广州市 2022 届高三年级调研测试

数 学

本试卷共 5 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x\le 1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x|-1<x\le 2\}$　　B. $\{x|-1\le x\le 2\}$　　C. $\{x|0\le x\le 1\}$　　D. $\{x|-1<x\le 0\}$

2. 复数 $z=\dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 的虚部是

A. i　　B. $\dfrac{5}{3}$　　C. $\dfrac{5}{3}\mathrm{i}$　　D. 1

3. 已知角 α 的终边过点 $P(1,2)$，则 $\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

4. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_7>0$，$S_{11}<0$，则 S_n 的最小值为

A. S_4　　B. S_5　　C. S_6　　D. S_7

5. 如图，某建筑物是数学与建筑的完美结合．该建筑物外形弧线的一段近似看成双曲线下支的一部分，且此双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的下焦点到渐近线的距离为 3，离心率为 2，则该双曲线的标准方程为

A. $\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$　　B. $y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$　　C. $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{x^2}{9}=1$

6. 2021 年 7 月，我国河南省多地遭受千年一遇的暴雨，为指导防汛救灾工作，某部门安排甲，乙，丙，丁，戊五名专家赴郑州，洛阳两地工作，每地至少安排一名专家，则甲，乙被安排在不同地点工作的概率为

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{8}{15}$　　D. $\frac{3}{5}$

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，球 O 的表面积为 $\frac{64}{9}\pi$，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值为

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

8. 已知直线 $l_1: mx-y-3m+1=0$ 与直线 $l_2: x+my-3m-1=0$ 相交于点 P，线段 AB 是圆 $C:(x+1)^2+(y+1)^2=4$ 的一条动弦，且 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}-2$　　C. $2\sqrt{2}-1$　　D. $4\sqrt{2}-1$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 下列命题中，真命题的是

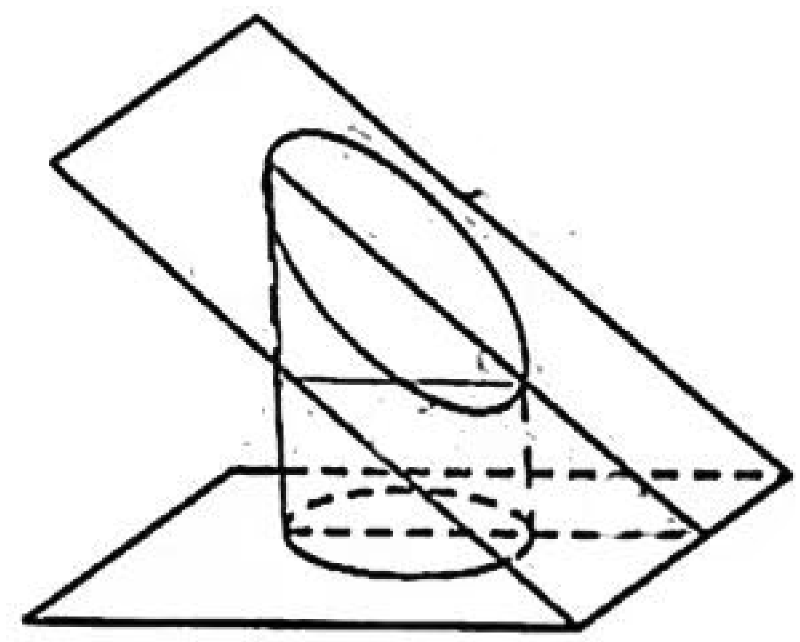
A. 若样本数据 x_1，x_2，…，x_{10} 的方差为 2，则数据 $2x_1-1, 2x_2-1, \cdots, 2x_{10}-1$ 的方差为 8

B. 若回归方程为 $\hat{y}=-0.45x+0.6$，则变量 y 与 x 负相关

C. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(3,\sigma^2)$，$P(X\le 4)=0.64$，则 $P(2\le X\le 3)=0.07$

