

高三数学考试

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容(概率与统计除外)。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | -1 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $[0, 2)$ D. $[-1, 2]$
2. 若复数 z 满足 $z(1+2i) - 1 + i = 0$, 则 $z + \bar{z} =$
A. $-\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{6}{5}i$ D. $-\frac{6}{5}i$
3. 已知 $a = 0.2^{0.3}$, $b = \cos 2$, $c = \lg 15$, 则
A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$
4. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_8 = 6$, 则 $a_6 a_9 =$
A. 216 B. 108 C. 72 D. 36
5. 已知曲线 $y = \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线与圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$ 相切, 则 C 的半径为
A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
6. 已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的两个根, 则 $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} =$
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 过 F_2 作其中一条渐近线的垂线, 垂足为 P , 则 $|PF_1| =$
A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 2 D. 4
8. 已知函数 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, 若 A, B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则下列结论一定正确的是
A. $f(\sin A) > f(\sin B)$ B. $f(\cos A) > f(\cos B)$
C. $f(\sin A) > f(\cos B)$ D. $f(\cos A) > f(\sin B)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 直线 $x = ty + 3$ 过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 且与 C 交于 M, N 两点, 则



A. $p=3$

B. $p=6$

C. $|MN|$ 的最小值为 6

D. $|MN|$ 的最小值为 12

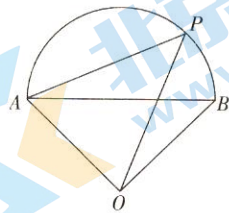
10. 如图,点 P 在以 AB 为直径的半圆上运动(不含 A, B), $OA \perp OB, OA=OB$, 记 $|AP|=m, |OP|=n, \angle BAP$ 的弧度数为 t , 则下列说法正确的是

A. n 是 m 的函数

B. m 是 n 的函数

C. t 是 n 的函数

D. t 是 m 的函数



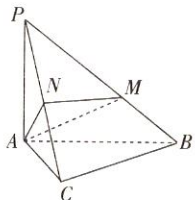
11. 如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABC, AC \perp BC$, 且 $PA=\sqrt{3}, AB=2AC=2$, 过点 A 的平面 α 分别与棱 PB, PC 交于点 M, N , 则下列说法正确的是

A. 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 6π

B. 若 $PC \perp$ 平面 AMN , 则 $|MN|=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

C. 若 M, N 分别为 PB, PC 的中点, 则点 B 到平面 AMN 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\triangle AMN$ 周长的最小值为 3



12. 已知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均是由自然数构成的数列, 且 $\forall n \in \mathbf{N}^*, n=a_n^2+b_n, 0 \leq b_n \leq 2a_n$, 则

A. $a_{n+1} \geq a_n$

B. $b_{n+1} \leq b_n$

C. $a_1+a_2+\dots+a_{100}=625$

D. $b_1+b_2+\dots+b_{100}=615$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

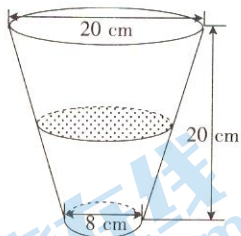
13. 已知向量 $\mathbf{a}=(3, 7), \mathbf{b}=(-1, 3)$, 则 $(\mathbf{a}-2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}=\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 先将函数 $f(x)=\sin x$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 写出 $g(x)$ 图象的一条对称轴的方程: $x=\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 降雨量是指降落在水平地面上单位面积的水层深度(单位: mm). 气象学中, 把 24 小时内的降雨量叫作日降雨量, 等级划分如下表:

日降雨量/mm	$(0, 10]$	$(10, 25]$	$(25, 50]$	$(50, 100]$
等级	小雨	中雨	大雨	暴雨

某数学建模小组为了测量当地某日的降雨量, 制作了一个圆台形水桶, 如图所示, 若在一次降雨过程中用此桶接了 24 小时的雨水恰好是桶深的 $\frac{1}{2}$, 则当日的降雨量等级为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



16. 已知 x_1, x_2 是函数 $f(x)=(x-2)(e^{x-2}-1)-e^{(x-2)+1}$ 的两个零点, 则 $e^{x_1+x_2}=\underline{\hspace{2cm}}$.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .已知 $\cos 2A + \sin(B+C) = 1$.

(1)求 A ;

(2)若 $a=2, b=c$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + ax + 16$.

(1)若 $a = -27$,求 $f(x)$ 的极值;

(2)若 $f(x) \geq 0$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立,求 a 的取值范围.

19. (12 分)

在正项等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_6 = 8, a_1 a_3 = 3$.

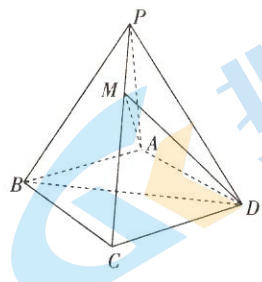
(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_n = \frac{1}{2^{a_n} + 1}$,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,证明: $S_n < 1 - \frac{1}{2^n}$.

密
封
线
内
不
要
答
题

10. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形, $PB=PD$, $PC=2\sqrt{3}$, $PA=2$.



- (1)证明: $PA \perp BD$.
- (2)若 $\vec{MC}=2\vec{PM}$,求平面 ADM 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.

11. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 作 x 轴的垂线, 并与 C 交于 A, B 两点, 过点 F_2 作一条斜率存在且不为 0 的直线与 C 交于 M, N 两点, $|AB|=3$, $\triangle F_1MN$ 的周长为 8.

- (1)求 C 的方程.
- (2)记 A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点, 直线 A_1M 与直线 AB 相交于点 P , 直线 A_2N 与直线 AB 相交于点 Q , $\triangle PA_1A_2$ 和 $\triangle QA_1A_2$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 试问 $\frac{S_1}{S_2}$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

12. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{\ln x}{e} - 1$.

- (1)讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2)若 $f(x)$ 恰好有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $\frac{1}{x_1} + \frac{k}{x_2} \geq \frac{1}{a}$ 恒成立, 证明: $k \geq e^2 - 2e$.

