

2023 北京牛栏山一中高一 3 月月考

数 学

2023.3

第 I 卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，四个选项中只有一是符合题目）

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 \leq 1\}$, $B = \{x | -2 < x - 1 < 7\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | -1 < x \leq 1\}$

C. $\{x | -1 < x \leq 8\}$ D. $\emptyset$

2. 下列函数中，既是奇函数又在其定义域上为增函数的是 ()

A. $y = \tan x$

B. $y = \sin x$

C. $y = x^3$

D. $y = -\frac{1}{x}$

3. 已知 $a = \log_3 0.3$, $b = 3^{0.3}$, $c = 0.3^{0.3}$, 则 ()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，单位圆上一点 P 从点 $(0, 1)$ 出发，逆时针方向运动 $\frac{\pi}{6}$ 弧长到达 Q 点，则 Q 的坐标为 ()

A. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. 下列说法不正确的是 ()

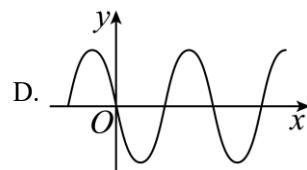
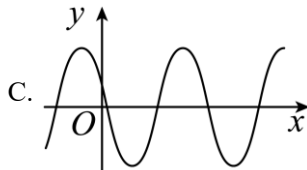
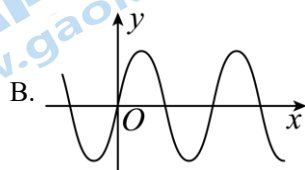
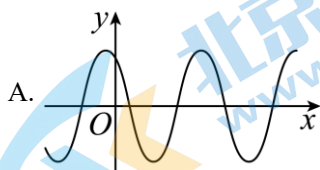
A. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 方向相反，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为相反向量

B. $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

C. 在平行四边形 $ABCD$ 中，一定有 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

D. 若两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 一定是共线向量

6. 将函数 $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位后，得到的图象可能为 ()



7. 已知函数 $f(x) = \sin 2x$, $x \in [a, b]$, 则 “ $b - a \geq \pi$ ” 是 “ $f(x)$ 的最大值为 1” 的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 $\alpha \in (-\pi, \pi)$, 且 $\cos \alpha = -\sin \frac{\pi}{5}$, 则 $\alpha =$ ()

A. $\frac{3\pi}{10}$ 或 $-\frac{3\pi}{10}$

B. $\frac{7\pi}{10}$ 或 $-\frac{7\pi}{10}$

C. $-\frac{3\pi}{10}$ 或 $\frac{7\pi}{10}$

D. $\frac{3\pi}{10}$ 或 $-\frac{7\pi}{10}$

9. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$, 若 $0 < a < b < 1$, 且满足 $f(a)f(b)f(c) < 0$, 则下列说法不正确的是 ()

A. $f(x)$ 有且只有一个零点

B. $f(x)$ 的零点在 $(1, 2)$ 内

C. $f(x)$ 的零点不可能在 (a, b) 内

D. $f(x)$ 的零点可能在 $(c, +\infty)$ 内

10. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域为 D , 若存在非零实数 $c \in D$, 使得 $f(c) + g(c) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 D 上具有性质 P . 现有三组函数:

① $f(x) = -x, g(x) = \sin x$;

② $f(x) = \tan x, g(x) = e^x$;

③ $f(x) = -x^2, g(x) = \cos x$

其中具有性质 P 的是 ()

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

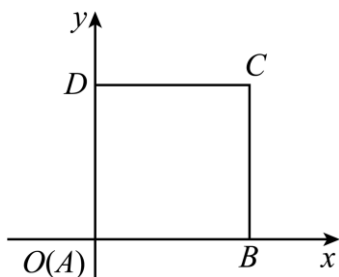
11. 计算 $\tan 330^\circ$ 的值为_____.

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{e^x - 2} + \lg(2x - x^2)$ 的定义域为_____.

13. 已知 α 是第四象限角, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\pi + \alpha) \cdot \tan(2\pi - \alpha) =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \sin x - \cos x$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上存在 x_0 , 使得 $f(x_0) = -\sqrt{2}$, 则 m 的取值范围是_____.

