# 北京市第一六六中学2023-2024学年第一学期9月阶段性诊断试题

## 高三年级　数学学科（时长：120 分钟）

班级：__________　姓名：__________

| 考查目标 |
| --- |
| **知识：** 集合与逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、解三角形、计数原理、二项式定理、概率统计、解析几何、立体几何 |
| **能力：** 空间想象能力、抽象概括能力、运算求解能力、推理论证能力、数据处理能力、数学建模能力 |

一、选择题（）

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x<5\}$，$B=\{x|x\le 4\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-1,4]$　　B. $(-1,5)$　　C. $(-\infty,4]$　　D. $(-\infty,5)$

2. 已知角 $\alpha$ 的终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$，则 $\cos 2\alpha=$（　）

A. $-\frac{24}{25}$　　B. $-\frac{7}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $\frac{16}{25}$

3. 若 $\tan(\pi-x)=\frac{1}{2}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$（　）

A. $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$　　B. $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$　　C. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$　　D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

4. 已知函数 $f(x)=\log_2 x-x+1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)\cup(2,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

5. 下列结论正确的是（　　）

A. 若 $ac>bc$，则 $a>b$

B. 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$

C. 若 $x>-1$，则 $x+\frac{1}{x+1}>1$

D. 若 $x<0$，则 $x+\frac{1}{x}\le -2$

6. 下列函数中，是奇函数且在其定义域上为增函数的是(　　)

A. $y=\sin x$　　B. $y=x|x|$　　C. $y=\tan x$　　D. $y=x-\frac{1}{x}$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0,\\ 2^x-a, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 $a$ 的取值范围是

（A）$a<0$　　（B）$a>0$

（C）$a\leqslant 1$　　（D）$a\geqslant 1$

8. "角 $\alpha,\beta$ 的终边关于原点对称"是"$\cos(\alpha-\beta)=-1$"的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

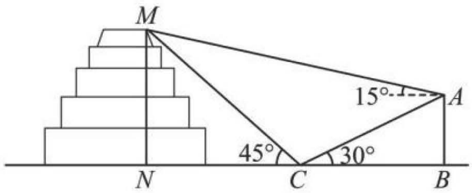
9. 将函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象在区间 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，则 $\omega$ 的最大值是（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

10. 在□$ABC$中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

11. 中国古代四大名楼鹳雀楼，位于山西省运城市永济市蒲州镇，因唐代诗人王之涣的诗作《登鹳雀楼》而流芳后世．如图，某同学为测量鹳雀楼的高度$MN$，在鹳雀楼的正东方向找到一座建筑物$AB$，高约为37m，在地面上点$C$处（$B$，$C$，$N$三点共线）测得建筑物顶部$A$，鹳雀楼顶部M的仰角分别为30°和45°，在$A$处测得楼顶部$M$的仰角为15°，则鹳雀楼的高度约为（　）




A. 60m　　B. 74m　　C. 52m　　D. 91m

12. 已知函数$f(x)=a\sin x-2\sqrt{3}\cos x$的一条对称轴为$x=-\frac{\pi}{6}$，$f(x_1)+f(x_2)=0$，且函数$f(x)$在$(x_1,x_2)$上具有单调性，则$|x_1+x_2|$的最小值为

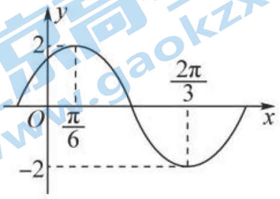
A $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

二、填空题

13. $(2x+\frac{1}{x})^4$ 展开式的常数项是________.（用数字作答）

14. 设函数 $f(x)=x+\ln x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 ________

15. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示， 求函数 $f(x)$ 的解析式____.




16. 已知命题 $p$：若 $\Delta ABC$ 满足 $\sin A=\cos B$，则 $\Delta ABC$ 是直角三角形．说明 $p$ 为假命题的一组角为 $A=$____， $B=$____.

17. 下列关于函数 $f(x)=(2x-x^2)e^x$ 的判断正确的是 ________

① $f(x)>0$ 的解集是 $\{x|0<x<2\}$；　② $f(-\sqrt{2})$ 是极小值， $f(\sqrt{2})$ 是极大值；

③ $f(x)$ 没有最小值，也没有最大值；　④ $f(x)$ 有最大值，没有最小值.

