北京市朝阳区高三年级第二学期质量检测一

数　学

2021．3

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x\mid x-1\ge 0\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{0,1,2,3\}$　（B）$\{1,2,3\}$　（C）$\{2,3\}$　（D）$\{3\}$

（2）如果复数 $\dfrac{2+bi}{i}$（$b\in\mathbf{R}$）的实部与虚部相等，那么 $b=$

（A）-2　（B）1　（C）2　（D）4

（3）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=1$，$S_9=18$，则 $a_1=$

（A）0　（B）-1　（C）-2　（D）-3

（4）已知圆 $x^2+y^2=4$ 截直线 $y=kx+2$ 所得弦的长度为 $2\sqrt{3}$，则实数 $k=$

（A）$\sqrt{2}$　（B）$-\sqrt{3}$　（C）$\pm\sqrt{2}$　（D）$\pm\sqrt{3}$

（5）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为 2，则双曲线 C 的渐近线方程为

（A）$y=\pm\sqrt{3}x$　（B）$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　（C）$y=\pm\dfrac{1}{2}x$　（D）$y=\pm 2x$

（6）在 $\triangle ABC$ 中，若 $a^2-b^2+c^2+ac=0$，则 $B=$

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　（D）$\dfrac{2\pi}{3}$

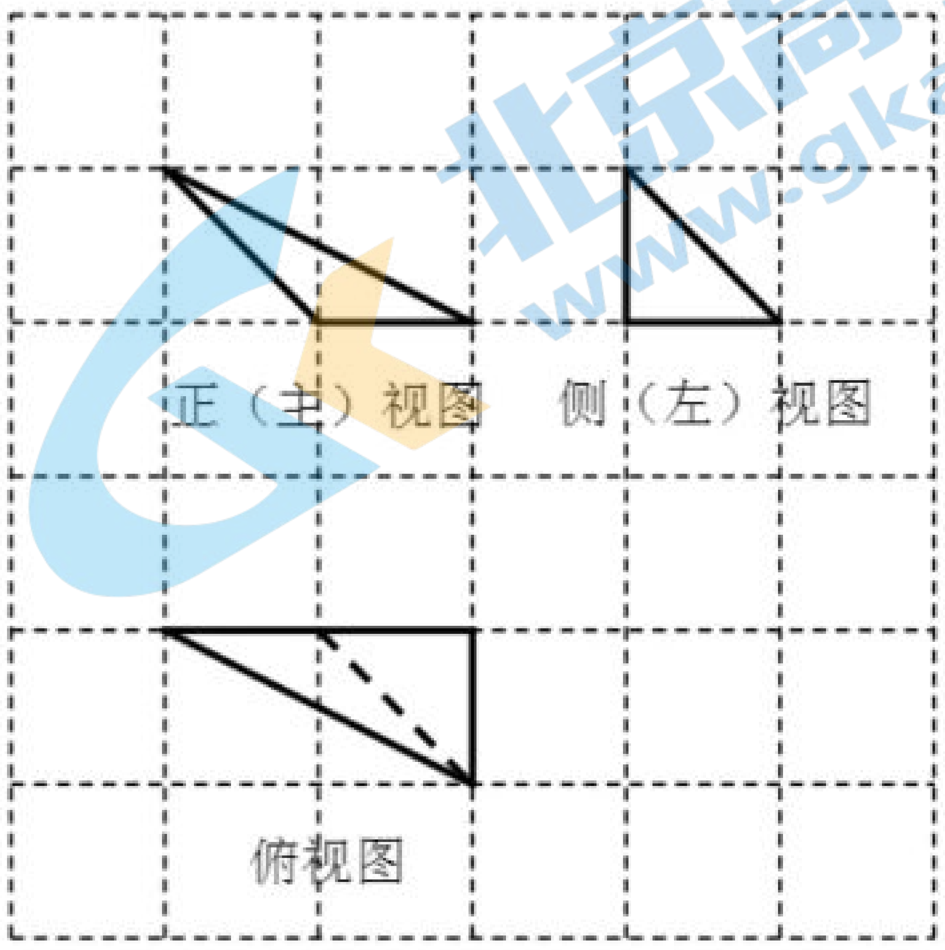
（7）某三棱锥的三视图如图所示，已知网格纸上小正方形的边长为 1，则该三棱锥最长的棱长为

