2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x\,|\,|x+1|\geqslant 2\}$，$B=\{x\,|\,x^2+2x-8<0\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{x\,|\,-4<x<2\}$　　B.$\{x\,|\,1\leqslant x<2\}$

C.$\{x\,|\,-4<x\leqslant -3$ 或 $1\leqslant x<2\}$　　D.$\{x\,|\,-4<x<-3$ 或 $1<x<2\}$

2.若 $z(1-i)=2+i$，则 $z-\bar{z}=$

A.1　　B.3i　　C.$-3i$　　D.i

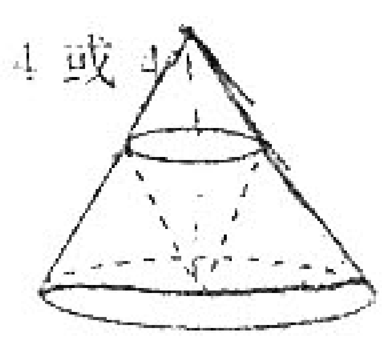
3.在边长为2的正三角形 ABC 中，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EB}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=$

A.$-\frac{9}{4}$　　B.$\frac{3}{2}$　　C.$-\frac{3}{2}$　　D.$\frac{9}{4}$

4.已知角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边过点 $(3,m)$，若 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则实数 m 的值为

A.-3　　B.4　　C.-3 或 3　　D.-4 或 4

5.如图，一种工业部件是由一个圆台挖去一个圆锥所构成的.已知圆台的上、下底面直径分别为2 cm和4 cm，且圆台的母线与底面所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，圆锥的底面是圆台的上底面，顶点在圆台的下底面上，则该工业部件的体积为



A.2π　　B.6π　　C.$3\sqrt{2}\pi$　　D.$9\sqrt{2}\pi$

6.若函数 $y=f(x)$ 同时满足：①$f(x)>0$；②函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=\log_a f(x)(a>1)$ 的单调性一致，则称函数 $y=f(x)$ 为"鲁西西函数".例如：函数 $f(x)=e^{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)=x^2$ 同样在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.若函数 $h(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 为"鲁西西函数"，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为

A.$\frac{1}{e^e}$　　B.e^e　　C.$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$　　D.$e^{\frac{1}{e}}$

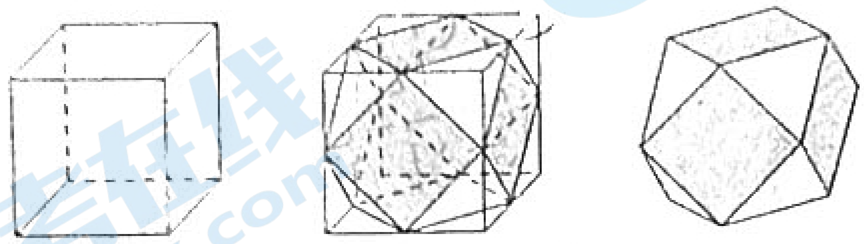
7.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_n<0$，点 (a_n,S_n) 在曲线 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ 上，则 $S_{10}=$

A.-55　　B.-110　　C.-10　　D.-5

8.已知直线 $l:y=x-\frac{p}{2}$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 A、B 两点，若△AOB(O 为坐标原点)的面积为$\sqrt{2}$，则 $p=$

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.1　　C.2　　D.$\sqrt{2}$

9.如图，将正方体沿交于同一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，如此共可截去八个三棱锥，截取后的剩余部分称为"阿基米德多面体"，它是一个24等边半正多面体.从它的棱中任取两条，则这两条棱所在的直线为异面直线的概率为



A.$\frac{10}{23}$　　B.$\frac{12}{23}$　　C.$\frac{29}{69}$　　D.$\frac{50}{69}$

10.将函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，若$\left(0,\frac{\pi}{\omega}\right)$是 $g(x)$ 的一个单调递增区间，且 $g(x)$ 在$(0,\pi)$上有 5 个零点，则 $\omega=$

A.1　　B.5　　C.9　　D.13

11.已知双曲线 $C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的上、下焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_2 且与一条渐近线垂直的直线 l 与 C 的上支交于点 P，且$|PF_1|=3b-2a$，则双曲线 C 的离心率为