## 三、解答题

18. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$.

（1）求 $f(0)$ 的值并求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

（2）求证：当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，恒有 $f(x)\geq-\frac{1}{2}$.

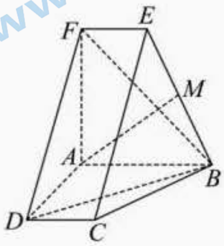
19. 已知△$ABC$ 的内角 A，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，若 $a\cos B + b\cos A = 2c\cos B$，

（1）求 $B$

（2）请指出△$ABC$ 不满足下面的哪一个条件并说明理由，根据另外两个条件，求△$ABC$ 的面积.

①$\cos A = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；②$b = 3$；③△$ABC$ 的周长为 9.

20. 如图，梯形 $ABCD$，$ABEF$ 所在的平面互相垂直，$AB \parallel CD$，$AB \parallel EF$，$CD = EF = 1$，$AB = AD = AF = 2$，$\angle BAD = \angle BAF = \dfrac{\pi}{2}$，点 $M$ 为棱 $BE$ 的中点.

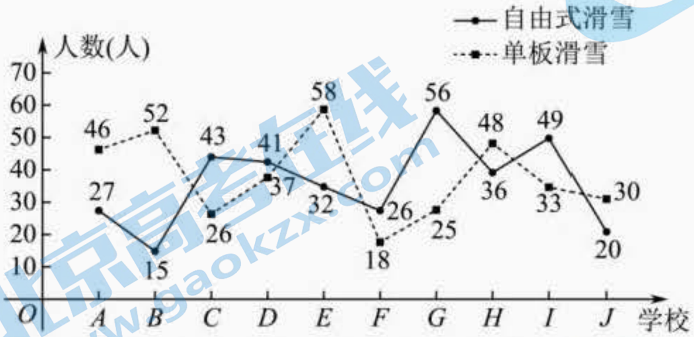



（1）求证：$AF \perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $C-DF-B$ 的余弦值；

（3）判断直线 $AM$ 与平面 $DCEF$ 是否相交，并说明理由.

21．2022 年冬季奥林匹克运动会主办城市是北京，北京成为第一个举办过夏季奥林匹克运动会和冬季奥林匹克运动会以及亚洲运动会三项国际赛事的城市！为迎接冬奥会的到来，某地很多中小学开展了模拟冬奥会赛事的活动，为了深入了解学生在“自由式滑雪”和“单板滑雪”两项活动的参与情况，在该地随机选取了 10 所学校进行研究，得到如下数据：




(1)在这 10 所学校中随机选取 3 所来调查研究，求这 3 所学校参与“自由式滑雪”都超过 40 人的概率；

(2)“单板滑雪”参与人数超过 45 人的学校可以作为“基地学校”，现在从这 10 所学校中随机选出 3 所，记 $X$ 为选出可作“基地学校”的学校个数，求 $X$ 的分布列和数学期望；

(3)现在有一个“单板滑雪”集训营，对“滑行、转弯、停止”这 3 个动作技巧进行集训，且在集训中进行了多轮测试．规定：在一轮测试中，这 3 个动作中至少有 2 个动作达到“优秀”，则该轮测试记为“优秀”．在集训测试中，小明同学 3 个动作中每个动作达到“优秀”的概率均为 $\frac{1}{3}$，每个动作互不影响且每轮测试互不影响．如果小明同学在集训测试中要想获得“优秀”的次数的平均值达到不少于 5 次，那么理论上至少要进行多少轮测试？

22．已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 一个顶点 $A(0,-2)$，以椭圆 $E$ 的四个顶点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{5}$．

（1）求椭圆 $E$ 的方程；

（2）过点 $P(0,\ -3)$的直线 $l$ 斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 $B$，$C$，直线 $AB$，AC 分别与直线交 $y=-3$ 交于点 $M$，$N$，当 $|PM|+|PN|\le 15$ 时，求 $k$ 的取值范围．

23. 设函数 $f(x)=ae^{x}+\cos x$，其中 $a\in R$.

（I）已知函数 $f(x)$ 为偶函数，求 $a$ 值；

（II）若 $a=1$，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>2$；

（III）若 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 内有两个不同的零点，求 $a$ 的取值范围.