（A） 2

（B） $\sqrt{5}$

（C） $\sqrt{6}$

（D） $2\sqrt{2}$



（8）在$\triangle ABC$中，“$\tan A\tan B<1$”是“$\triangle ABC$为钝角三角形”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，准线为l，点P是直线l上的动点．若点A在抛物线C上，且$|AF|=5$，则$|PA|+|PO|$（O为坐标原点）的最小值为

（A） 8　　（B） $2\sqrt{13}$　　（C） $\sqrt{41}$　　（D） 6

（10）在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P是线段BC_1上的点，过A_1的平面α与直线PD垂直．当P在线段BC_1上运动时，平面α截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面面积的最小值是

（A） 1　　（B） $\frac{5}{4}$

（C） $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　（D） $\sqrt{2}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）在 $(x+\frac{1}{x})^8$ 的展开式中，x^4 的系数为________.（用数字作答）

（12）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<1,\\ -\log_2 x, & x\geq 1,\end{cases}$ 则 $f(0)=$________；$f(x)$ 的值域为________.

（13）已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(x,y)$（$xy\neq 0$），且 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标可以是________.（写出一个即可）

（14）李明自主创业，经营一家网店，每售出一件 A 商品获利 8 元．现计划在“五一”期间对 A 商品进行广告促销，假设售出 A 商品的件数 m（单位：万件）与广告费用 x（单位：万元）符合函数模型 $m=3-\frac{2}{x+1}$．若要使这次促销活动获利最多，则广告费用 x 应投入________万元．

（15）华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了“混沌”的数学定义，由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用．在混沌理论中，函数的周期点是一个关键概念，定义如下：设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对于 $x_0\in\mathbf{R}$，令 $x_n=f(x_{n-1})$（$n=1,2,3,\cdots$），若存在正整数 k 使得 $x_k=x_0$，且当 $0<j<k$ 时，$x_j\neq x_0$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个周期为 k 的周期点．给出下列四个结论：

① 若 $f(x)=\mathrm{e}^{x-1}$，则 $f(x)$ 存在唯一一个周期为 1 的周期点；

② 若 $f(x)=2(1-x)$，则 $f(x)$ 存在周期为 2 的周期点；

③ 若 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<\frac{1}{2},\\ 2(1-x), & x\geq\frac{1}{2},\end{cases}$ 则 $f(x)$ 不存在周期为 3 的周期点；

④ 若 $f(x)=x(1-x)$，则对任意正整数 n，$\frac{1}{2}$ 都不是 $f(x)$ 的周期为 n 的周期点．

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）由下列四个条件中的三个来确定：

①最小正周期为 π；②最大值为 2；③ $f(-\frac{\pi}{6})=0$；④ $f(0)=-2$.

