2019 北京昌平区高一（上）期末

数　　学

2019.1

本试卷共 5 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,2\}$，$B=\{0,2,3\}$，那么 $A\cup B$ 等于

A. $\{-1,0,2,3\}$　　B. $\{-1,0,2\}$　　C. $\{0,2,3\}$　　D. $\{0,2\}$

2. 已知角 α 的终边经过点 $P(3,-4)$，那么 $\sin\alpha$ 的值为

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{4}{5}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{3}{5}$

3. $\sin 210^{\circ}$ 的值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(2,1-m)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么实数 m 的值为

A. -2　　B. 1　　C. 2　　D. 4

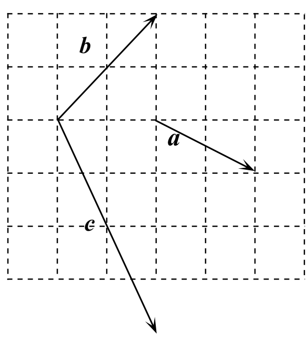
5. 下列函数中，既是偶函数，又在区间 $(-\infty,0)$ 上为减函数的为

A. $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=2^{-x}$　　D. $y=|x|+1$

6. 已知 $a=4^{0.5}$，$b=\log_{0.5}4$，$c=0.5^{4}$，那么 a，b，c 的大小关系为

A. $b<c<a$　　B. $c<b<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

7. 如果二次函数 $y=x^2+2mx+(m+2)$ 有两个不同的零点，那么 m 的取值范围为



A. $(-2,\ 1)$　　B. $(-1,\ 2)$　　C. $(-\infty,-1)\cup(2,\ +\infty)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,\ +\infty)$

8. 为了得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，只需将函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象

A. 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位　　B. 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

C. 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位　　D. 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

9. 如图，在 6×6 的方格中，已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的起点和终点均在格点，且满足向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}(x,y\in\mathbf{R})$，那么 $x-y=$

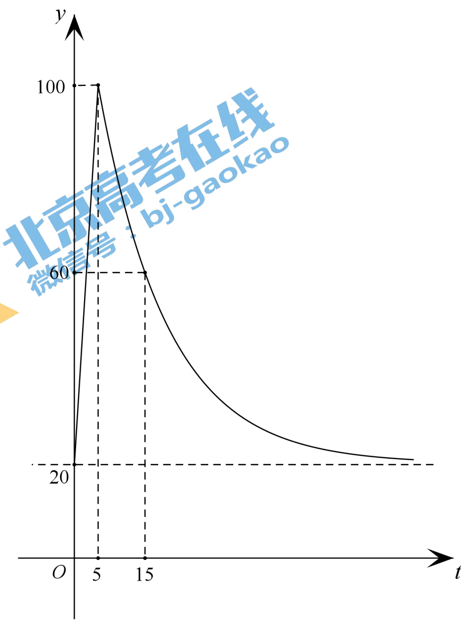
A. -2　　B. 0

C. 1　　D. 2

10. 某种热饮需用开水冲泡，其基本操作流程如下：①先将水加热到 $100\,^\circ\mathrm{C}$，水温 $y(^\circ\mathrm{C})$ 与时间 $t(\mathrm{min})$ 近似满足一次函数关系；②用开水将热饮冲泡后在室温下放置，温度 $y(^\circ\mathrm{C})$ 与时间 $t(\mathrm{min})$ 近似满足函数的关系式为 $y=80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-a}{10}}+b$（$a,b$ 为常数），通常这种热饮在 $40\,^\circ\mathrm{C}$ 时，口感最佳．

某天室温为 $20^\circ\mathrm{C}$ 时，冲泡热饮的部分数据如图所示.