2023 年北京一六六高三上开学试卷答案

1-12：DCACD BDCDB BA

13、24

14、2x-y-1=0

15、$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

16、$30^\circ$ $60^\circ$

17、①②④

18、

【答案】(1) $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小正周期为 $\pi$，单调递增区间为 $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in Z$；

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1)利用两角差余弦公式、正弦倍角公式及辅助角公式可得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

由此可求 $f(0)$，利用周期公式求最小正周期，根据正弦函数的单调性结论求单调递增区间；

(2) 由 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$ 得 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{6}$，即可得 $f(x)$ 的值域，进而判断 $f(x)\ge-\frac{1}{2}$ 是否成立.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$，化简可得

$f(x)=\sqrt{3}\left(\cos 2x\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x$

所以 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\dfrac{3}{2}\sin 2x-\sin 2x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以 $f(0)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得 $-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，

∴单调递增区间为 $\left[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in Z$．

【小问 2 详解】

由 $-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}$，知：$-\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5\pi}{6}$，则有 $f(x)$ 的值域为 $[-\dfrac{1}{2},1]$，

∴ $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\ge-\dfrac{1}{2}$，即当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$f(x)\ge-\dfrac{1}{2}$，

所以当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，恒有 $f(x)\ge-\dfrac{1}{2}$．

19、

【答案】（1）$B=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理将边化角，再由两角和的正弦公式及诱导公式求出 $\cos B$，即可得解；

（2）若选①即可确定 $A=\dfrac{3\pi}{4}$，推出矛盾，则只能选择②③，利用余弦定理及完全平方

公式求出$ac$、$a^2+c^2$，即可求出$a$、$c$，再根据面积公式计算可得.

【小问1详解】

解：因为$a\cos B+b\cos A=2c\cos B$，

由正弦定理可得$\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos B$，

所以$\sin(A+B)=2\sin C\cos B$，

又$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$，

即$\sin C=2\sin C\cos B$，

又$\sin C>0$，所以$1=2\cos B$，即$\cos B=\frac{1}{2}$，又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$；

【小问2详解】

解：若选①$\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，由$A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以A不存在，则□$ABC$不存在，故不能选①；

所以只有一种情况②③，即$b=3$，$C_{\square ABC}=9$，

所以$a+c=6$，由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即$9=a^2+c^2-ac$，又$36=a^2+c^2+2ac$，

所以$ac=9$、$18=a^2+c^2$，所以$(a-c)^2=a^2+c^2-2ac=0$，即$a=c=3$，此时三角形存在且唯一确定，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times9\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

20、

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（3）相交，$\sqrt{13}$

【解析】

【分析】（1）利用面面垂直的性质可证明；

（2）以 $A$ 为原点建立空间直角坐标系，求出平面 $CDF$ 和平面 $DFB$ 的法向量，利用向量关系即可求出；

（3）根据 $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\neq 0$ 可判断，再利用空间距离公式求解即可.

【小问 1 详解】

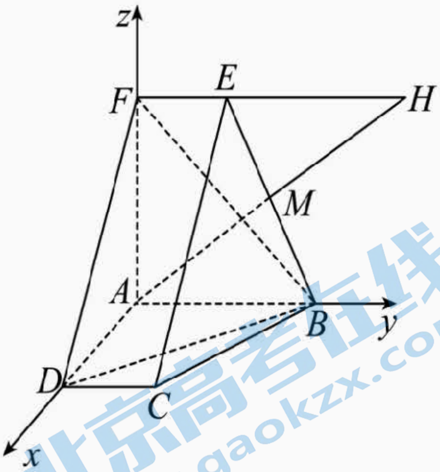
证明：因为 $\angle FAB=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $FA\perp AB$，

又平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，$FA\subset$ 平面 $ABEF$，

所以 $FA\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $FA$、$AD$、$AB$ 两两互相垂直.

如图以 $A$ 为原点，$AD, AB, AF$ 所在直线为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴建立空间直角坐标系.