（Ⅰ）写出能确定 $f(x)$ 的三个条件，并求 $f(x)$ 的解析式；

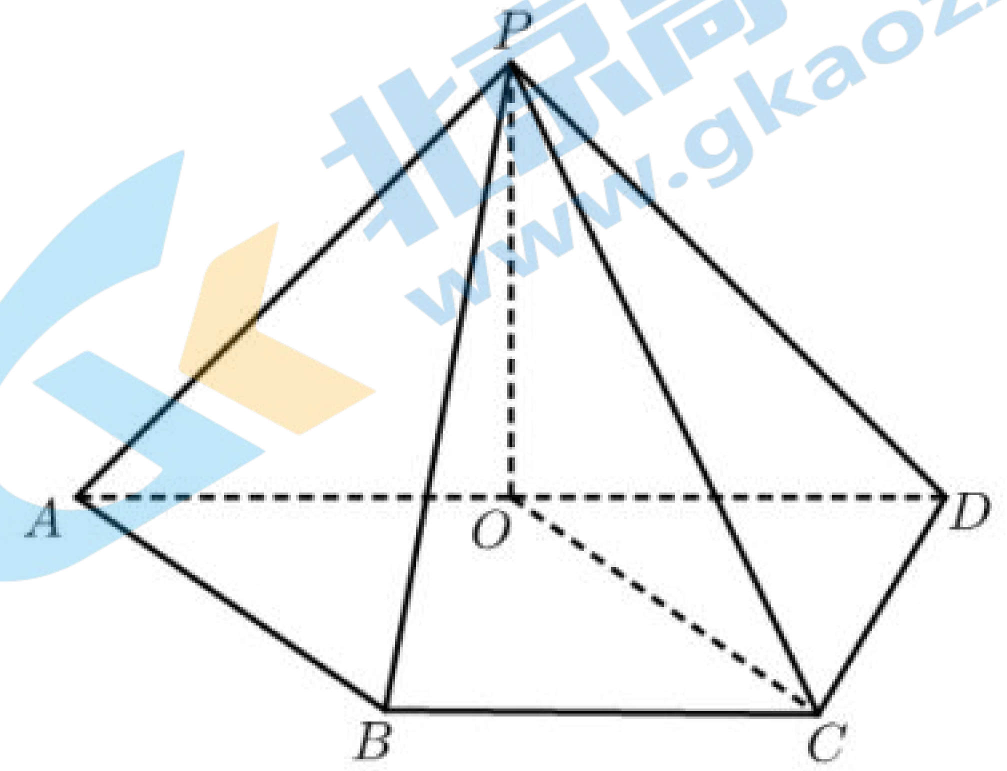
（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递增区间.

（17）（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，O 是 AD 边的中点，$PO\perp$ 底面 $ABCD$，$PO=1$. 在底面 $ABCD$ 中，$BC\,//\,AD$，$CD\perp AD$，$BC=CD=1$，$AD=2$.

（Ⅰ）求证：$AB\,//$ 平面 POC；

（Ⅱ）求二面角 $B-AP-D$ 的余弦值.



(18)(本小题 14 分)

我国脱贫攻坚战取得全面胜利，现行标准下农村贫困人口全部脱贫，消除了绝对贫困. 为了解脱贫家庭人均年纯收入情况，某扶贫工作组对 A，B 两个地区 2019 年脱贫家庭进行简单随机抽样，共抽取 500 户家庭作为样本，获得数据如下表：

	A 地区	B 地区
2019 年人均年纯收入超过 10000 元	100 户	150 户
2019 年人均年纯收入未超过 10000 元	200 户	50 户

假设所有脱贫家庭的人均年纯收入是否超过 10000 元相互独立.

(Ⅰ) 从 A 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户，估计该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元的概率；

(Ⅱ) 在样本中，分别从 A 地区和 B 地区 2019 年脱贫家庭中各随机抽取 1 户，记 X 为这 2 户家庭中 2019 年人均年纯收入超过 10000 元的户数，求 X 的分布列和数学期望；

(Ⅲ) 从样本中 A 地区的 300 户脱贫家庭中随机抽取 4 户，发现这 4 户家庭 2020 年人均年纯收入都超过 10000 元. 根据这个结果，能否认为样本中 A 地区 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数相比 2019 年有变化？请说明理由.

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆 C 的短轴的两个端点分别为 $A(0,1)$，$B(0,-1)$，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的方程及焦点的坐标；

(Ⅱ) 若点 M 为椭圆 C 上异于 A,B 的任意一点，过原点且与直线 MA 平行的直线与直线 $y=3$ 交于点 P，直线 MB 与直线 $y=3$ 交于点 Q，试判断以线段 PQ 为直径的圆是否过定点？若过定点，求出定点的坐标；若不过定点，请说明理由.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=(ax-1)e^{x}$（$a\in\mathbf{R}$）.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若直线 $y=ax+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，求证：$a\in(-1,-\frac{2}{3})$.