那么按上述流程冲泡一杯热饮，并在口感最佳时饮用，最少需要的时间为



A. $35\,\mathrm{min}$　　B. $30\,\mathrm{min}$

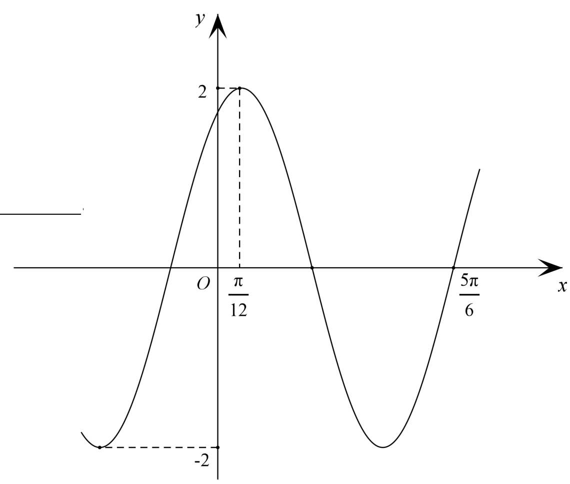
C. $25\,\mathrm{min}$　　D. $20\,\mathrm{min}$

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题：**本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分.**

11. 已知集合 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|0<x<4\}$，则 $A\cap B=$________

12. $\log_2 8+4^{\frac{1}{2}}==$ ________.（用数字作答）



13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=1$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，那么 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ ________.

14. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ （其中 $\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）

的图象如图所示，那么函数 $\omega=$ ________,

$\varphi=$________.

15. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上存在零点，且满足 $f(-2)\cdot f(2)>0$，则函数 $f(x)$ 的一个解析式为________.（只需写出一个即可）

16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2ax+a+2$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（I）当 $a=1$ 时，$f(-1)=$________;

（II）若 $f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围为________.

三、解答题（共 5 个小题，共 70 分）

17. （本小题满分 14 分）

已知 α 是第二象限角，且 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{1}{7}$.

（I）求 $\tan\alpha$ 的值;

（II）求 $\cos 2\alpha$ 的值.

18. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\sin x\cos x-\dfrac{1}{2}$.

（I）求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（II）求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

（III）求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值.

19. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)$.

（I）求函数的 $f(x)$ 定义域;

（II）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并用定义证明你的结论;

（III）若函数 $f(x)<0$，求实数 x 的取值范围.

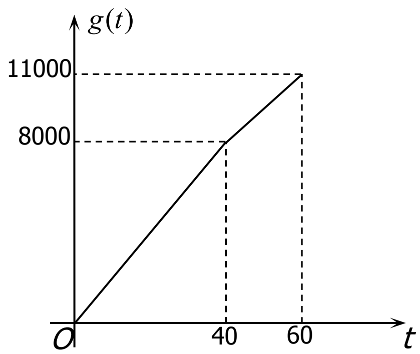


图 1

20.（本小题满分 14 分）

为弘扬中华传统文化，学校课外阅读兴趣小组进行每日一小时的“经典名著”和“古诗词”的阅读活动. 根据调查，小明同学阅读两类读物的阅读量统计如下：

表 1

t	0	10	20	30
$f(t)$	0	2700	5200	7500

小明阅读“经典名著”的阅读量 $f(t)$（单位：字）与时间 t（单位：分钟）满足二次函数关系，部分数据如表 1 所示；阅读“古诗词”的阅读量 $g(t)$（单位：字）与时间 t（单位：分钟）满足如图 1 所示的关系.

（I）请分别写出函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的解析式；

（II）在每天的一小时课外阅读活动中，小明如何分配“经典名著”和“古诗词”的阅读时间，使每天的阅读量最大，最大值是多少？

21. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于给定的 $k(k\in\mathbf{N}^*)$，若存在 $[a,b]\subseteq D$，使得函数 $f(x)$ 满足：

① 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数；

② 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域是 $[ka,kb]$，则称 $[a,b]$ 是函数 $f(x)$ 的 k 级“理想区间”.

(I) 判断函数 $f_1(x)=x^2$，$f_2(x)=\sin\pi x$ 是否存在 1 级“理想区间”. 若存在，请写出它的“理想区间”；（只需直接写出结果）

(II) 证明：函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 存在 3 级“理想区间”；（ $e=2.71828\cdots$）

(III) 设函数 $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$，$x\in[0,1]$，若函数 $g(x)$ 存在 k 级“理想区间”，求 k 的值.

