2023 北京八一学校高二 10 月月考

数　　学

一、选择题：本大题共 10 小题，每题 5 分，共 50 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知 $z=\frac{3+4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，求 $|z|=$（　）

A. 5　　B. 13　　C. 15　　D. 25

2. 已知向量 $\vec{a}=(2,2,1)$，$\vec{b}=(x,2,x-1)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $x=$（　）

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

3. 设 $\triangle ABC$ 内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}$，$C=60^\circ$，则角 $B=$（　）

A. 45°　　B. 30°

C. 45° 或 135°　　D. 30° 或 150°

4. 要得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin 2x$ 的图象（　）

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

5. 设 a，b 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，则下列命题正确的是（　）

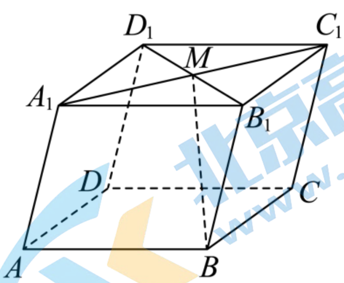
A. 若 $\alpha//\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$　　B. 若 $\alpha\cap\beta=a$，$b//a$，则 $b//\alpha$

C. 若 $\alpha\perp\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}$　　D. 若 $a\perp\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha//\beta$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}$

6. 已知向量 $\vec{a}=(1,x,2)$，$\vec{b}=(0,1,2)$，$\vec{c}=(1,0,0)$，若 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，则 x 等于（　）

A. -1　　B. 1　　C. 1 或 -1　　D. 1 或 0

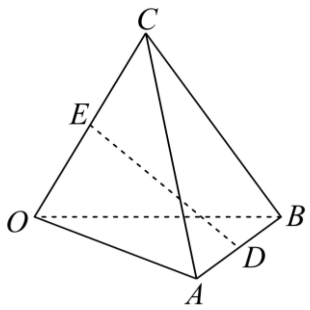
7. 如图所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点，若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则 $\overrightarrow{BM}=$（　）



A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

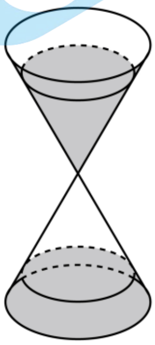
C. $-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$　　　　D. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$

8. 如图，三棱锥 $O-ABC$ 各棱的棱长均为 $\sqrt{3}$，点 D 是棱 AB 的中点，点 E 在棱 OC 上的动点，则 DE 的最小值为（　）



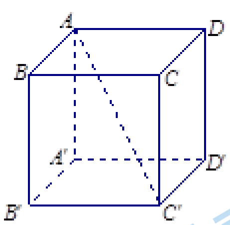
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D. 1

9. 沙漏是我国古代的一种计时工具，是用两个完全相同的圆锥顶对顶叠放在一起组成的（如图）. 在一个圆锥中装满沙子，放在上方，沙子就从顶点处漏到另一个圆锥中，假定沙子漏下来的速度是恒定的. 已知一个沙漏中沙子全部从一个圆锥中漏到另一个圆锥中需用时 10 分钟. 那么经过 5 分钟后，沙漏上方圆锥中的沙子的高度与下方圆锥中的沙子的高度之比是（假定沙堆的底面是水平的）



A. $1:2$　　　　B. $\left(\sqrt{2}+1\right):1$　　　　C. $1:\sqrt{2}$　　　　D. $1:\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

10. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，若点 P（异于点 B）是棱上一点，则满足 BP 与 AC' 所成的角为 $45°$ 的点 P 的个数为



A. 0　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 6

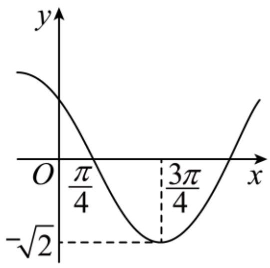
二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 空间两点 $M(-1,-2,4)$，$N(1,-1,2)$ 间的距离 MN 为_____.

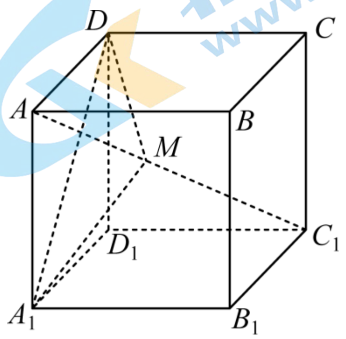
12. 已知 $O(0,0,0)$，$A(3,-2,-4)$，$B(0,5,-1)$，若 $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，则 C 的坐标是____________.

13. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2$，则直线 AA_1 与 BC_1 所成角的大小为__________；直线 AA_1 到平面 BB_1C_1C 的距离为__________.

14. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象如图所示，则 $f(0)=$ ____________.



15. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 是对角线 AC_1 上的点（点 M 与 A、C_1 不重合），则下列结论正确的是__________.（请填写序号）



①存在点 M，使得平面 $A_1DM\perp$ 平面 BC_1D；

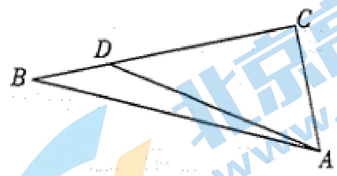
②存在点 M，使得 $DM\,//$ 平面 B_1CD_1；

③若 $\triangle A_1DM$ 的面积为 S，则 $S\in\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},2\sqrt{3}\right)$；

④若 S_1、S_2 分别是 $\triangle A_1DM$ 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 与平面 BB_1C_1C 的正投影的面积，则存在点 M，使得 $S_1=S_2$.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 45 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=1$，$B=\frac{\pi}{6}$，点 D 在边 BC 上，且 $\cos\angle ADB=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.



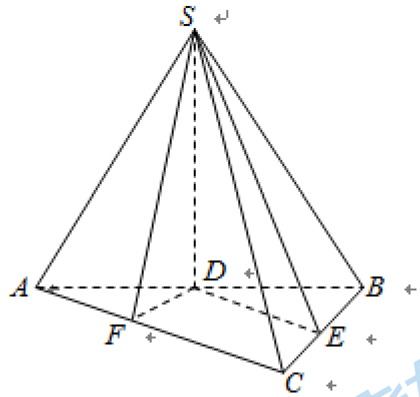
（1）求 AD；

（2）求 $\triangle ACD$ 的面积.

17. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中， D,E 分别为 AB， BC 的中点，点 F 在 AC 上，且 $SD\perp$ 底面 ABC.

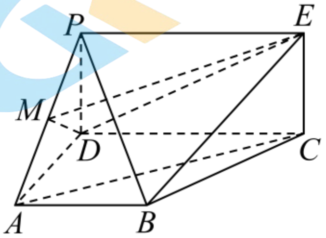
（1）求证： $DE//$ 平面 SAC；

（2）若 $SF\perp AC$，求证：平面 $SFD\perp$ 平面 SAC.



18. 如图， $PDCE$ 为矩形， $ABCD$ 为梯形，平面 $PDCE\perp$ 平面 $ABCD$， $\angle BAD=\angle ADC=90°$，

$AB=AD=\frac{1}{2}CD=1$， $PD=\sqrt{2}$.



（1）若 M 为 PA 中点，求证： $AC//$ 平面 MDE；

（2）求直线 PB 与直线 CD 所成角的大小；

（3）设平面 $PAD\cap$ 平面 $EBC=l$，试判断 l 与平面 $ABCD$ 能否垂直？并证明你的结论.

19. 已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}(n\geq 2)$，对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

$\in S_n$， $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$，定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$； A 与 B 之间

的距离为 $d(A,B)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$.

（1）若 $A-B=(0,1)$，试写出所有可能的 A， B；

（2） $\forall A,B,C\in S_n$，证明： $d(A-C,B-C)=d(A,B)$；

（3） $\forall A,B,C\in S_n$， $d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中是否一定有偶数？证明你的结论.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每题 5 分，共 50 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】A

【分析】根据复数乘除法的性质与模的性质计算.

【详解】$|z|=\left|\dfrac{3+4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|3+4\mathrm{i}|}{|\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}}{1}=5$.

故选：A.

2.【答案】B

【分析】根据空间向量垂直的坐标表示列出方程，求解即可得出答案.

【详解】由已知可得，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，所以$2x+2\times2+1\times(x-1)=0$，解得$x=-1$.

故选：B.

3.【答案】A

【分析】先根据大边对大角判断角 B 范围，再直接利用正弦定理求解即可.

【详解】$\because b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}$，$C=60°$，$\therefore b<c$，$B<C$，即$0°<B<60°$.