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D.$\sqrt{13}$

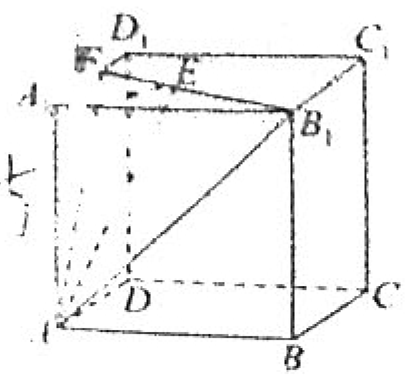
12.已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$ 为奇函数，且对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+4)=f(-x)$ 恒成立，则以下结论：① $f(x)$ 为奇函数；② $f(3)=0$；③ $f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$；④ $f(2\ 023)=0$.其中正确的为

A.①②④　　B.②③　　C.②③④　　D.①③④

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.若实数 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y-1\geqslant0,\\x+2y-4\leqslant0,\\y\geqslant0,\end{cases}$则 $z=x+y$ 的最大值为______.

14.$(x+3\sqrt{x}+2)^4$ 的展开式中，含 x 的项的系数为______.



15.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，若 F 为棱 A_1D_1 上动点，E 为线段 B_1F 上的点，且 $AE\perp B_1F$，若 AE 与平面 A_1B_1F 所成角的正切值为$\frac{5}{3}$，则三棱锥 $A-A_1B_1F$ 的外接球表面积为______.

16.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$S_2=3$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*,\\2a_n+1,n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$则 $S_{[illegible]}=$______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）已知 a,b,c 分别为△ABC 的内角 A,B,C 的对边，$B=\frac{2\pi}{3}$，且 $\frac{a+c\sin A}{\cos C}=\frac{c\cos A}{\sin C}$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若△ABC 的外接圆面积为 3π，求 BC 边上的中线长

18.（12 分）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，平面 $PAB\perp$ $ABCD$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点，三棱锥 为

（1）证明：$AE\perp$ 平面 PCD；

（2）求二面角 $A-CE-B$ 的正弦值

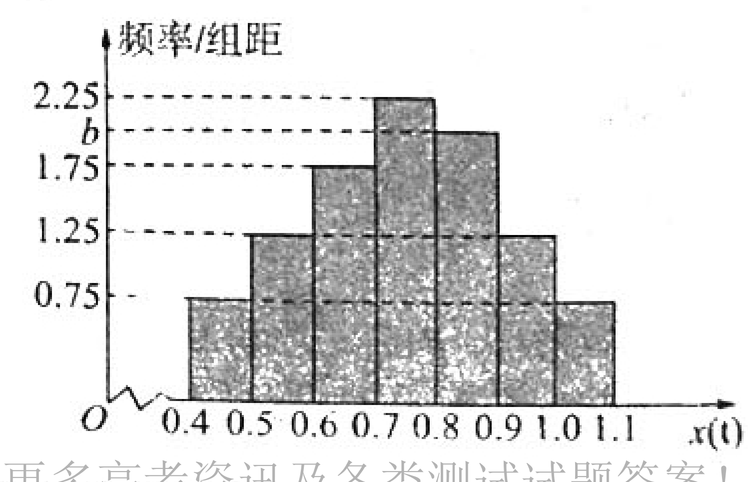
19.（12 分）某乡镇在实施乡村振兴的进程中，大力推广科学种田，引导广大农户种植优良品种，进一步推动当地农业发展，不断促进农业增产农民增收.为了了解某新品种水稻的产量情况，现从种植该新品种水稻的不同自然条件的田地中随机抽取 100 亩，统计其亩产量 x（单位：吨(t)），并以此为样本绘制了如图所示的频率分布直方图.

（1）求这 100 亩水稻平均亩产量的估计值（同一组中的数据用该组区间的中点值代表，精确到小数点后两位）；

（2）若该品种水稻的亩产量 x 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 为（1）中平均亩产量的估计值，$\sigma\approx0.15$.若该县共种植 10 万亩该品种水稻，试用正态分布估计亩产量不低于 0.6 t 的亩数；

（3）将频率视为概率，若从所有种植该品种水稻的田地中随机抽取 3 亩进行分析，设其亩产量不低于 0.8 t 的亩数为 ξ，求随机变量 ξ 的期望.

附：若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$.