数学试题答案

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	D	C	D	A	C	B	B	C

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．）

11. $\{x\,|\,2<x<4\}$　　12. 5　　13. $\frac{1}{2}$

14. 2 ； $\frac{\pi}{3}$　　15. $f(x)=x^2-1$（不是唯一解）

16．-2 ；$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　（注：第 14，16 题第一问 3 分，第二问 2 分）．

三、解答题(本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．)

17.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=-\frac{1}{7}$，解得 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.　……………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得，$\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ ．

所以 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\frac{7}{25}$.　……………………………14 分

18. （本小题满分 14 分）

解：(Ⅰ) $f(x)=\frac{1+\cos2x}{2}+\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{2}\sin2x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$　………………4 分

所以 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.　………………6 分

（II）由题意知 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le2x+\frac{\pi}{4}\le2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in Z,$

故 $k\pi+\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{8}$,

所以函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $[k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}],k\in\mathbf{Z}$. ………………10 分

（III） 因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$,

所以当 $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{4}$,

所以 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$, 即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}$. ………………14 分

19.（本小题满分 14 分）

解：（I）由 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x>-1,\\x<1.\end{cases}$

所以 $-1<x<1$， 故函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$. ………………4 分

（II）函数 $f(x)$ 是奇函数. ………………5 分

证明：由（I）知定义域关于原点对称. ………………6 分

因为 $f(-x)=\lg(1-(-x))-\lg(1+(-x))$

$$=-(\lg(1-x)-\lg(1+x))=-f(x),$$

所以 函数 $f(x)$ 是奇函数. ……………………………9 分

（ III ）由 $f(x)<0$ 可得 $\lg(1-x)<\lg(1+x)$. ………………………………10 分

得 $\begin{cases}-1<x<1\\1-x<1+x\end{cases}$, ……………………………12 分

解得 $0<x<1$. ……………………………14 分

20.（本小题满分 14 分）

解：（I） $f(t)=-t^2+280t$ ， $g(t)=\begin{cases}200t(0\le t<40)\\150t+2000(40\le t\le 60)\end{cases}$. ………………6 分

（II）设小明对“经典名著”的阅读时间为 $t(0\le t\le 60)$，则对“古诗词”的阅读时间为 $60-t$.

………………7 分

① 当 $0 \le 60-t < 40$，即 $20 < t \le 60$ 时，

$$h(t)=f(t)+g(t)=-t^2+280t+200(60-t)$$

$$=-t^2+80t+12000$$

$$=-(t-40)^2+13600$$

所以当 $t=40$ 时，$h(t)$ 有最大值 13600. ………………10 分

① 当 $40 \le 60-t \le 60$，即 $0 \le t \le 20$ 时，

$$h(t)=f(t)+g(t)=-t^2+280t+150(60-t)+2000$$

$$=-t^2+130t+11000$$

因为 $h(t)$ 的对称轴方程为 $t=65$，

所以 当 $0 \le t \le 20$ 时，$h(t)$ 是增函数，

所以 当 $t=20$ 时，$h(t)$ 有最大值为 13200. ………………13 分

因为 13600>13200，

所以 阅读总字数 $h(t)$ 的最大值为 13600，此时对“经典名著”的阅读时间为 40 分钟，对“古诗词”的阅读时间为 20 分钟. ………………14 分

21.（本小题满分 14 分）

解：(I) 函数 $f_1(x)=x^2$ 存在 1 级“理想区间”，“理想区间”是 $[0,1]$；$f_2(x)=\sin\pi x$ 不存在 1 级“理想区间”. ………………4 分

(II) 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 存在 3 级“理想区间”，则存在区间 $[a,b]$，使 $f(x)$ 的值域是 $[3a,3b]$.

因为函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 R 上单调递增，

所以 $\begin{cases}\mathrm{e}^a=3a,\\ \mathrm{e}^b=3b\end{cases}$，即方程 $\mathrm{e}^x=3x$ 有两个不等实根.

设 $h(x)=\mathrm{e}^x-3x$，

可知，$h(0)=\mathrm{e}^0-3\times0=1>0$，$h(1)=\mathrm{e}^1-3\times1<0$，$h(2)=\mathrm{e}^2-3\times2>0$，

由零点存在定理知，存在 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,2)$，使 $h(x_1)=0$，$h(x_2)=0$.