由 $AB=AD=AF=2, CD=EF=1$，

可知 $A(0,0,0)$，$C(2,1,0)$，$D(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$F(0,0,2)$，

则 $\overrightarrow{CD}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{DF}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{FB}=(0,2,-2)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 $CDF$ 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-y=0\\ -2x+2z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $z=1, y=0$，所以 $\vec{n}=(1,0,1)$，

设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为平面 $DFB$ 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2x+2z=0\\ 2y-2z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=1, z=1$，所以 $\vec{m}=(1,1,1)$，

则 $\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

易知二面角 $C-DF-B$ 为锐二面角，

所以二面角 $C-DF-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【小问 3 详解】

由 $A(0,0,0)$， $M(0,\frac{3}{2},1)$ 得 $\overrightarrow{AM}=(0,\frac{3}{2},1)$，

因为 $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=1\times0+\frac{3}{2}\times0+1\times1\neq0$，

所以 $AM$ 与平面 $DCEF$ 不平行，所以直线 $AM$ 与平面 $DCEF$ 相交，

在四边形 $ABEF$ 中延长 $AM$ 交 $FE$ 延长线于点 $H$.

点 $H$ 就是直线 $AM$ 与平面 $DCEF$ 的交点，

易知 $H(0,3,2)$，所以 $|AH|=\sqrt{0^2+3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

21

【答案】(1) $\frac{1}{30}$

(2)分布列见解析，$\frac{6}{5}$

(3)至少要进行 20 轮测试.

【分析】（1）参与“自由式滑雪”的人数超过 40 人的学校共 4 所，从而利用组合知识进行求解；

（2）写出 $X$ 的可能取值及对应的概率，得到分布列，求出期望值；

（3）小明同学在集训测试中获得“优秀”的次数服从二项分布 $B\left(n,\frac{7}{27}\right)$，得到平均值，列出不等式，求出答案.

【详解】(1) 记“从 10 所学校中随机选取 3 所学校参与“自由式滑雪”都超过 40 人”为事件 $A$，

参与“自由式滑雪”的人数超过 40 人的学校共 4 所，

随机选择 3 所学校共 $C_4^3=4$ 种，所以 $P(A)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$.

（2）$X$ 的所有可能取值为$0,1,2,3$，

参与“单板滑雪”人数在 45 人以上的学校共 4 所，

所以$P(X=0)=\dfrac{C_4^0\cdot C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1\cdot C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$，$P(X=3)=\dfrac{C_4^3\cdot C_6^0}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$，

所以 $X$ 的分布列如下表：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{1}{6}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{3}{10}$ | $\dfrac{1}{30}$ |

所以$E(X)=\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$.

（3）记“小明同学在一轮测试中要想获得优秀”为事件 $B$，

则 $P(B)=C_3^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{7}{27}$，

由题意，小明同学在集训测试中获得“优秀”的次数服从二项分布$B\left(n,\dfrac{7}{27}\right)$，

由题意列式$\dfrac{7}{27}n\geq 5$，得$n\geq\dfrac{135}{7}$，

因为$n\in N^*$，所以$n$的最小值为$20$，

故至少要进行$20$轮测试.

22

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$；（2）$[-3,-1)\cup(1,3]$.

【分析】（1）根据椭圆所过的点及四个顶点围成的四边形的面积可求$a,b$，从而可求椭圆的标准方程.

（2）设$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，求出直线$AB,AC$的方程后可得$M,N$的横坐标，从而可得

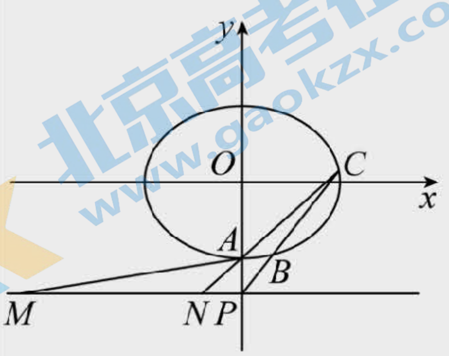
$|PM|+|PN|$，联立直线 $BC$ 的方程和椭圆的方程，结合韦达定理化简 $|PM|+|PN|$，从而可求 $k$ 的范围，注意判别式的要求.

【详解】（1）因为椭圆过 $A(0,-2)$，故 $b=2$，

因为四个顶点围成的四边形的面积为 $4\sqrt{5}$，故 $\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=4\sqrt{5}$，即 $a=\sqrt{5}$，

故椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

（2）




设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，

因为直线 $BC$ 的斜率存在，故 $x_1x_2\neq 0$，

故直线 $AB: y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$，令 $y=-3$，则 $x_M=-\frac{x_1}{y_1+2}$，同理 $x_N=-\frac{x_2}{y_2+2}$.