20.(12 分)已知 F_1、F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，A 为椭圆上的动点(异于 C 的左、右顶点)，$\triangle F_1AF_2$ 的周长为 6，且 $\triangle F_1AF_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若 B 为直线 AF_1 与椭圆 C 的另一个交点，求 $\triangle ABF_2$ 内切圆面积的最大值.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=2xe^{2x}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小值；

(2)若对 $\forall x>0$，$f(x)\geqslant(ax+1)\ln(ax)-2x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ (t 为参数，$0<\alpha<\pi$)，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sin 2\beta,\\ y=2(\sin\beta+\cos\beta),\end{cases}$ (β 为参数)，以坐标原点 O 为极点，以 x 轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C_2 的极坐标方程；

(2)若点 $P(2,0)$，直线 C_1 与曲线 C_2 交于 A，B 两点，且 $|PA|=2|PB|$，求直线 C_1 的普通方程.

23.[选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+a|+\left|x-\frac{1}{a}\right|(a\neq 0)$.

(1)当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant x+2$ 的解集；

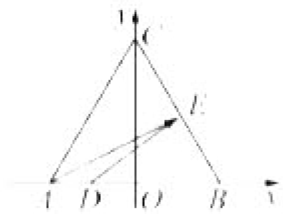
(2)求 $f(x)$ 的最小值.

理科数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】$A=\{x|x<-3$ 或 $x>1\}$，$B=\{x|-4<x<2\}$，$A\cap B=\{x|-4<x<-3$ 或 $1<x<2\}$.故选 C.

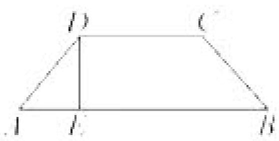
2.B 【解析】$z=\frac{2+i}{1-i}=\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，所以 $z-\bar{z}=3i$.故选 B.

3.D 【解析】以 AB 中点 O 为坐标原点，分别以 AD，OC 所在直线为 x 轴，y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,\sqrt{3})$，$D\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\vec{AE}=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\vec{DE}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故 $\vec{AE}\cdot\vec{DE}=\frac{9}{4}$.故选 D.



4.D 【解析】$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{3}{5}$，所以 $\sqrt{9+m^2}=5$，解得 $m=\pm4$.故选 D.

5.A 【解析】如图，圆台的轴截面为等腰梯形，$\angle DAB$ 即为圆台的母线与底面所成的角，故 $\angle DAB=\frac{\pi}{4}$，易得 $AE=1$，等腰梯形 $ABCD$ 的高 $DE=1$，所以圆台和圆锥的高均为 1，该工业部件的体积 $V=V_{圆台}-V_{圆锥}=\frac{1}{3}\times1\times(\pi+\sqrt{\pi\times4\pi}+4\pi)-\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times1=2\pi$.故选 A.



6.D 【解析】设 $p(x)=\ln x^{\frac{1}{x}}=\frac{\ln x}{x}$，由题可知 $p(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的单调区间，$p'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，易得 $p(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{max}=h(e)=e^{\frac{1}{e}}$.故选 D.

7.A 【解析】$S_1=a_1=-\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}a_1$，得 $a_1=-1$ 或 $a_1=0$(舍)，$S_n=-\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{2}a_n$，故 $S_{n-1}=-\frac{1}{2}a_{n-1}^2+\frac{1}{2}a_{n-1}(n\geqslant2)$，两式作差得：$a_n=-\frac{1}{2}a_n^2+\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}a_{n-1}^2-\frac{1}{2}a_{n-1}$，整理得 $a_n+a_{n-1}=-(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$，因为 $a_n<0$，故 $a_n+a_{n-1}<0$，所以 $a_n-a_{n-1}=-1$，所以 $\{a_n\}$ 是以 -1 为首项，以 -1 为公差的等差数列，所以 $S_{10}=(-1)\times10+\frac{10\times9}{2}\times(-1)=-55$.故选 A.

8.D 【解析】由题直线 l 过抛物线 C 的焦点，联立方程得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=3p$，则 $|AB|=x_1+x_2+p=4p$，又原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}p$，故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times4p\times\frac{\sqrt{2}}{4}p=\sqrt{2}$，解得 $p=\sqrt{2}$.故选 D.