15. 如图放置的边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿 x 轴滚动, 记滚动过程中顶点 A 的横、纵坐标分别为 x 和 y , 且 y 是 x 在映射 f 作用下的象, 则下列说法中:



①映射 f 的值域是 $[0, 2]$ ；②映射 f 是函数，且是偶函数；③映射 f 是函数，且周期是 $8k (k \in \mathbb{Z})$ ；④映射 f 的单增区间为 $[8k, 8k + 4], (k \in \mathbb{Z})$ ，其中正确说法的序号是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤.）

16. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ， $B = \{x | x > a\}$.

(1) 当 $a = 1$ 时，求 $A \cup B$ ；

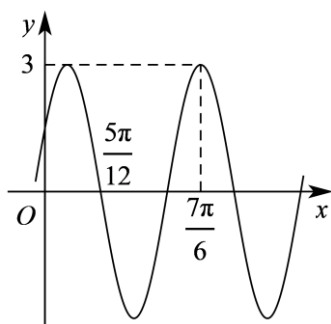
(2) 若 $B \subseteq \complement_U A$ ，求 a 的取值范围.

17. 已知角 α 为锐角，且 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$.

(1) 求 $\sin \alpha$ 的值；

(2) 求 $\tan 2\alpha$ 的值.

18. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.



(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(3) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值和最小值以及取得最值时的相应的 x 值.

19. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}, (x \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 求函数 $f(x)$ 的对称轴方程以及对称中心；

(3) 若 $f\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ，且 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，求 α 的值.

20. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + b \sin x, x \in \mathbf{R}$ 且 $b \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $b = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;

(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 不等式 $f(x) \leq 2$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围.

21. 若函数 $f(x)$ 的图象恒过 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 两点, 则称函数 $f(x)$ 为“0-1函数”.

(1) 判断下面两个函数是否是“0-1函数”, 并说明理由:

① $y = \sin \frac{\pi x}{2}$; ② $y = -x^2 + 2^x$.

(2) 若函数 $f(x) = a^x + b$ 是“0-1函数”, 求 $f(x)$;

(3) 设 $g(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $h(x)$ 满足:

① 对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 均有 $h(x_1 x_2 + 1) = h(x_1) \cdot h(x_2) - h(x_2) - x_1 + 2$;

② $g[h(x)]$ 是“0-1函数”, 求函数 $h(x)$ 的解析式及实数 a 的值.

参考答案

第 I 卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，四个选项中只有一是符合题目）

1. 【答案】B

【解析】

【分析】分别对集合 $A = \{x | x^2 \leq 1\}$ ，集合 $B = \{x | -2 < x - 1 < 7\}$ 进行化简，再由交集的定义即可求得结果.

【详解】因为 $A = \{x | x^2 \leq 1\}$ ，所以 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ ，

又因为 $B = \{x | -2 < x - 1 < 7\}$ ，即 $B = \{x | -1 < x < 8\}$ ，

所以 $A \cap B = \{x | -1 < x \leq 1\}$ ；

故选：B

2. 【答案】C

【解析】

【分析】利用函数的奇偶性的定义和正切函数，正弦函数，幂函数的单调性判断.

【详解】对于 A：函数 $y = \tan x$ 是奇函数，

但是 $y = \tan x$ 在 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ 上不是单调递增函数，A 错误；

对于 B：函数 $y = \sin x$ 为奇函数，但是在定义域 $\mathbb{R}$ 上不是单调递增函数，B 错误；

对于 C：函数 $y = x^3$ 为奇函数，在定义域 $\mathbb{R}$ 上为单调递增函数，C 正确；

对于 D：函数 $y = -\frac{1}{x}$ 是奇函数，但是在定义域 $\{x | x \neq 0\}$ 上不是单调递增函数.

故选：C.

3. 【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用指数函数、对数函数的单调性，结合“中间数”比较大小即可.