由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore B=45°$，

故选：A.

4.【答案】B

【分析】根据三角函数平移变换原则直接判断即可.

【详解】$\because y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$，

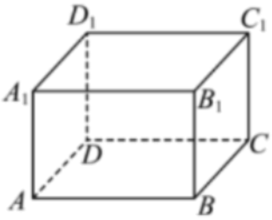
$\therefore$只需将$y=\sin 2x$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度即可.

故选：B.

5.【答案】D

【分析】利用长方体模型，举例说明排除 ABC，D 项加以证明.

【详解】在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，令平面$ABCD$是平面α，



对于 A，若平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为平面 β，直线 BC 为直线 a，

直线 A_1B_1 为直线 b，显然 $\alpha//\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，

此时直线 a,b 是异面直线，a,b 不平行，故 A 错误；

对于 B，若平面 CDD_1C_1 为平面 β，则 $\alpha\cap\beta=DC$，直线 DC 为直线 a，

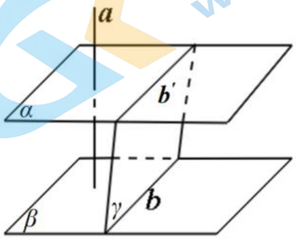
直线 AB 为直线 b，

显然 $a//b$，但 $b\subset\alpha$，此时直线 b 不与平面 α 平行，故 B 错误；

对于 C，若平面 CDD_1C_1 为平面 β，直线 AB 为直线 a，直线 DC 为直线 b，

显然 $\alpha\perp\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，此时直线 a,b 平行，a,b 不垂直，故 C 错误；

对于 D，过直线 b 作平面 γ 与平面 α 相交，设交线为 b'，



因为 $b\subset\beta$，

所以 $\beta\cap\gamma=b$，$\alpha\cap\gamma=b'$，由 $\alpha//\beta$，

所以 $b//b'$，又因为 $a\perp\alpha$，$b'\subset\alpha$，所以 $a\perp b'$，

所以 $\vec{a}\perp\vec{b}$，故 D 正确.

故选：D.

6.【答案】B

【分析】根据向量共面关系 $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$，建立坐标等式即可得解.

【详解】∵向量 $\vec{a}=(1,x,2)$，$\vec{b}=(0,1,2)$，$\vec{c}=(1,0,0)$，由 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 共面，

$\therefore\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$，即 $(1,x,2)=m(0,1,2)+n(1,0,0)=(n,m,2m)$

$\therefore\begin{cases}1=n\\x=m\\2=2m\end{cases}$，解得 $x=m=n=1$，$\therefore x=1$.

故选：B.

7.【答案】D

【分析】根据空间向量基本定理结合空间向量线性运算求解.

【详解】由题意可得：$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{BB_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1B_1}\right)$

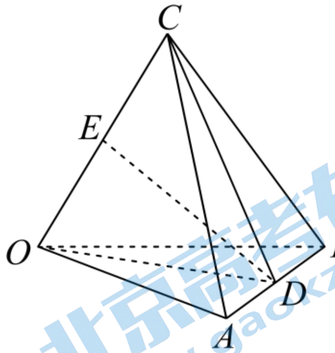
$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

故选：D.

8.【答案】B

【分析】利用垂线段最短，再利用正四面体的性质、勾股定理求解.

【详解】



根据题意，在$\triangle DOC$中，当$DE\perp OC$时，即E为OC的中点时，DE取到最小值，

连结CD,OD，易得$\triangle DOC$为等腰三角形，$CD=\frac{3}{2},CE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由勾股定理，

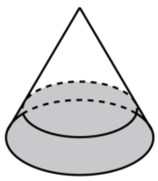
得$DE^2=CD^2-CE^2$，解得$DE=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则$\left|\overrightarrow{DE}\right|$的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.故A，C，D错误.

故选：B.

9.【答案】D

【分析】根据题意可知下方圆锥的空白部分就是上方圆锥中的沙子部分，把高度比转化为体积比.

【详解】



由于时间刚好是5分钟，是总时间的一半，而沙子漏下来的速度是恒定的，

所以漏下来的沙子是全部沙子的一半，下方圆锥的空白部分就是上方圆锥中的沙子部分，所以可以单独研究下方圆锥，下方圆锥被沙子的上表面分成体积相等的两部分，

所以$\frac{V_{上}}{V_{全}}=\frac{1}{2}=\left(\frac{h_{上}}{h_{全}}\right)^3$，所以$\frac{h_{上}}{h_{全}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，所以$\frac{h_{上}}{h_{下}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

故选D

【点睛】本题考查几何体的体积问题的应用，考察空间想象能力和运算求解能力.