9.B 【解析】当一条直线位于上(或下)底面另一条不在底面时，有 $10\times8=80$ 对异面直线，当两条直线都位于上下底面时，有 $4\times2=8$ 对异面直线，当两条直线都不在上、下底面时，有 $7\times8=56$ 对异面直线，所以两条棱所在的直线为异面直线的概率 $P=\frac{80+56+8}{C_{24}^2}=\frac{12}{23}$.故选 B.

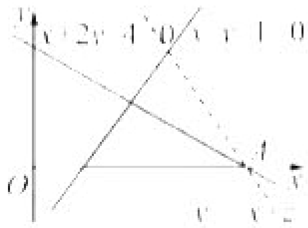
10.B 【解析】$g(x)=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sin\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{2}\right)$，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，因为 $\left(0,\frac{\pi}{\omega}\right)$ 是 $g(x)$ 的一个单调递增区间，所以 $g(0)=-1$，即 $-\frac{\omega\pi}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\omega=-4k+1$，$k\in\mathbf{Z}$.又 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 5 个零点，则 $2\pi<\frac{\omega\pi}{2}\leqslant3\pi$，即 $4<\omega\leqslant6$，所以 $\omega=5$.故选 B.

11.C 【解析】由题，设焦距为 $2c$，不妨取 C 的一条渐近线 $y=-\frac{a}{b}x$，则直线 $l:y=\frac{b}{a}x-c$，设垂足为 A，易知 $|AO|=a$(O 为坐标原点)，$|AF_2|=b$，因为 $|PF_1|=3b-2a$，由双曲线的定义可知 $|PF_2|=3b$，设线段 PF_2 的中点为 E，则 $|F_2E|=\frac{3b}{2}$，$|OE|=\frac{3b}{2}-a$，所以 $|AE|=|F_2E|-|F_2A|=\frac{b}{2}$，在 Rt$\triangle AEO$ 中，$|OE|^2=|OA|^2+|AE|^2$，即 $\left(\frac{3b}{2}-a\right)^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$，化简得 $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$，即

$\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{e^2-1}=\frac{3}{2}$,解得 $e=\frac{\sqrt{13}}{2}$,故选 C.

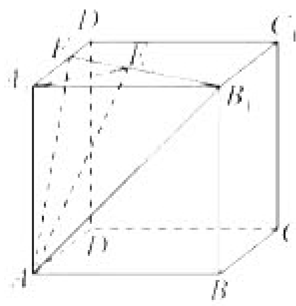
12.C 【解析】因为 $f(x+1)$ 为奇函数,所以 $f(1-x)=-f(1+x)$,故 $\begin{cases} f(x+2)=-f(-x), \\ f(2-x)=-f(x), \end{cases}$ 又 $f(x+4)=f(-x)$,所以 $f(2+x)=f(2-x)$,故 $f(x+2)=-f(-x)=-f(x)$,所以 $f(-x)=f(x)$,$f(x)$ 为偶函数,①错误;$f(x+1)$ 为奇函数,所以 $f(1)=0$,$f(2+x)=f(2-x)$,所以 $f(3)=f(1)=0$,②正确;$f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$,又 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{5}{2}\right)$,③正确;又 $f(x+4)=f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数,$f(2\,023)=f(505\times4+3)=f(3)=0$,④正确.故选 C.

13.4 【解析】可行域如图所示,当直线 $y=-x+z$ 过点 $A(4,0)$ 时,z 取得最大值 4.



14.248 【解析】由题 $x\geq0$,$(x+3\sqrt{x}+2)^4=(1+\sqrt{x})^4\times(2+\sqrt{x})^4=(C_4^0+C_4^1x^{\frac{1}{2}}+C_4^2x+C_4^3x^{\frac{3}{2}}+C_4^4x^2)\times(2^4C_4^0+2^3C_4^1x^{\frac{1}{2}}+2^2C_4^2x+2C_4^3x^{\frac{3}{2}}+C_4^4x^2)$,含 x 的项的系数为 $C_4^2 2^4 C_4^0+C_4^1 2^3 C_4^1+C_4^0 2^2 C_4^2=248$.