【详解】 $a = \log_3 0.3 < \log_3 1 = 0$ ， $b = 3^{0.3} > 3^0 = 1$ ， $0 < c = 0.3^{0.3} < 0.3^0 = 1$ ，

所以 $a < c < b$.

故选：B

4. 【答案】A

【解析】

【分析】求得点 P 逆时针方向运动 $\frac{\pi}{6}$ 弧长到达 Q 点对应的 OQ 与 x 轴正半轴的夹角，再由三角函数值即可求得点 Q 的坐标.

【详解】设 OP 与 x 轴正半轴的夹角为 α ，则点 P 逆时针方向运动 $\frac{\pi}{6}$ 弧长到达 Q 点后 OQ 与 x 轴正半轴的

夹角为 α ，此时 $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ ，则

$$x_Q = \cos \alpha = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad y_Q = \sin \alpha = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故此时点 Q 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故选：A

5. 【答案】A

【解析】

【分析】根据相反向量的定义判断 A，根据向量的线性运算法则判断 B，根据向量相等的定义判断 C，根据共线向量的定义判断 D.

【详解】若 $\vec{b} = -2\vec{a}$ ， $\vec{a}$ 为非零向量，则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 方向相反，但 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不是相反向量，A 错误；

$\vec{NC} + \vec{CM} + \vec{AN} + \vec{MA} = \vec{NM} + \vec{MA} + \vec{AN} = \vec{0}$ ，B 正确；

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以向量 $\vec{AB}, \vec{DC}$ 方向相同，且 $|\vec{AB}| = |\vec{DC}|$ ，所以 $\vec{AB} = \vec{DC}$ ，C 正确；

因为 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ，故 $\vec{b} = -\vec{a}$ ，又向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 一定是共线向量，D 正确；

故选：A.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】根据图象平移写出解析式，再由正弦型函数的性质排除错误项，即可得答案.

【详解】将函数 $y = \cos(3x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位后，得到的函数解析式为

$$y = \cos[3(x + \frac{\pi}{18}) + \frac{\pi}{3}] = \cos(3x + \frac{\pi}{2}) = -\sin 3x,$$

根据正弦型函数的性质，最小正周期 $T = \frac{2\pi}{3}$ ，排除 A、C；

又 $x \in (0, \frac{\pi}{3})$ 时 $y = -\sin 3x < 0$ ，排除 B.

故选：D

7. 【答案】A

【解析】

【分析】利用特殊值法判断充分性不成立，再利用正弦型函数的单调性可判断必要性成立，由此可得出结论.

【详解】因为函数 $y = \sin 2x$ 为周期为 π 的函数，

又 $b - a \geq \pi$ ，所以函数 $f(x) = \sin 2x, x \in [a, b]$ 的最大值为 1，

所以“ $b - a \geq \pi$ ”是“ $f(x)$ 的最大值为 1”的充分条件；

由 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时，可得 $0 \leq 2x \leq \pi$ ，则 $0 \leq \sin 2x \leq 1$ ，

当且仅当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时等号成立，

所以 $f(x) = \sin 2x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 1，此时 $\frac{\pi}{2} - 0 < \pi$ ，

所以“ $b - a \geq \pi$ ”不是“ $f(x)$ 的最大值为 1”的必要条件，

所以“ $b - a \geq \pi$ ”是“ $f(x)$ 的最大值为 1”的充分而不必要条件，

故选：A.

8. 【答案】B

【解析】

【分析】根据诱导公式变形条件等式，结合正弦函数性质化简方程求其解.

【详解】因为 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ ， $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$ ，又 $\cos \alpha = -\sin \frac{\pi}{5}$ ，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ ，

所以 $\frac{\pi}{2} - \alpha - \left(-\frac{\pi}{5}\right) = 2m\pi$ 或 $\frac{\pi}{2} - \alpha + \left(-\frac{\pi}{5}\right) = 2n\pi + \pi$ ，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ ，

所以 $\alpha = -2m\pi + \frac{7\pi}{10}$ 或 $\alpha = -2n\pi - \frac{7\pi}{10}$ ，其中 $m, n \in \mathbb{Z}$ ，

因为 $\alpha \in (-\pi, \pi)$ ，所以 $m = 0, n = 0$ ，

所以 $\alpha = \frac{7\pi}{10}$ 或 $-\frac{7\pi}{10}$ ，

故选：B.