直线 $BC: y=kx-3$，由 $\begin{cases} y=kx-3 \\ 4x^2+5y^2=20 \end{cases}$ 可得 $(4+5k^2)x^2-30kx+25=0$，

故 $\Delta=900k^2-100(4+5k^2)>0$，解得 $k<-1$ 或 $k>1$.

又 $x_1+x_2=\frac{30k}{4+5k^2}, x_1x_2=\frac{25}{4+5k^2}$，故 $x_1x_2>0$，所以 $x_Mx_N>0$

又 $|PM|+|PN|=|x_M+x_N|=\left|\frac{x_1}{y_1+2}+\frac{x_2}{y_2+2}\right|$

$$=\left|\frac{x_1}{kx_1-1}+\frac{x_2}{kx_2-1}\right|=\left|\frac{2kx_1x_2-(x_1+x_2)}{k^2x_1x_2-k(x_1+x_2)+1}\right|=\left|\frac{\frac{50k}{4+5k^2}-\frac{30k}{4+5k^2}}{\frac{25k^2}{4+5k^2}-\frac{30k^2}{4+5k^2}+1}\right|=5|k|$$

故 $5|k|\le 15$ 即 $|k|\le 3$，

综上，$-3\le k<-1$ 或 $1<k\le 3$.

23

【答案】(I) 0；(II) 详见解析；(III) $\left[e^{-\pi},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\right)$.

【解析】

【分析】(I) 利用偶函数的定义 $f(-x)=f(x)$，化简后可得实数 $a$ 的值；

(II) 利用导数分析函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，进而可证得 $f(x)>2$；

(III) 令 $f(x)=0$ 得 $a=-\frac{\cos x}{e^x}$，令 $h(x)=-\frac{\cos x}{e^x}$，利用导数分析函数 $y=h(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的单调性与极值，利用数形结合思想可求得实数 $a$ 的取值范围.

【详解】(I) 函数 $y=f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，即

$ae^{-x}+\cos(-x)=ae^x+\cos x$，

整理得 $a(e^x-e^{-x})=0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，$\therefore a=0$；

(II) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+\cos x$，则 $f'(x)=e^x-\sin x$，

$\because x>0$，则 $e^x>1$，$-1\le\sin x\le1$，$\therefore f'(x)=e^x-\sin x>0$，

所以，函数 $f(x)=e^x+\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=2$；

（III）由 $f(x)=ae^x+\cos x=0$，得 $a=-\dfrac{\cos x}{e^x}$，设函数 $h(x)=-\dfrac{\cos x}{e^x}$，$x\in[0,\pi]$，

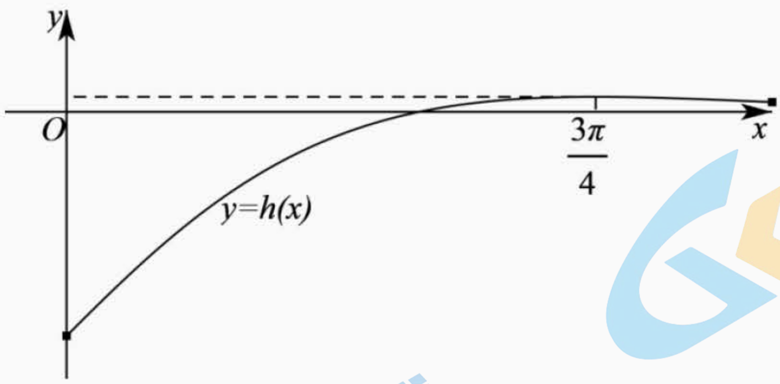
则 $h'(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{e^x}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

随着 $x$ 变化，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示：

| $x$ | $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ | $\dfrac{3\pi}{4}$ | $\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | + | 0 | − |
| $h(x)$ | □ | 极大值 | □ |

所以，函数 $y=h(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减.

又因为 $h(0)=-1$，$h(\pi)=e^{-\pi}$，$h\left(e^{\frac{3\pi}{4}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$，且 $h\left(e^{\frac{3\pi}{4}}\right)>h(0)$，如下图所示：




所以，当$a\in\left[e^{-\pi},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\right)$时，方程$a=-\frac{\cos x}{e^{x}}$在区间$[0,\pi]$内有两个不同解，

因此，所求实数$a$的取值范围为$\left[e^{-\pi},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\right)$.

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。