15.41π 【解析】由题,连接 A_1E,$\angle AEA_1$ 即为 AE 与平面 A_1B_1F 所成角,且 $\tan\angle AEA_1=\frac{A_1A}{A_1E}=\frac{4}{A_1E}$,当 $\tan\angle AEA_1=\frac{5}{3}$ 时,得 $A_1E=\frac{12}{5}$,设 $A_1F=x\ (0<x<4)$,$A_1F\times A_1B_1=B_1F\times A_1E$,即 $4x=\frac{12}{5}\times\sqrt{x^2+16}$,解得 $x=3$,所以 $A_1F=3$,易知三棱锥 $A-A_1B_1F$ 的外接球即为分别以 3,4,4 为棱长的长方体的外接球,设其半径为 R,则 $R=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2+4^2}=\frac{\sqrt{41}}{2}$,所以三棱锥 $A-A_1B_1F$ 的外接球表面积 $S=4\pi R^2=41\pi$.



16.2 000 【解析】由 $a_1+a_2=3$,$a_2=a_1+1$ 得 $a_1=1$,$a_2=2$,又 $a_{2k+1}=2a_{2k}+1$,$a_{2k+2}=a_{2k+1}+1$,得 $a_{2k+2}=2a_{2k}+2$,即 $a_{2k+2}+2=2(a_{2k}+2)$,所以当 $k\geq1$ 时 $\{a_{2k}+2\}$ 是以 4 为首项,2 为公比的等比数列,故 $a_{2k}+2=4\times2^{k-1}=2^{k+1}$,所以 $a_{2k}=2^{k+1}-2$,又 $a_{2k+1}=2a_{2k}+1=2^{k+2}-3$,所以当 $k\geq1$ 时,$\{a_{2k-1}+3\}$ 是以 4 为首项,2 为公比的等比数列;$S_{2k}=a_1+(a_1+1)+a_3+(a_3+1)+\cdots+a_{2k-1}+(a_{2k-1}+1)=2(a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1})+k=\frac{8(1-2^k)}{1-2}-5k=2^{k+3}-5k-8$,所以 $S_{16}=2^{11}-5\times8-8=2\,000$.

17.解:(1)由正弦定理得 $\frac{\sin A+\sin C\sin A}{\cos C}=\frac{\sin C\cos A}{\sin C}$, ………………………………………… 1 分

因为 $0<C<\pi$,所以 $\sin C>0$,

所以 $\sin A+\sin A\sin C=\cos A\cos C$,

即 $\sin A=\cos A\cos C-\sin A\sin C=\cos(A+C)=-\cos B=\frac{1}{2}$, ………………………………………… 3 分

又 $0<A<\frac{\pi}{3}$,所以 $A=\frac{\pi}{6}$,

所以 $C=\pi-A-B=\frac{\pi}{6}$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $A=C=\frac{\pi}{6}$,设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,则 $\pi R^2=3\pi$,得 $R=\sqrt{3}$, ………………………… 6 分

所以 $\frac{a}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{b}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}$,解得 $a=c=\sqrt{3}$,$b=3$. ………………………… 9 分

设 BC 中点为 D,则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, ………………………………………… 10 分

所以 $|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2bc\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{21}{4}$,

所以 BC 边上的中线 $AD=\frac{\sqrt{21}}{2}$. ……………………………………………… 12 分

18.(1)证明:因为 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,

所以 $AD\perp AB$.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$,$AD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AD\perp$ 平面 PAB.

又 $PA\subset$ 平面 PAB,所以 $PA\perp AD$.

同理可得 $PA\perp AB$.

因为 $AB,AD\subset$ 平面 $ABCD$,$AB\cap AD=A$,所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………… 2 分

因为 E 为 PD 的中点,所以 $V_{P-ACE}=V_{E-ACD}=\frac{2}{3}$,

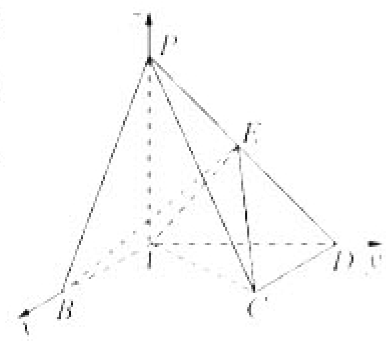
即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{1}{2}PA=\frac{2}{3}$,解得 $PA=2$. ……………………………………………… 4 分

所以 $AE\perp PD$.