10.【答案】B

【详解】解：当点P在BB'上时，符合题意，另外在棱DD'上也是符合题意的．分别对各个棱进行分类讨

论，就可以得到结论.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】3

【分析】根据空间中两点间的距离公式即可得到答案

【详解】由空间中两点间的距离公式可得; $|MN|=\sqrt{(1+1)^2+(-1+2)^2+(2-4)^2}=3$;

故距离为 3

【点睛】本题考查空间中两点间的距离公式，属于基础题.

12.【答案】$\left(-2,\frac{14}{3},2\right)$

【分析】先求得 $\overrightarrow{AB}=(-3,7,3)$，再根据 $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，求得 $\overrightarrow{OC}=\left(-2,\frac{14}{3},2\right)$，即可求解.

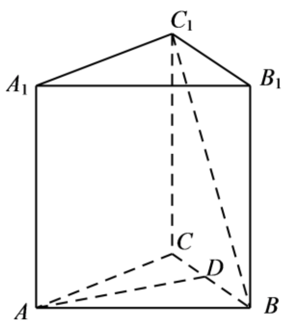
【详解】因为 $A(3,-2,-4),B(0,5,-1)$，则 $\overrightarrow{AB}=(-3,7,3)$.

所以 $\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\left(-2,\frac{14}{3},2\right)$，即 $C\left(-2,\frac{14}{3},2\right)$.

故答案为：$\left(-2,\frac{14}{3},2\right)$.

13.【答案】 ①. $45°$ ## $\frac{\pi}{4}$ ②. $\sqrt{3}$

【详解】如图所示：



在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1//CC_1$， $\angle BC_1C$ 为锐角，

所以 $\angle BC_1C$ 为直线 AA_1 与 BC_1 所成的角，

因为 $CC_1=BC$，

所以 $\angle BC_1C=45^\circ$，

作 $AD\perp BC$，

因为平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 ABC，平面 $BB_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=BC$，

所以 $AD\perp$ 平面 BB_1C_1C，

因为 $AA_1//CC_1$，且 $AA_1 \not\subset$ 平面 BB_1C_1C，$CC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C，

所以 $AA_1//$ 平面 BB_1C_1C，

所以 AD 即为直线 AA_1 到平面 BB_1C_1C 的距离，

且 $AD=\sqrt{3}$，

故答案为：$45°$，$\sqrt{3}$

14.【答案】1

【分析】根据图像求得函数的解析式为 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$，进而利用解析式求解.

【详解】解:由图像可知，函数的最小值为 $f(x)_{\min}=-\sqrt{2}$，故 $A=\sqrt{2}$，

$T=4\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=1$，

再将点 $\left(\frac{3\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$ 代入解析式得 $-\sqrt{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)$，解得 $\varphi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$，

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，

所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$，

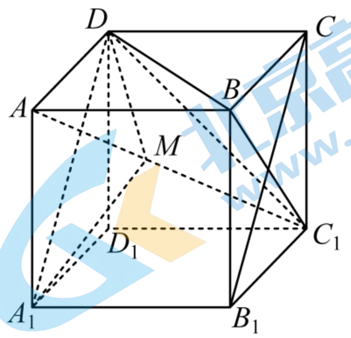
所以 $f(0)=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

故答案为：1

15.【答案】①②④

【分析】平面 A_1DM 与平面 A_1B_1CD 为同一平面,证明 $B_1C\perp$ 平面 A_1B_1CD 即可判断①；由证明平面 $A_1BD//$ 平面 B_1D_1C 判断②；连接 AD_1 交 A_1D 于点 O,当 $OM\perp AC_1$ 时可得 $AD_1\perp OM$,利用相似可得 $\frac{OM}{C_1D_1}=\frac{OA}{AC_1}$,进而求得 $\triangle A_1DM$ 的最小面积,即可判断③；分别判断点 M 从 AC_1 的中点向着点 A 运动的过程中, S_1、S_2 的范围,进而判断④.