9. 【答案】D

【解析】

【分析】判断函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 的单调性，由此确定 $f(a), f(b), f(c)$ 的符号，结合零点存在性定理判断各选项.

【详解】函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

因为函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减， $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，

所以函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } f(1) = 1 - \log_2 1 = 1 > 0, \quad f(2) = \frac{1}{2} - \log_2 2 = -\frac{1}{2} < 0,$$

所以 $f(x)$ 有且只有一个零点, 且零点在区间 $(1, 2)$ 内, A 正确, B 正确;

因为 $0 < a < b < 1$, 所以 $f(x)$ 的零点不可能在 (a, b) 内, C 正确;

因为函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } f(1) = 1 - \log_2 1 = 1 > 0, \quad 0 < a < b < 1,$$

$$\text{所以 } f(a) > f(b) > f(1) > 0, \quad \text{又 } f(a)f(b)f(c) < 0,$$

$$\text{所以 } f(c) < 0,$$

$$\text{所以当 } x > c \text{ 时, } f(x) < 0,$$

所以 $f(x)$ 的零点不可能在 $(c, +\infty)$ 内, D 错误;

故选: D.

10. 【答案】C

【解析】

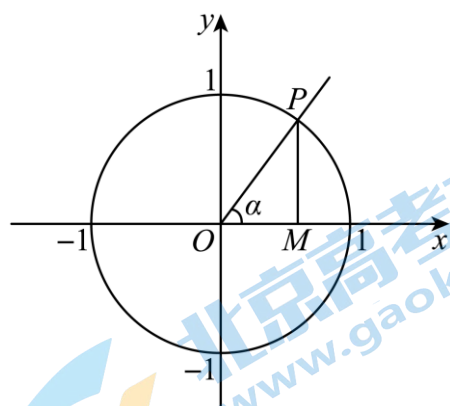
【分析】在①②③中分别判断方程 $f(x) + g(x) = 0$ 是否有非零实数解, 即判断函数 $g(x)$ 与 $-f(x)$ 图象

是否有交点, 再证明当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $x > \sin x$, 作函数图象可得出结论.

【详解】函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 D 上具有性质 P 等价于方程 $f(x) + g(x) = 0$ 存在非零实数解,

方程 $f(x) + g(x) = 0$ 存在非零实数解等价于函数 $g(x)$ 与函数 $-f(x)$ 的图象存在横坐标不为零的交点,

对于①, 当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, 设角 α 与单位圆的交点为 $P(x_0, y_0)$,