D. 在线性回归分析中相关指数 R^2 用来刻画回归的效果，若 R^2 值越小，则模型的拟合效果越好

10. 如图所示，一个底面半径为 $\sqrt{2}$ 的圆柱被与其底面所成的角为 $\theta=45^\circ$ 的平面所截，截面是一个椭圆，则



A. 椭圆的长轴长为 4　　B. 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. 椭圆的方程可以为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　　D. 椭圆上的点到焦点的距离的最小值为 $2-\sqrt{2}$

11. 对于函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+cx+d$, $c,d\in\mathbf{R}$，下列说法正确的是

A. 存在 c,d 使得函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称

B. $f(x)$ 是单调函数的充要条件是 $c\geq\frac{1}{4}$

C. 若 x_1,x_2 为函数 $f(x)$ 的两个极值点，则 $x_1^4+x_2^4>\frac{1}{8}$

D. 若 $c=d=-2$，则过点 $P(3,0)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线有且仅有 2 条

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M 为棱 CC_1 上的动点，$AM\perp$ 平面 α，下面说法正确的是

A. 若 N 为 DD_1 中点，当 $AM+MN$ 最小时，$\frac{CM}{CC_1}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 当点 M 与点 C_1 重合时，若平面 α 截正方体所得截面图形的面积越大，则其周长就越大

C. 直线 AB 与平面 α 所成角的余弦值的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

D. 若点 M 为 CC_1 的中点，平面 α 过点 B，则平面 α 截正方体所得截面图形的面积为 $\frac{9}{2}$

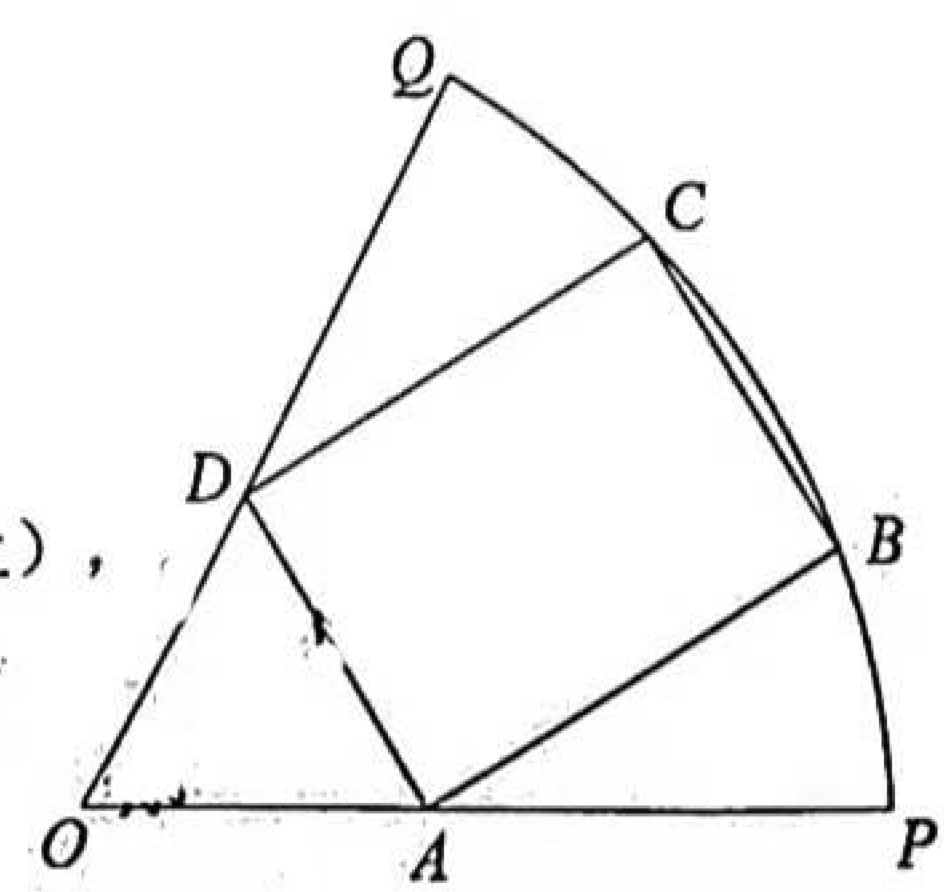
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $f(x)$ 为奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2-\sin(\pi x)$，则 $f(2)=$________.