因为 $CD\perp AD$,所以 $CD\perp$ 平面 PAD,故 $CD\perp AE$,

又 $CD,PD\subset$ 平面 PCD,$CD\cap PD=D$,所以 $AE\perp$ 平面 PCD. ……………………………………………… 5 分

(2)解:由(1)知 $PA\perp AB$,$PA\perp AD$,$AB\perp AD$,故以 A 为坐标原点,分别以 AB,AD,AP 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系如图所示; ……………………………………………… 6 分



则 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,2,0)$,$E(0,1,1)$, ……………………………………………… 7 分

故 $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$,设平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2y=0,\\ y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,解得 $y=-1$,$z=1$,

所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$. ……………………………………………… 9 分

同理可得平面 BCE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$. ……………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

设二面角 $A-CE-B$ 的平面角为 θ,$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,

所以二面角 $A-CE-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. ……………………………………………… 12 分

19.解:(1)由题:$(0.75\times 2+1.25\times 2+1.75+2.25+b)\times 0.1=1$,解得 $b=2$. ……………………………………………… 2 分

所以这 100 亩水稻平均亩产量的估计值为:$(0.45\times 0.75+0.55\times 1.25+0.65\times 1.75+0.75\times 2.25+0.85\times 2+0.95\times 1.25+1.05\times 0.75)\times 0.1\approx 0.75$. ……………………………………………… 4 分

(2)由(1)知 $\mu\approx 0.75$,又 $\sigma\approx 0.15$,

所以 $P(x\geq 0.6)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P(0.75-0.15\leq x\leq 0.75+0.15)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 0.682\,6=0.841\,3$, ……………………………………………… 6 分

所以亩产量不低于 0.6 t 的亩数的估计值为 $100\,000\times 0.841\,3=84\,130$ 亩. ……………………………………………… 8 分

(3)每亩水稻亩产不低于 0.8 t 的概率为 $\frac{2}{5}$,则随机变量 $\xi\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$ 服从二项分布, ……………………………………………… 10 分

所以 $E(\xi)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ……………………………………………… 12 分

20.解:(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$,由椭圆的定义及 $\triangle F_1AF_2$ 的周长得 $2a+2c=6$,即 $a+c=3$①, ……………………………………………… 1 分

由椭圆的性质可知,当点 A 为短轴的端点时,$\triangle F_1AF_2$ 的面积最大,

此时 $S_{\triangle F_1AF_2}=\frac{1}{2}\times 2c\times b=\sqrt{3}$②，…………………………………………………………………… 2 分

又 $a^2=b^2+c^2$③，…………………………………………………………………………………… 3 分

综合①②③解得：$a=2,b=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)设 $\triangle ABF_2$ 内切圆半径为 r，因为 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}(|AF_2|+|BF_2|+|AB|)\cdot r=4r$，所以当 $\triangle ABF_2$ 面积最大时，$\triangle ABF_2$ 的内切圆面积最大. ……………………………………………………………………………………………… 6 分

设 $AB:x=my-1$，与椭圆 C 的方程联立得 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，…………………………………… 7 分

$S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2}+\frac{36}{3m^2+4}}=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3(m^2+1)+1}$. ………………… 9 分

令 $t=\sqrt{m^2+1}(t\geq 1)$，则 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{12t}{3t^2+1}=\frac{12}{3t+\frac{1}{t}}$，……………………………………………… 10 分

设 $f(t)=3t+\frac{1}{t}(t\geq 1)$，则 $f'(t)=3-\frac{1}{t^2}>0$，所以 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $t=1$ 即 $m=0$ 时，$\triangle ABF_2$ 面积最大，最大值为 3，

此时 $r=\frac{3}{4}$，所以 $\triangle ABF_2$ 内切圆面积的最大值 $S=\pi\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9\pi}{16}$. ……………………………… 12 分

21.解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=2e^{2x}(2x+1)$，

故当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ………… 2 分

所以 $f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 时取得极小值 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{e}$，这个极小值即为 $f(x)$ 的最小值，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)对 $\forall x>0$，$f(x)\geq(ax+1)\ln(ax)-2x$ 恒成立，即 $2xe^{2x}+2x\geq ax\ln(ax)+\ln(ax)$ 恒成立，