因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 所以 $x_0 > 0, y_0 > 0$,

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M ，

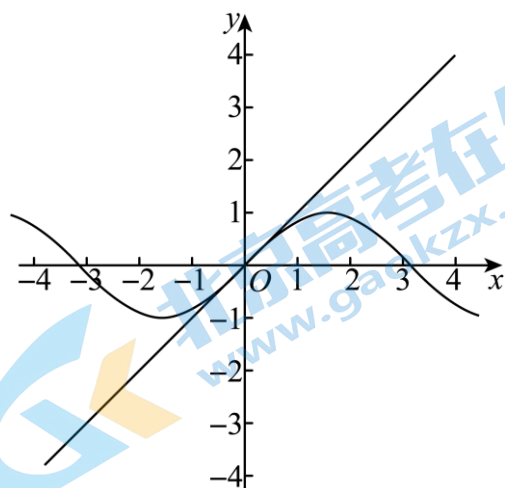
所以 $x_0 = |OM|$, $y_0 = |MP|$, O 为坐标原点，

所以 $\sin \alpha = y_0 = |MP|$ ，又弧 AP 的长度为 $\alpha \times 1 = \alpha$ ，

因为 $|MP| < \alpha$ ，所以 $\sin \alpha < \alpha$ ，

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $\sin x < x$ ，

作函数 $y = \sin x$ 和函数 $y = x$ 的图象如下：

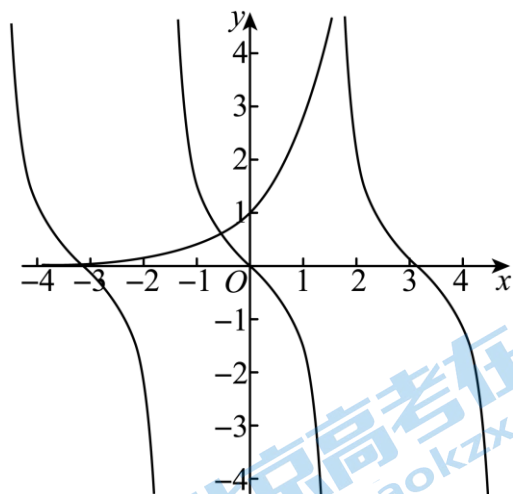


函数 $y = \sin x$ 和函数 $y = x$ 的图象只有一个交点 $(0,0)$ ，

所以不存在非零实数 $c \in \mathbb{R}$ ，使得 $f(c) + g(c) = 0$ ，

故函数 $f(x) = -x$ 和 $g(x) = \sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上不具有性质 P ，

对于②，作函数 $y = -\tan x$ 和函数 $y = e^x$ 的图象如下：

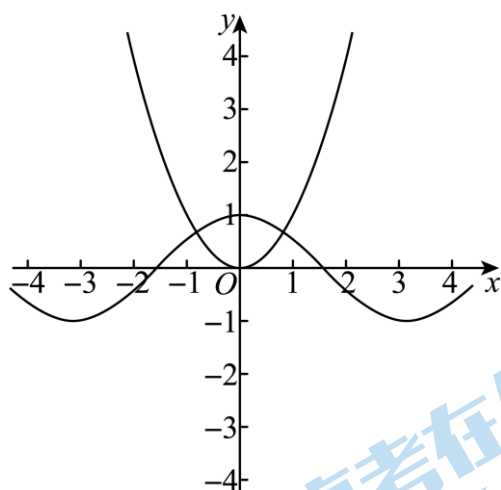


函数 $y = -\tan x$ 和函数 $y = e^x$ 的图象有横坐标不为 0 的交点，

所以存在非零实数 $c \in \mathbb{R}$ ，使得 $f(c) + g(c) = 0$ ，

故函数 $f(x) = \tan x$ 和 $g(x) = e^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有性质 P ,

对于③, 作函数 $y = x^2$ 和函数 $y = \cos x$ 的图象如下:



函数 $y = x^2$ 和函数 $y = \cos x$ 的图象有横坐标不为 0 的交点,

所以存在非零实数 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $f(c) + g(c) = 0$,

故函数 $f(x) = -x^2$ 和 $g(x) = \cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上具有性质 P ,

故选: C.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

11. 【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 利用诱导公式求解即可

【详解】 解: $\tan 330^\circ = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故答案为: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 【答案】 $\{x | 0 < x < 2 \text{ 且 } x \neq \ln 2\}$

【解析】

【分析】 根据函数的解析式, 列出满足的不等式, 即可求得答案.

【详解】 要使函数 $f(x) = \frac{1}{e^x - 2} + \lg(2x - x^2)$ 有意义,

需满足 $\begin{cases} e^x - 2 \neq 0 \\ 2x - x^2 > 0 \end{cases}$, 解得 $0 < x < 2$ 且 $x \neq \ln 2$,

故函数 $f(x) = \frac{1}{e^x - 2} + \lg(2x - x^2)$ 的定义域为 $\{x | 0 < x < 2 \text{ 且 } x \neq \ln 2\}$,

故答案为: $\{x | 0 < x < 2 \text{ 且 } x \neq \ln 2\}$

13. 【答案】 $-\frac{8}{5}$

【解析】

【分析】 根据已知求出 $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 利用诱导公式以及同角的三角函数关系化简求值, 即得答案.