14. 若 $\left(\frac{1}{3x^3}-x\right)^n$ 的展开式中第 $r+1$ 项为常数项，则 $\frac{r}{n}=$________

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\leq\lambda\\ -x^2+6x-8, & x>\lambda\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则实数 λ 的取值范围是________.

16. 已知扇形 POQ 的半径为 2，$\angle POQ=\frac{\pi}{3}$，如图所示，在此扇形中截出一个内接矩形 $ABCD$（点 B，C 在弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 上），则矩形 $ABCD$ 面积的最大值为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）

在锐角△ABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$\overline{m}=(c,b)$，$\overline{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sin B\right)$，$\overline{m}\parallel\overline{n}$．

（1）求C；

（2）求$\sin A+\sin B$的取值范围．

18.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$S_{n+1}=2S_n+n+1$．

（1）证明：数列$\{a_n+1\}$为等比数列；

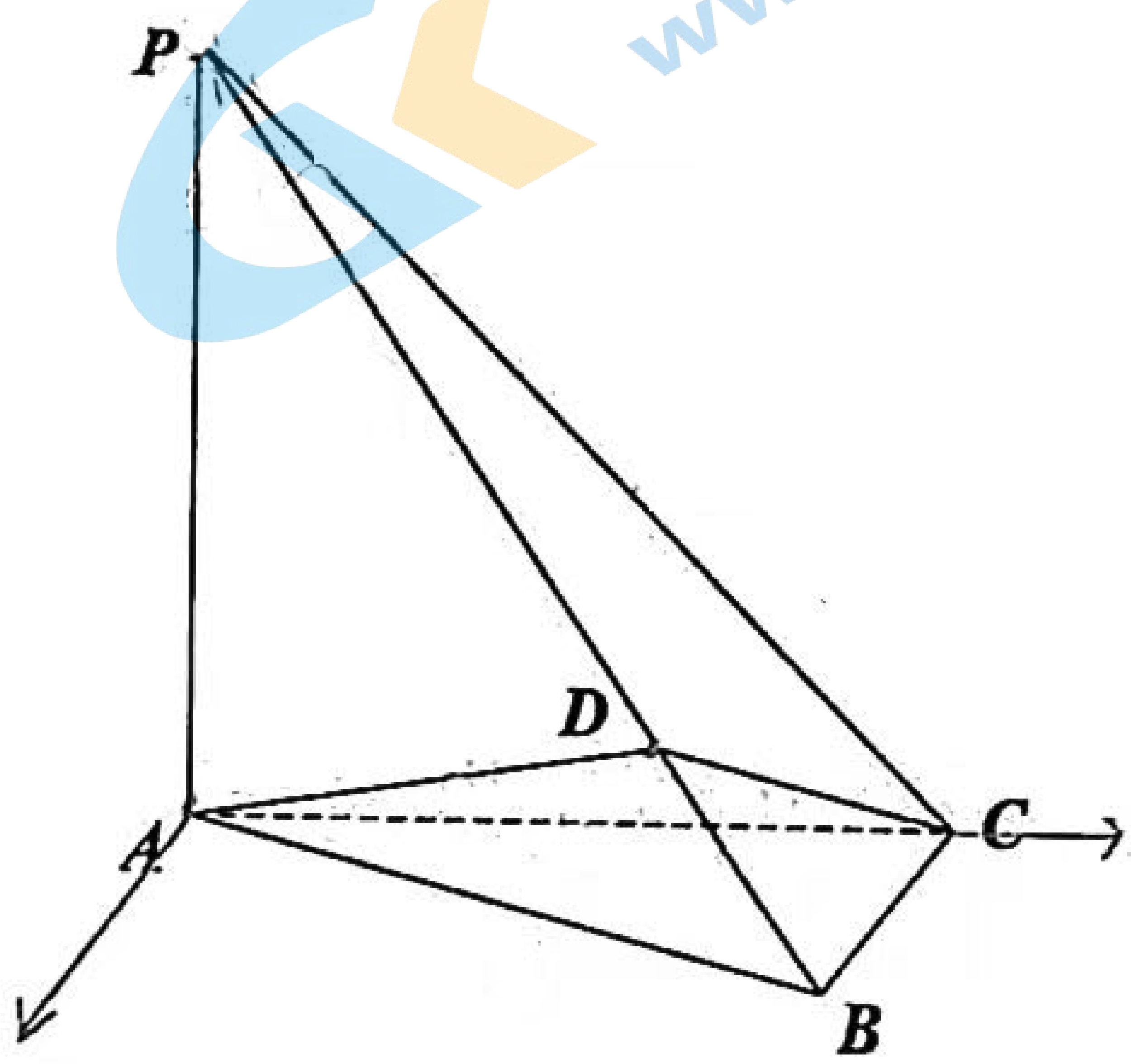
（2）在a_k和a_{k+1}（$k\in N^*$）中插入k个数构成一个新数列$\{b_n\}$：a_1，2，a_2，4，6，a_3，8，10，12，a_4，…，其中插入的所有数依次构成首项和公差都为 2 的等差数列．求数列$\{b_n\}$的前 30 项和T_{30}．