（21）（本小题 15 分）

设数列 $A_m:a_1,a_2,\cdots,a_m$（$m\geq 2$），若存在公比为 q 的等比数列 $B_{m+1}:b_1,b_2,\cdots,b_{m+1}$，使得 $b_k<a_k<b_{k+1}$，其中 $k=1,2,\cdots,m$，则称数列 B_{m+1} 为数列 A_m 的"等比分割数列".

（Ⅰ）写出数列 $A_4:3,6,12,24$ 的一个"等比分割数列" B_5；

（Ⅱ）若数列 A_{10} 的通项公式为 $a_n=2^n(n=1,2,\cdots,10)$，其"等比分割数列" B_{11} 的首项为 1，求数列 B_{11} 的公比 q 的取值范围；

（Ⅲ）若数列 A_m 的通项公式为 $a_n=n^2(n=1,2,\cdots,m)$，且数列 A_m 存在"等比分割数列"，求 m 的最大值.

北京市朝阳区高三年级第二学期质量检测一

数学 参考答案

2021．3

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　（2）A　（3）A　（4）D　（5）A

（6）D　（7）C　（8）C　（9）B　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）28　（12）1；$(-\infty,2)$

（13）$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$（答案不唯一）　（14）3　（15）①④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）确定 $f(x)$ 的三个条件是①，②，③.

当 $A>0$ 且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 时，$A\sin\varphi>0$．

若函数 $f(x)$ 满足条件④，则 $f(0)=A\sin\varphi=-2$，

与 $A\sin\varphi>0$ 矛盾，所以 $f(x)$ 不能满足条件④.

所以能确定 $f(x)$ 的三个条件是①，②，③.

由条件①，得 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，又 $\omega>0$，所以 $\omega=2$．

由条件②，得 $|A|=2$，又 $A>0$，所以 $A=2$．

由条件③，得 $f(-\frac{\pi}{6})=2\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=0$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$．

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．

经验证，$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 符合题意. ………………………………………… 7 分

（Ⅱ）函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$），

得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12}$（$k\in\mathbf{Z}$）.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}]$（$k\in\mathbf{Z}$）. ……………………………… 13 分

(17)（共 13 分）

解：（Ⅰ）在四边形 $ABCD$ 中，

因为 $BC // AD, BC=\frac{1}{2}AD$， O 是 AD 的中点，则 $BC // AO$， $BC=AO$.

所以四边形 $ABCO$ 是平行四边形.

所以 $AB // OC$.

又因为 $AB \not\subset$ 平面 POC， $OC \subset$ 平面 POC，

所以 $AB //$ 平面 POC. ....5 分

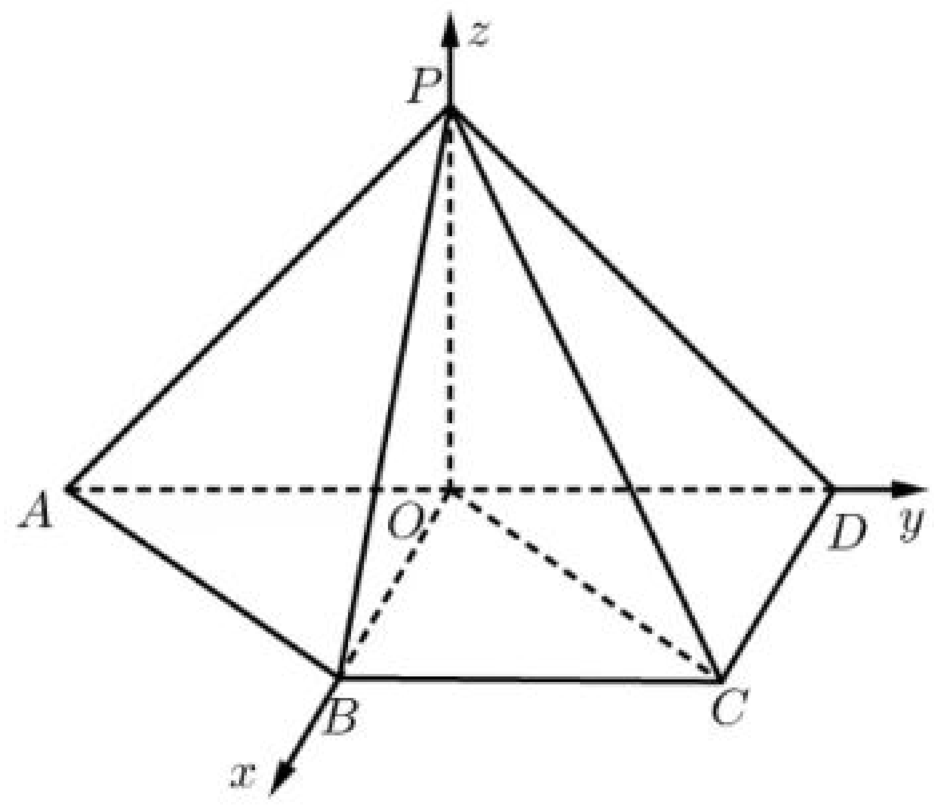
（Ⅱ）连结 OB.