【详解】 由题意 α 是第四象限角, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 得 $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\pi + \alpha) \cdot \tan(2\pi - \alpha) = \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha) \cdot \left(-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)$$

$$= \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^3}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = -\frac{8}{5},$$

故答案为: $-\frac{8}{5}$

14. 【答案】 $\left[\frac{7\pi}{4}, +\infty\right)$

【解析】

【分析】 首先由辅助角公式对函数进行化简, 再由题意代入 x_0 , 存在 $x_0 \in (0, m]$ 使得 $f(x_0) = -\sqrt{2}$, 求得 $m - \frac{\pi}{4} \geq \frac{3\pi}{2}$, 即可求得 m 的取值范围.

【详解】 $f(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 若 $x \in [0, m]$, 则 $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, m - \frac{\pi}{4}\right]$,

由题意知 $f(x_0) = \sqrt{2} \sin\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, 则 $\sin\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) = -1$,

可知 $m - \frac{\pi}{4} \geq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $m \geq \frac{7\pi}{4}$ 故答案为: $\left[\frac{7\pi}{4}, +\infty\right)$

15. 【答案】 ②③④

【解析】

【分析】 根据题意可作出顶点 A 的运动轨迹曲线, 数形结合, 根据曲线一一判断个各选项, 即可得答案.

【详解】 由题意可作出滚动过程中顶点 A 的轨迹曲线, 如图,

当 $0 \leq x < 2$ 时, 轨迹是以 B 为圆心, 2 为半径的四分之一圆;

当 $2 \leq x < 6$ 时, 轨迹是以 $(4, 0)$ 为圆心, $2\sqrt{2}$ 为半径的四分之一圆;

当 $6 \leq x < 8$ 时, 轨迹是以 $(6, 0)$ 为圆心, 2 为半径的四分之一圆;

.....

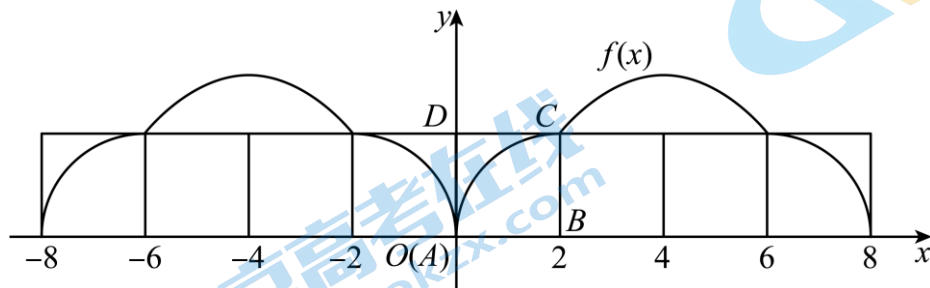
同理可得:

当 $-2 < x \leq 0$ 时, 轨迹是以 $(-2, 0)$ 为圆心, 2 为半径的四分之一圆;

当 $-6 < x \leq -2$ 时, 轨迹是以 $(-4, 0)$ 为圆心, $2\sqrt{2}$ 为半径的四分之一圆;

当 $-8 < x \leq -6$ 时, 轨迹是以 $(-6, 0)$ 为圆心, 2 为半径的四分之一圆;

.....



由此轨迹曲线可知, 此映射 f 的值域是 $[0, 2\sqrt{2}]$, 故①错误;

映射满足函数定义, 故该映射为函数, 且为偶函数, 也为周期函数,

最小正周期为 8, 周期为 $8k (k \in \mathbb{Z})$, 故②③正确;

由轨迹曲线可以看出映射 f 的单增区间为 $[8k, 8k + 4], (k \in \mathbb{Z})$, ④正确,

故答案为: ②③④

【点睛】关键点点睛: 判断映射是否为函数, 要看其是否符合函数的定义, 判断该映射的性质时, 关键是要作出该映射中 A 点的运动轨迹, 数形结合, 便可判断该映射的性质.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明过程或演算步骤.)