【详解】连接 B_1C , BC_1，



①设平面 A_1B_1CD 与对角线 AC_1 交于 M,

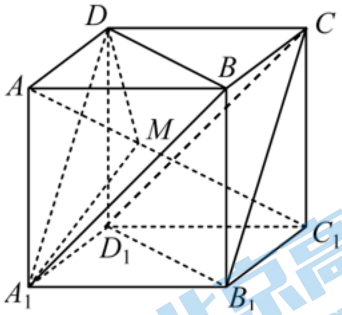
由 $B_1C\perp BC_1$, $DC\perp BC_1$,

且 $B_1C\subset$ 平面 A_1B_1CD ， $CD\subset$ 平面 A_1B_1CD ，且 $B_1C\cap CD=C$ ，

所以 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD ，即 $BC_1\perp$ 平面 A_1DM ，

所以存在点 M，使得平面 $A_1DM\perp$ 平面 BC_1D，所以①正确；

②连接 BD , B_1D_1,



由 $BD\,//\,B_1D_1$ ， $BD\not\subset$ 平面 CB_1D_1 ， $B_1D_1\subset$ 平面 CB_1D_1 ，

所以 $BD//$ 平面 CB_1D_1 ，同理由 $A_1D//B_1C$ 可得 $A_1D//$ 平面 CB_1D_1 ，

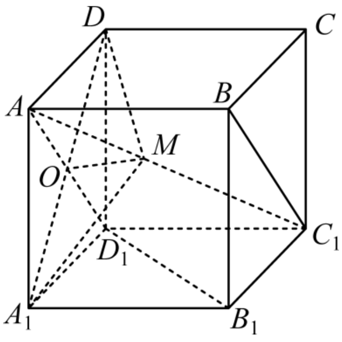
又 $A_1D\cap BD=D$ ， $A_1D\subset$ 平面 A_1DB ， $DB\subset$ 平面 A_1DB ，

所以平面 $A_1DB//$ 平面 CB_1D_1 ，

设平面 A_1DB 与 AC_1 交于点 M，则 $DM\subset$ 平面 A_1DB ，

所以 $DM//$ 平面 CB_1D_1 ，所以②正确；

③连接 AD_1 交 A_1D 于点 O,过 O 点作 $OM\perp AC_1$,



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

由① $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD ，同理可证 $AD_1\perp$ 平面 ABC_1D_1 ,

且 $OM\subset$ 平面 ABC_1D_1 ,

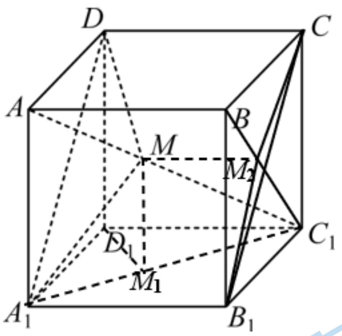
所以 $AD_1\perp OM$,所以 OM 为异面直线 A_1D 与 AC_1 的公垂线,

根据 $\triangle AOM\backsim\triangle AC_1D_1$,所以 $\dfrac{OM}{C_1D_1}=\dfrac{OA}{AC_1}$,

即 $OM=\dfrac{OA\cdot C_1D_1}{AC_1}=\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

此时 $\triangle A_1DM$ 的面积为 $S_{\triangle A_1DM}=\dfrac{1}{2}\times A_1D\times OM=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以③不正确；



④设点 M 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的正投影为 M_1，在平面 BB_1C_1C 的正投影为 M_2

如图，因为 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

则 AC_1 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的射影为 A_1C_1，

由 $M\in AC_1$，则 $M_1\in A_1C_1$，

故在点 M 从 AC_1 的中点向着点 A 运动的过程中，

点 M_1 也从 A_1C_1 的中点向着点 A_1 运动.

由 $MM_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $MM_1//AA_1$，

故当 M 为 AC_1 中点时， 正投影 M_1 也为 AC_1 中点，

此时 $\triangle A_1DM$ 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的正投影的面积 $S_1=S_{\triangle A_1D_1M_1}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$，

因此，在点 M 从 AC_1 的中点向着点 A 运动的过程中，

$\triangle A_1D_1M_1$ 的面积即 S_1 从 1 减少到趋向于 0,即 $S_1\in(0,1)$，

同理，在点 M 从 AC_1 的中点向着点 A 运动的过程中，

点 M_2 也从 BC_1 的中点向着点 B 运动， $\triangle A_1D_1M_2$ 的面积即 S_2 从 0 开始增加，

当 M 与 A 重合时， 正投影 M_2 与 B 重合，

此时 $\triangle A_1DM$ 在平面 BB_1C_1C 的正投影的面积 $S_2=S_{\triangle B_1CB}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$，

所以 $S_2\in(0,2)$，

故在此过程中,必存在某个点 M 使得 $S_1=S_2$,所以④正确,

故答案为：①②④.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 45 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$\sqrt{3}$

（2）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】（1）先求 $\sin\angle ADB$，然后通过正弦定理即可得结果；

（2）通过余弦定理解出三角形，再计算面积即可.