即 $2xe^{2x}+2x\geq\ln(ax)e^{\ln(ax)}+\ln(ax)$ 恒成立，…………………………………………………………… 6 分

令 $g(x)=xe^x+x$，$g'(x)=e^x(x+1)+1$，故当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$g(2x)=2xe^{2x}+2x>0$，$g[\ln(ax)]=\ln(ax)e^{\ln(ax)}+\ln(ax)$，………………………………………… 7 分

当 $\ln(ax)\leq 0$ 时，$g[\ln(ax)]\leq 0$，$2xe^{2x}+2x\geq\ln(ax)e^{\ln(ax)}+\ln(ax)$ 恒成立；

当 $\ln(ax)>0$ 时，由 $g(2x)\geq g[\ln(ax)]$ 得 $2x\geq\ln(ax)$，即 $2x-\ln(ax)\geq 0$ 恒成立. ……………………… 9 分

设 $h(x)=2x-\ln(ax)$，$h'(x)=2-\frac{1}{x}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)\geq h\left(\frac{1}{2}\right)=1-\ln\frac{a}{2}$，…………………………………………………………………… 11 分

只需 $1-\ln\frac{a}{2}\geq 0$，即 $a\leq 2e$.

由题易得 $a>0$，

所以实数 a 的取值范围为 $(0,2e]$. ………………………………………………………………………… 12分

22. **解**：(1)因为曲线 C_2 的普通方程为 $y^2=4x$，

$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，所以 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，即 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$，

所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$. ………………………………………………………… 4分

(2)设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，

将 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ 代入 $y^2=4x$ 得 $t^2\sin^2\alpha-4t\cos\alpha-8=0$，

由题知 $\sin^2\alpha\neq0$，$\Delta=16\cos^2\alpha+32\sin^2\alpha=16(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+16\sin^2\alpha=16+16\sin^2\alpha>0$，

所以 $t_1+t_2=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$，$t_1t_2=\dfrac{-8}{\sin^2\alpha}$. ………………………………………………………………… 6分

因为 $|PA|=2|PB|$，所以 $|t_1|=2|t_2|$，

又 $t_1t_2=\dfrac{-8}{\sin^2\alpha}<0$，所以 $t_1=-2t_2$，故 $t_2=\pm\dfrac{2}{\sin\alpha}$. ………………………………………………… 8分

当 $t_2=\dfrac{2}{\sin\alpha}$ 时，代入 $t_1+t_2=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ 得 $\tan\alpha=-2$，

此时 C_1 的普通方程为 $y=-2(x-2)$，即 $2x+y-4=0$.

当 $t_2=-\dfrac{2}{\sin\alpha}$ 时，代入 $t_1+t_2=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ 得 $\tan\alpha=2$，

此时 C_1 的普通方程为 $y=2(x-2)$，即 $2x-y-4=0$，

所以直线 C_1 的普通方程为 $2x+y-4=0$ 或 $2x-y-4=0$. ………………………………………………… 10分

23. **解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)\le x+2$ 等价于 $|x+1|+|x-1|\le x+2$，即：

$\begin{cases}x\le-1,\\ -2x\le x+2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<x<1,\\ 2\le x+2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\ge1,\\ 2x\le x+2.\end{cases}$ ………………………………………… 2分

解得 $x\in\varnothing$ 或 $x\in[0,1)$ 或 $x\in[1,2]$，

所以不等式 $f(x)\le x+2$ 的解集为 $[0,2]$. ………………………………………………………………… 4分

(2) $f(x)=|x+a|+\left|x-\dfrac{1}{a}\right|\ge\left|(x+a)-\left(x-\dfrac{1}{a}\right)\right|=\left|a+\dfrac{1}{a}\right|(a\neq0)$，……………………………… 5分

当 $a>0$ 时，$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=a+\dfrac{1}{a}\ge2\sqrt{a\times\dfrac{1}{a}}=2$，当且仅当 $a=1$ 时，等号成立；……………………………… 7分

当 $a<0$ 时，$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=(-a)+\left(-\dfrac{1}{a}\right)\ge2\sqrt{(-a)\times\left(-\dfrac{1}{a}\right)}=2$，当且仅当 $a=-1$ 时，等号成立. ………………… 9分

所以 $f(x)\ge2$，所以 $f(x)$ 的最小值为 2. …………………………………………………………………… 10分