16. 【答案】(1) $\{x | x \geq -1\}$

(2) $[2, +\infty)$

【解析】

【分析】(1) 求出集合 A , 根据集合的并集运算即可求得答案.

(2) 求出集合 A 的补集, 根据 $B \subseteq \complement_U A$, 即可得答案.

【小问 1 详解】

由题意可得集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$,

故 $A \cup B = \{x | x \geq -1\}$.

【小问 2 详解】

$\because A = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, $\therefore \complement_U A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$,

若 $B \subseteq \complement_U A$, 则 $a \geq 2$,

即 a 的取值范围为 $[2, +\infty)$.

17. 【答案】(1) $\sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$;

(2) $\tan 2\alpha = -\frac{7}{24}$.

【解析】

【分析】(1)由同角关系求 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ ，再由 $\sin \alpha = \sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$ 结合两角差正弦公式求值；

(2)根据同角关系求 $\tan \alpha$ ，再由二倍角正切公式求 $\tan 2\alpha$.

【小问 1 详解】

因为角 α 为锐角，

所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，故 $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ ，

所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$ ，又 $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$ ，

所以 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$ ，

所以 $\sin \alpha = \sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ；

【小问 2 详解】

由(1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $\sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ ，

所以 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ，

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 7$ ，

所以 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{7}{24}$.

18. 【答案】(1) $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

(2) $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

(3) $-3, x = -\frac{\pi}{3}$; $\frac{3}{2}, x = 0$

【解析】

【分析】(1) 由图象最高点可得 $A = 3$ ，再根据 $\frac{3}{4}T = \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$ 求得函数周期进而求得 ω ，再将点

$\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 代入可求得函数的解析式;

(2) 将 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ 即可解得函数的单调增区间;

(3) 由给定取值范围求得 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, 再由整体代入即可求得函数的最值及取最值时相应的 x 值.

【小问 1 详解】

由图象可知 $A=3$, $\frac{3}{4}T = \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$ 得 $T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega=2$,

得 $f(x) = 3\sin(2x + \varphi)$,

因为函数过点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$, 代入函数解析式得 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 3\sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi\right) = 0$,

则 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$

所以当 $k=1$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 故函数解析式为 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$;

【小问 2 详解】

由 (1) 知函数解析式为 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 令 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$,

解得 $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$, 故函数的单调递增区间为 $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$;

【小问 3 详解】

由 (1) 知函数解析式为 $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

由于 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, 则 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,

当 $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$ 即 $x = -\frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最小值,

即 $f(x)_{\min} = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times (-1) = -3$

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 即 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取得最大值,

即 $f(x)_{\max} = f(0) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

19. 【答案】(1) π

$$(2) x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}; (\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0), k \in \mathbf{Z}.$$

$$(3) \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \alpha = \frac{5\pi}{6}.$$

【解析】

【分析】(1) 利用三角函数的二倍角公式化简 $f(x)$ 为 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ ，根据正弦型函数的周期公式即可求得答案；

(2) 结合正弦函数的对称轴以及对称中心，即可求得答案.

(3) 利用诱导公式化简 $f(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ ，可得 $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，结合 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，即可求得答案.

【小问 1 详解】

$$\text{由题意得 } f(x) = 2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}$$

$$= \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}),$$

$$\text{故函数 } f(x) \text{ 的最小正周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi;$$

【小问 2 详解】

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{故函数的对称轴方程为 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z};$$

$$\text{令 } 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{故函数的对称中心是 } (\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0), k \in \mathbf{Z}.$$

【小问 3 详解】

$$f(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}, \text{ 即 } 2\sin[2(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}] = \sqrt{3},$$

$$\text{故 } \sin(2\alpha + \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 而 } \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \text{ 则 } 2\alpha \in (\pi, 2\pi),$$

$$\text{故 } 2\alpha = \frac{4\pi}{3} \text{ 或 } 2\alpha = \frac{5\pi}{3}, \text{ 即 } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \alpha = \frac{5\pi}{6}.$$

$$20. \text{【答案】(1) } \{x | 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$$

$$(2) (-\infty, 2\sqrt{2}]$$

【解析】

【分析】(1) 利用二倍角公式化简 $f(x) \geq 1$ 可得 $-2\sin^2 x + 2\sin x \geq 0$ ，解得 $\sin x$ 范围，结合正弦函数性质即可求得答案；