【小问 1 详解】

由题意得 $\sin\angle ADB=\sqrt{1-\cos^2\angle ADB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

在 $\triangle ADB$ 中，由正弦定理 $\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，得 $AD=\dfrac{\sin B}{\sin\angle ADB}\cdot AB=\sqrt{3}$

【小问 2 详解】

由余弦定理 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，

得 $BC^2-2\sqrt{3}BC+3=0$，解得 $BC=\sqrt{3}$.

因为 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $C=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $CD=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{2}$.

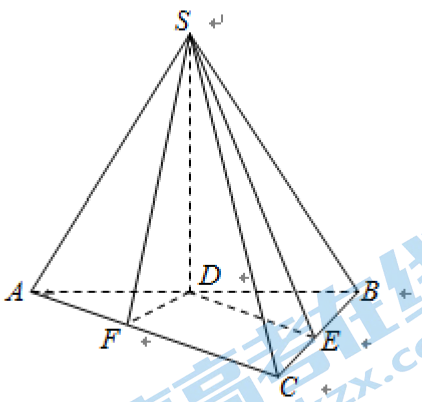
故 $\triangle ACD$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17.【答案】（1）见解析（2）见解析

【分析】（1）由中位线知：$DE//AC$，可证：$DE//$平面 SAC；

（2）由 $SD\perp$平面 ABC，知 $SD\perp AC$，又 $SF\perp AC$，SD 与 SF 交于点 S，所以，$AC\perp$平面 SFD，然后再根据面面垂直的判定定理，即可证明出结果.

【详解】



在三角形 ABC，由中位线定理知：$DE//AC$，又 $DE\not\subset$ 面 SAC，$AC\subset$ 面 SAC

所以 $DE//$平面 SAC;

（2）由 $SD\perp$平面 ABC，知 $SD\perp AC$，又 $SF\perp AC$，SD 与 SF 交于点 S，

所以，$AC\perp$平面 SFD，所以，平面 $SAC\perp$平面 SFD

【点睛】本题主要考查了线面平行和面面垂直的判定定理，熟练掌握判定定理的条件是解决本题的关键.

18.【答案】(1)证明见解析

(2) $\frac{\pi}{3}$

(3)能垂直，证明见解析

【分析】(1)先证明 $MN // AC$，再利用线面垂直的判定定理即可证明；

(2)利用线线平行可得 $\angle PBA$ 是直线 PB 与直线 CD 所成角，利用面面垂直可得 $PD \perp AB$，结合已知条件可得 $PA=\sqrt{3}$，利用线面垂直可得 $AB \perp PA$，可得出 $\tan\angle PBA$ 的值，即可求解.

(3)根据题意可得 $EC // l$，利用平行的传递性，可证明 $l \perp$ 平面 $ABCD$.

【小问 1 详解】

连结 PC，交 DE 于 N，连接 MN，

$\because$ $PDCE$ 为矩形，$\therefore$ N 为 PC 的中点，

在 $\triangle PAC$ 中，M，N 分别为 PA，PC 的中点，

$\therefore MN // AC$，

因为 $MN \subset$ 面 MDE，$AC \not\subset$ 面 MDE，

所以 $AC //$ 平面 MDE.

【小问 2 详解】

$\because \angle BAD=\angle ADC=90°$，$\therefore AB // CD$，

$\therefore \angle PBA$ 是直线 PB 与直线 CD 所成角.