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO \perp OB, PO \perp OD$.

又因为点 O 是 AD 的中点，且 $BC=\frac{1}{2}AD$，

所以 $BC=OD$.



因为 $BC // AD, CD \perp AD, BC=CD$，

所以四边形 $OBCD$ 是正方形. 所以 $BO \perp AD$.

如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $A(0,-1,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0), P(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0), \overrightarrow{AP}=(0,1,1)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 BAP 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $\boldsymbol{m}=(-1,1,-1)$.

因为 $OB \perp$ 平面 PAD，

所以 $\overrightarrow{OB}=(1,0,0)$ 是平面 PAD 的一个法向量.

所以 $\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OB}\rangle\right|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{OB}|}\right|=\left|\frac{-1}{\sqrt{3}\times 1}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由图可知，二面角 $B-AP-D$ 为锐角，

所以二面角 $B-AP-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ....13 分

(18)(共 14 分)

解:(Ⅰ)设事件 C:从 A 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户,该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元.

从表格数据可知,A 地区抽出的 300 户家庭中 2019 年人均年收入超过 10000 元的有 100 户,

因此 $P(C)$ 可以估计为 $\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$. .... 3 分

(Ⅱ)设事件 A:从样本中 A 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户,该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元,则 $P(A)=\frac{1}{3}$.

设事件 B:从样本中 B 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户,该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元,则 $P(B)=\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$.

由题可知 X 的可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{3}{4})=\frac{1}{6}$;

$P(X=1)=P(\bar{A}B\cup A\bar{B})=P(\bar{A})P(B)+P(A)P(\bar{B})=(1-\frac{1}{3})\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times(1-\frac{3}{4})=\frac{7}{12}$;

$P(X=2)=P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

所以 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{7}{12}+2\times\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$. .... 10 分

(Ⅲ)设事件 E 为“从样本中 A 地区的 300 户脱贫家庭中随机抽取 4 户,这 4 户家庭 2020 年人均年纯收入都超过 10000 元”.

假设样本中 A 地区 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数相比 2019 年没有变化,

则由 2019 年的样本数据得 $P(E)=\frac{C_{100}^{4}}{C_{300}^{4}}\approx 0.012$.

答案示例 1:可以认为有变化.理由如下:

$P(E)$ 比较小,概率比较小的事件一般不容易发生.一旦发生,就有理由认为样本中 A 地区 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数相比 2019 年发生了变化.

所以可以认为有变化.