(2) 由于 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $\sin x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ，故可将不等式 $f(x) \leq 2$ 恒成立化为 $b \leq \frac{1}{\sin x} + 2\sin x$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时恒成立，结合基本不等式即可求得答案。

【小问 1 详解】

当 $b = 2$ 时， $f(x) = \cos 2x + 2\sin x = -2\sin^2 x + 2\sin x + 1$ ，

则 $f(x) \geq 1$ 即 $-2\sin^2 x + 2\sin x + 1 \geq 1$ ， $\therefore -2\sin^2 x + 2\sin x \geq 0$ ，

即 $0 \leq \sin x \leq 1$ ，又因为 $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，故 $0 \leq \sin x \leq 1$ ，

故不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集为 $\{x \mid 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}\}$ 。

【小问 2 详解】

当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，不等式 $f(x) \leq 2$ 恒成立，即 $\cos 2x + b\sin x \leq 2$ 恒成立，

由于 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时， $\sin x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ，

故 $b \leq \frac{2 - \cos 2x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} + 2\sin x$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时恒成立，

因为 $\sin x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ， $\frac{1}{\sin x} + 2\sin x \geq 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时取等号，

则 $b \leq 2\sqrt{2}$ ，故实数 b 的取值范围为 $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ 。

21. 【答案】(1) 函数 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 为“0-1 函数”，函数 $y = -x^2 + 2^x$ 不是“0-1 函数”，

(2) $f(x) = 2^x - 1$ ；

(3) $h(x) = x + 1$ ， $a = 2$ 。

【解析】

【分析】(1) 结合定义判断两个函数是否满足条件即可；

(2) 将 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 代入 $f(x)$ 中，然后解方程即可；

(3) 由 $g[h(0)] = 0$ ， $g[h(1)] = 1$ 可得 $h(0) = 1$ ， $h(1) = a$ 。分别令 $x_1 = 0, x_2 = x$ 和 $x_1 = x, x_2 = 0$ 从而得到 $a, h(x)$ 。

【小问 1 详解】

对于 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ ，

当 $x=0$ 时, $y=0$,

当 $x=1$ 时, $y=1$,

所以函数 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 经过点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$,

故函数 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 为“0-1函数”.

对于 $y = -x^2 + 2^x$,

当 $x=0$ 时, $y=1$, 当 $x=1$ 时, $y=1$,

所以函数 $y = -x^2 + 2^x$ 不经过点 $(0,0)$,

故函数 $y = -x^2 + 2^x$ 不是“0-1函数”.

【小问2详解】

因为函数 $f(x) = a^x + b$ 是“0-1函数”,

所以 $f(0) = a^0 + b = 0$, $f(1) = a + b = 1$

所以 $a = 2$, $b = -1$,

所以 $f(x) = 2^x - 1$.

【小问3详解】

因为 $g[h(x)]$ 为“0-1函数”,

所以 $g[h(0)] = \log_a h(0) = 0$, $g[h(1)] = \log_a h(1) = 1$,

所以 $h(0) = 1$, $h(1) = a$,

令 $x_1 = 0, x_2 = x$ 得, $h(1) = h(0)h(x) - h(x) + 2$,

所以 $h(1) = 2$, 故 $a = 2$,

令 $x_1 = x, x_2 = 0$ 得, $h(1) = h(x) \cdot h(0) - h(0) - x + 2$,

所以 $h(x) = x + 1$.

【点睛】“新定义”主要是指即时定义新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种, 然后根据此新定义去解决问题, 有时还需要用类比的方法去理解新的定义, 这样有助于对新定义的透彻理解. 但是, 透过现象看本质, 它们考查的还是基础数学知识, 所以说“新题”不一定是“难题”, 掌握好三基, 以不变应万变才是制胜法宝.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