$\because$ $PDCE$ 为矩形，$\therefore PD \perp CD$，

$\because$ 平面 $PDCE \perp$ 平面 $ABCD$，

又 $PD \subset$ 平面 $PDCE$，平面 $PDCE \cap$ 平面 $ABCD=CD$，

$\therefore PD \perp$ 平面 ABC，

$\because AD, AB \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PD \perp AD$，$PD \perp AB$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PDA$ 中，$\because AD=1$，$PD=\sqrt{2}$，$\therefore PA=\sqrt{3}$，

$\because \angle BAD=90°$，$\therefore AB \perp AD$，

又 $\because PD \perp AB$，$PD \cap AD=D$，$PD \subset$ 平面 PAD，$AD \subset$ 平面 PAD，

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD，$\because PA \subset$ 平面 PAD，$\therefore AB \perp PA$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，$\because AB=1$，$\therefore \tan\angle PBA=\frac{PA}{AB}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle PBA=\frac{\pi}{3}$，从而直线 PB 与直线 CD 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$；

【小问 3 详解】

l 与平面 $ABCD$ 垂直. 证明如下：

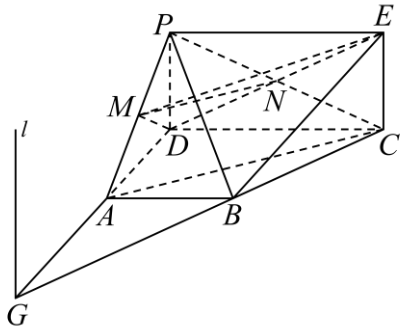
$\because$ $PDCE$ 为矩形，$\therefore EC // PD$，

$\because PD \subset$ 平面 PAD， $EC \not\subset$ 平面 PAD， $\therefore EC //$ 平面 PAD，

$EC \subset$ 平面 EBC， $\because$ 平面 $PAD \cap$ 平面 $EBC = l$，

$\therefore EC // l$，则 $l // PD$，

由（2）可知 $PD \perp$ 平面 $ABCD$， $\therefore l \perp$ 平面 $ABCD$.



19. 【答案】（1）见解析；（2）见解析；（3）一定有偶数，理由见解析

【分析】

（1）由题意结合新概念 $A-B$ 可直接得解；

（2）先证明 $c_i=0$、 $c_i=1$ 时，均有 $\left||a_i-c_i|-|b_i-c_i|\right|=|a_i-b_i|$，由新概念运算即可得证；

（3）设 $d(A,B)=k$， $d(A,C)=l$， $d(B,C)=h$，由（2）可得 $d(A,B)=d(0,B-A)=k$，

$d(A,C)=d(0,C-A)=l$， $d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$，设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|=1$ 成立的 i 的个数，即可得 $h=l+k-2t$，即可得解.

【详解】（1）由题意可得，所有满足要求的 A， B 为：

$A=(0,0)$， $B=(0,1)$；

$A=(0,1)$， $B=(0,0)$；

$A=(1,0)$， $B=(1,1)$；

$A=(1,1)$， $B=(1,0)$.

（2）证明：令 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$， $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，

对 $i=1,2,\cdots,n$，

当 $c_i=0$ 时，有 $\left||a_i-c_i|-|b_i-c_i|\right|=|a_i-b_i|$；

当 $c_i=1$ 时，有 $\left||a_i-c_i|-|b_i-c_i|\right|=|1-a_i-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$.

所以 $d(A-C,B-C)$

$=\left||a_1-c_1|-|b_1-c_1|\right|+\left||a_2-c_2|-|b_2-c_2|\right|+\cdots+\left||a_n-c_n|-|b_n-c_n|\right|$

$=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|=d(A,B)$.

（3） $\forall A$， B， $C \in S_n$， $d(A,B)$， $d(A,C)$， $d(B,C)$ 三个数中一定有偶数.

理由如下：

设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$， $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，

$d(A,B)=k$， $d(A,C)=l$， $d(B,C)=h$，

记 $0=(0,0,\cdots0)\in S_n$，由（2）可知: $d(A,B)=d(A-A,B-A)=d(0,B-A)=k$，

$d(A,C)=d(A-A,C-A)=d(0,C-A)=l$， $d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$，

所以 $|b_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 k， $|c_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中 1 的个数为 l.

设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|=1$ 成立的 i 的个数，则 $h=l+k-2t$.

由此可知， k， l， h 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A,B)$， $d(A,C)$， $d(B,C)$ 三个数中一定有偶数.

【点睛】本题考查了新概念在推理与证明中的应用，考查了逻辑推理能力和新概念的理解能力，属于中档题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜

京考一点通