)\},\ \{(2,N+2),(N+2,2)\},$$
$$\cdots\cdots,$$
$$\{(N,N+1),(N+1,N)\},\ \{(N,N+2),(N+2,N)\},$$
$$\{(N+1,N+2),(N+2,N+1)\},$$

每个集合中都至多有一个数对出现在序列 A' 中，所以 $T(N+2)\leqslant T(N)+2N+1$.

其次，对每个不大于 N 的偶数 $i\in\{2,4,\cdots,N-1\}$，将如下4个数对并为一组：

$$(N+1,i),(i,N+2),(N+2,i+1),(i+1,N+1),$$

共得到 $\dfrac{N-1}{2}$ 组，将这 $\dfrac{N-1}{2}$ 组数对以及 $(1,N+1),(N+1,N+2),(N+2,1)$ 按如下方式补充到 A 的后面，即：$A,(1,N+1),(N+1,2),(2,N+2),(N+2,3),(3,N+1),\cdots,$
$(N+1,N-1),(N-1,N+2),(N+2,N),(N,N+1),(N+1,N+2),(N+2,1)$.

此时恰有 $T(N)+2N+1$ 项，所以 $T(N+2)=T(N)+2N+1$.

综上，当 N 为奇数时，

$$\begin{aligned}T(N)&=(T(N)-T(N-2))+(T(N-2)-T(N-4))+\cdots+(T(5)-T(3))+T(3)\\&=[2(N-2)+1]+[2(N-4)+1]+\cdots+(2\times3+1)+3\\&=\frac{1}{2}N(N-1).\end{aligned}$$

………15分