答案示例 2：无法确定有没有变化．理由如下：

事件 E 是随机事件，$P(E)$ 比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的，

所以无法确定有没有变化．……………………………………………………………………14 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题意可设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，则

$$\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$$

解得 $a=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{2}$．

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，焦点坐标为 $(-\sqrt{2},0)$ 和 $(\sqrt{2},0)$．……………………………5 分

（Ⅱ）方法 1：

设点 M 的坐标为 (x_0,y_0)（$x_0\neq 0, y_0\neq \pm 1$），则 $\frac{x_0^2}{3}+y_0^2=1$．

过原点且与直线 MA 平行的直线方程为 $y=\frac{y_0-1}{x_0}x$．

令 $y=3$，得 $P(\frac{3x_0}{y_0-1},3)$．

直线 MB 的方程为 $y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$，

令 $y=3$，得 $Q(\frac{4x_0}{y_0+1},3)$．

假设以线段 PQ 为直径的圆过定点，由椭圆的对称性可设定点为 $N(0,m)$．

则 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$．

因为 $\overrightarrow{NP}=(\frac{3x_0}{y_0-1},3-m), \overrightarrow{NQ}=(\frac{4x_0}{y_0+1},3-m)$，

所以 $\frac{12x_0^2}{y_0^2-1}+(3-m)^2=0$．

因为 $\frac{x_0^2}{3}+y_0^2=1$，所以 $m^2-6m-27=0$．

则 $m=-3$ 或 $m=9$．

所以以线段 PQ 为直径的圆过定点，且定点坐标为 $(0,-3)$ 和 $(0,9)$．……………………15 分

方法 2：

设点 M 的坐标为 (x_0,y_0)（$x_0\neq 0, y_0\neq \pm 1$），则 $\frac{x_0^2}{3}+y_0^2=1$．

过原点且与直线 MA 平行的直线方程为 $y=\frac{y_0-1}{x_0}x$．

令 $y=3$，得 $x_P=\frac{3x_0}{y_0-1}$．

直线 MB 的方程为 $y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$，

令 $y=3$，得 $x_Q=\frac{4x_0}{y_0+1}$．

所以以 PQ 为直径的圆的半径为

$$r=\frac{1}{2}|x_Q-x_P|=\frac{1}{2}\left|\frac{4x_0}{y_0+1}-\frac{3x_0}{y_0-1}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{x_0y_0-7x_0}{(y_0+1)(y_0-1)}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{3(7-y_0)}{x_0}\right|.$$

圆心的横坐标为 $\frac{x_Q+x_P}{2}=\frac{1}{2}(\frac{3x_0}{y_0-1}+\frac{4x_0}{y_0+1})=\frac{1}{2}\times\frac{7x_0y_0-x_0}{{y_0}^2-1}=-\frac{3(7y_0-1)}{2x_0}$．

所以以线段 PQ 为直径的圆的方程为 $\left[x+\frac{3(7y_0-1)}{2x_0}\right]^2+(y-3)^2=\frac{1}{4}\left[\frac{3(7-y_0)}{x_0}\right]^2$．

因为 $\frac{x_0^2}{3}+y_0^2=1$，所以 $x^2+\frac{3(7y_0-1)}{x_0}x+(y-3)^2-36=0$．

以线段 PQ 为直径的圆过定点等价于对任意的点 $M(x_0,y_0)$，

方程 $x^2+\frac{3(7y_0-1)}{x_0}x+(y-3)^2-36=0$ 恒成立．

所以 $\begin{cases}x^2+(y-3)^2-36=0,\\x=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0,\\y=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y=-3.\end{cases}$

所以以线段 PQ 为直径的圆过定点，且定点坐标为 $(0,-3)$ 和 $(0,9)$．……………………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=(ax+a-1)\mathrm{e}^x$．令 $f'(x)=0$，得 $ax=1-a$．

当 $a=0$ 时，$f'(x)=-\mathrm{e}^x<0$，$y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的变化情况如下：

x	$(-\infty,\frac{1-a}{a})$	$\frac{1-a}{a}$	$(\frac{1-a}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

当 $a<0$ 时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的变化情况如下：

x	$(-\infty,\frac{1-a}{a})$	$\frac{1-a}{a}$	$(\frac{1-a}{a},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

综上，当 $a=0$ 时，$y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

当 $a>0$ 时，$y=f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\frac{1-a}{a})$，单调递增区间为 $(\frac{1-a}{a},+\infty)$，