19.（12 分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$BC\perp$平面PAC，$AD\perp BP$，$AB=2$，$BC=1$，$PD=3BD=3$．

（1）求证：$PA\perp AC$；

（2）求二面角$P-AC-D$的余弦值．



20.（12分）

某校开展"学习新中国史"的主题学习活动．为了调查学生对新中国史的了解情况，需要对学生进行答题测试，答题测试的规则如下：每位参与测试的学生最多有两次答题机会，每次答一题，第一次答对，答题测试过关，得5分，停止答题测试；第一次答错，继续第二次答题，若答对，答题测试过关，得3分；若两次均答错，答题测试不过关，得0分．某班有12位学生参与答题测试，假设每位学生第一次和第二次答题答对的概率分别为m，0.5，两次答题是否答对互不影响，每位学生答题测试过关的概率为p．

（1）若$m=0.5$，求每一位参与答题测试的学生所得分数的数学期望；

（2）设该班恰有9人答题测试过关的概率为$f(p)$，当$f(p)$取最大值时，求p，m．

21.（12分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$F_1$，$F_2$分别为椭圆$C$的左，右焦点，$M$为椭圆$C$上一点，$\triangle MF_1F_2$的周长为$4+2\sqrt{3}$．

（1）求椭圆C的方程；

（2）P为圆$x^2+y^2=5$上任意一点，过P作椭圆C的两条切线，切点分别为A，B，判断$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$是否为定值？若是，求出定值；若不是，说明理由．

22.（12分）

已知函数$f(x)=2ax-x^2-2\ln x$．

（1）若$f(x)$在定义域内单调，求实数a的取值范围；

（2）若$a\le\dfrac{5}{2}$，m，n分别为$f(x)$的极大值和极小值，求$m-n$的取值范围．

广州市 2022 届高三年级调研测试

数学试题参考答案及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题不给中间分．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	D	C	B	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9. AB　　10. ACD　　11. BC　　12. AD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. -4　　14. $\frac{3}{4}$　　15. $(-\infty,0)\cup[2,4)$　　16. $8-4\sqrt{3}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．

17．（10 分）

（1）解：由题意 $\vec{m}//\vec{n}$，得 $c\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}b=0$．　　…………………………2 分

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，得 $\sin C\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B=0$．　　…………………………3 分

在△ABC 中，$\sin B\neq 0$，则 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　…………………………4 分

因为△ABC 为锐角三角形，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$．　　…………………………5 分

（2）解：由 $A+B=\pi-C=\frac{2\pi}{3}$，得 $B=\frac{2\pi}{3}-A$，

$\sin A+\sin B=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$　　…………………………6 分

$=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$．　　…………………………7 分

因为△ABC为锐角三角形，则$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

解得$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，　则$A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$. ……………………………8分

所以$\sin(A+\dfrac{\pi}{6})\in(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1]$. ……………………………9分