设 $a=x_1$，$b=x_2$，所以方程组有解，即函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 存在 3 级“理想区间”. …………9 分

(III) 法一：

若函数 $g(x)$ 存在 k 级“理想区间”，则存在区间 $[a,b]$，函数 $g(x)$ 的值域是 $[ka,kb]$.

因为 $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$，任取 $x_1,x_2\in[0,1]$，且 $x_1<x_2$，

有 $g(x_1)-g(x_2)=\dfrac{4x_1}{{x_1}^2+1}-\dfrac{4x_2}{{x_2}^2+1}=\dfrac{4(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)}$，

因为 $0\le x_1<x_2\le 1$，所以 $x_1-x_2<0,1-x_1x_2>0$，

所以 $g(x_1)-g(x_2)<0$，即 $g(x_1)<g(x_2)$，

所以 函数 $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ 在 $[0,1]$ 上为单调递增函数. ……………….12 分

所以 $\begin{cases} g(a)=ka, \\ g(b)=kb \end{cases}$，于是方程 $\dfrac{4x}{x^2+1}=kx$ 在 $[0,1]$ 上有两个不等实根.

即 $x[kx^2+k-4]=0$ 在 $[0,1]$ 上有两个不等实根.

显然 $x=0$ 是方程的一个解，所以 $kx^2+k-4=0$ 在 $(0,1]$ 至少有一个实根.

（1）当 $k=4$ 时，$x_1=x_2=0$，不合题意，舍;

（2）当 $k>4$ 时，方程无实根，舍;

（3）$0<k<4$ 时，$x_1=\sqrt{\dfrac{4-k}{k}},x_2=-\sqrt{\dfrac{4-k}{k}}$（舍），

所以 $x_1=\sqrt{\dfrac{4-k}{k}}\le 1$，解出 $k\ge 2$.

所以 $2\le k<4$，又因为 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=2$ 或 $k=3$. ……………….14 分

法二：因为 $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$，任取 $x_1,x_2\in[0,1]$，且 $x_1<x_2$，

有 $g(x_1)-g(x_2)=\dfrac{4x_1}{{x_1}^2+1}-\dfrac{4x_2}{{x_2}^2+1}=\dfrac{4(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{({x_1}^2+1)({x_2}^2+1)}$，

因为 $0\le x_1<x_2\le 1$，所以 $x_1-x_2<0,1-x_1x_2>0$，

所以 $g(x_1)-g(x_2)<0$，即 $g(x_1)<g(x_2)$，

所以 函数 $g(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$ 在 $[0,1]$ 上为单调递增函数. ……………….12 分

若函数 $g(x)$ 存在 k 级“理想区间”，则存在区间 $[a,b]$，函数 $g(x)$ 的值域是 $[ka,kb]$.

则 $\begin{cases} \dfrac{4a}{a^2+1}=ka \quad (1) \\ \dfrac{4b}{b^2+1}=kb \quad (2) \end{cases}$

（i）当 $a=0$ 时，（1）式成立

因为$a=0$，所以$b\neq 0$，所以$\dfrac{4}{b^2+1}=k$.

因为$[a,b]\subseteq[0,1]$，所以$0\le a<b\le 1$.

所以 $0<b\le 1$，即 $0<b^2\le 1$，得 $1<b^2+1\le 2$，于是$\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{b^2+1}<1$

故$2\le\dfrac{4}{b^2+1}<4$. 又因为$k\in\mathbf{N}^*$，所以$k=2$或$k=3$.

当$k=2$时，$b=1$；当$k=3$时，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $[a,b]\subseteq[0,1]$或$[a,b]\subseteq[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$满足题意，故$k=2$或$k=3$.

（ii）当$a\neq 0$时，（1）式化为$\dfrac{4}{a^2+1}=k$（3），

因为$a\neq 0$，$b\neq 0$，所以$\dfrac{4}{b^2+1}=k$（4）

所以$\dfrac{4}{a^2+1}=\dfrac{4}{b^2+1}$，所以$a^2=b^2$，即$a=b$与题意不符合。

综上，$k=2$或$k=3$. ……………………14 分

【其它正确解法相应给分】