当 $a<0$ 时，$y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\frac{1-a}{a})$，单调递减区间为 $(\frac{1-a}{a},+\infty)$．

……………………………………………………………………6 分

（Ⅱ）由题得 $f'(x)=(ax+a-1)e^x$．

设直线 $y=ax+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 (x_0,y_0)，

则 $\begin{cases}(ax_0-1)e^{x_0}=a(x_0+1), & ①\\ (ax_0+a-1)e^{x_0}=a. & ②\end{cases}$

由①-②得 $-ae^{x_0}=ax_0$，即 $a(e^{x_0}+x_0)=0$．

若 $a=0$，则 $f(x)=-e^x$，$ax+a=0$，

直线 $y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 不相切，不符合题意，所以 $a\neq 0$．

所以 $e^{x_0}+x_0=0$． ③

令 $\varphi(x)=e^x+x$，则 $\varphi'(x)=e^x+1>0$，所以 $\varphi(x)$ 单调递增．

因为 $\varphi(-\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}>0$，$\varphi(-1)=e^{-1}-1<0$，

所以存在唯一 $x_0\in(-1,-\frac{1}{2})$ 使得 $e^{x_0}+x_0=0$．

将③代入①得 $ax_0^2+ax_0-x_0+a=0$．

所以 $a=\dfrac{x_0}{x_0^2+x_0+1}=\dfrac{1}{x_0+\dfrac{1}{x_0}+1}$．

易知在 $(-1,-\frac{1}{2})$ 内 $y=x+\frac{1}{x}+1$ 单调递减，且 $x+\frac{1}{x}+1<0$，

所以 $y=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}+1}$ 在 $(-1,-\frac{1}{2})$ 内单调递增．

因为 $x_0\in(-1,-\frac{1}{2})$，所以 $-1<a<-\frac{2}{3}$，所以 $a\in(-1,-\frac{2}{3})$．..15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）$B_5:2,4,8,16,32$．（答案不唯一）..3 分

（Ⅱ）由 $b_k<a_k<b_{k+1}$，得 $q^{k-1}<2^k<q^k,k=1,2,\cdots,10$，

所以 $2<q<2^{\frac{k}{k-1}},k=2,3,\cdots,10$．

令 $f(k)=\dfrac{k}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1},k=2,3,\cdots,10$，

则 $f(k)$ 单调递减．

所以 $2^{\frac{k}{k-1}}$（$k=2,3,\cdots,10$）的最小值为 $2^{\frac{10}{9}}$．

所以 $2<q<2^{\frac{10}{9}}$，即公比 q 的取值范围是 $(2,2^{\frac{10}{9}})$．..8 分

（Ⅲ）首先证明当 $m\ge 6$ 时，数列 A_m 不存在“等比分割数列”．

假设当 $m\ge 6$ 时，数列 A_m 存在“等比分割数列” B_{m+1}，

则 $b_1<1<b_2=b_1q<4<b_1q^2<9<b_1q^3<16<b_1q^4<25<\cdots<m^2<b_1q^m$．

易知 $b_1>0,q>0$．

因为 $0<b_1<1$，且 $4<b_1q^2$，所以 $q^2>4$．因为 $q>0$，所以 $q>2$．

又因为 $9<b_1q^3$，所以 $b_6=b_1q^5=b_1q^3\cdot q^2>36=6^2$，

与 $b_6<a_6=36$ 矛盾．

所以当 $m\ge 6$ 时，数列 A_m 不存在“等比分割数列”．

所以 $m\le 5$．

当 $m=5$ 时，数列 $A_5:1,4,9,16,25$，存在首项为 $\frac{4}{5}$ 公比为 $\frac{9}{4}$ 的数列 B_6 满足：

$\frac{4}{5}<1<\frac{9}{5}<4<\frac{81}{20}<9<\frac{729}{80}<16<\frac{6561}{320}<25<\frac{59049}{1280}$．

所以 $m=5$ 时，数列 A_m 存在“等比分割数列”．

所以 m 的最大值为 5．..15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。