所以$\sin A+\sin B\in(\dfrac{3}{2},\sqrt{3}]$ ……………………………10分

18. （12分）

(1) 解：由题意，当$n=1$时，$S_2=2S_1+2$， ……………………………1分

得$a_1+a_2=2a_1+2$，解得$a_2=3$. ……………………………2分

当$n\geq 2$时，$S_{n+1}=2S_n+n+1$，①

$S_n=2S_{n-1}+n$，②

①-②得$a_{n+1}=2a_n+1\left(n\geq 2\right)$， ……………………………3分

因为$a_2=3=2a_1+1$，

所以$a_{n+1}=2a_n+1\left(n\geq 1\right)$. ……………………………4分

则$a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$， ……………………………5分

所以$\{a_n+1\}$是以$a_1+1=2$为首项，2为公比的等比数列. ……………………………6分

(2) 解：由(1)知$a_n+1=2^n$，$a_n=2^n-1$. ……………………………7分

设插入的所有数构成数列$\{c_n\}$，则$c_n=2n$. ……………………………8分

由于$1+2+3+4+5+6+7=28$，$28+2=30$，

所以数列$\{b_n\}$的前30项中包含了数列$\{a_n\}$的前7项及数列$\{c_n\}$的前23项， ………9分

所以$T_{30}=a_1+a_2+\cdots+a_7+c_1+c_2+\cdots+c_{23}$ ……………………………10分

$=2^1-1+2^2-1+\cdots+2^7-1+\dfrac{23\times(2+46)}{2}$ ……………………………11分

$$=\frac{2\times(2^7-1)}{2-1}-7+552=799.$$ ……………………………12 分

19. （12 分）

（1）证法 1：由 $AB=2$，$BD=1$，$AD\perp BP$，得 $AD=\sqrt{3}$． ……………………1 分

由 $PD=3$，$AD=\sqrt{3}$，$AD\perp BP$，得 $PA=2\sqrt{3}$， ……………………2 分

由 $BC\perp$ 平面 PAC，AC，$PC\subset$ 平面 ABC，
得 $BC\perp AC$，$BC\perp PC$． ……………………3 分

所以 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}$，$PC=\sqrt{PB^2-BC^2}=\sqrt{15}$． ……………………4 分

因为 $AC^2+PA^2=15=PC^2$， ……………………5 分
所以 $PA\perp AC$． ……………………6 分

证法 2：由 $AB=2$，$BD=1$，$AD\perp BP$，得 $AD=\sqrt{3}$． ……………………1 分

由 $PD=3$，$AD=\sqrt{3}$，$AD\perp BP$，得 $PA=2\sqrt{3}$， ……………………2 分

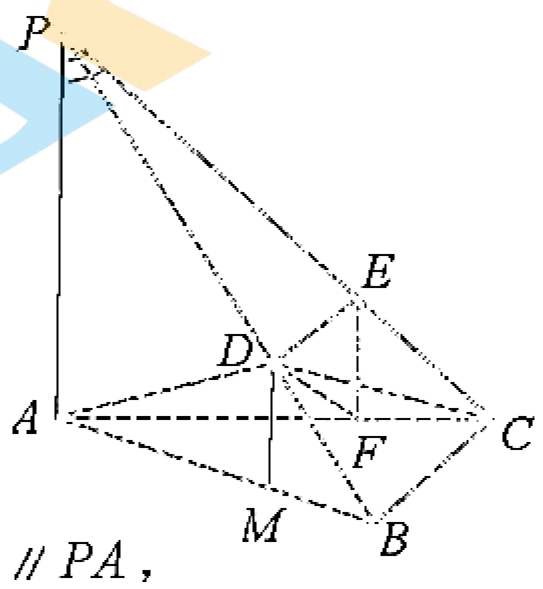
因为 $PB=4$，所以 $PB^2=AB^2+PA^2$，所以 $PA\perp AB$． ……………………3 分
由 $BC\perp$ 平面 PAC，$PA\subset$ 平面 ABC，得 $BC\perp PA$． ……………………4 分
又 BC，$AB\subset$ 平面 ABC，$BC\cap AB=B$，故 $PA\perp$ 平面 ABC． ……………………5 分
因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AC$． ……………………6 分

证法 3：由 $AB=2$，$BD=1$，$AD\perp BP$，得 $\angle ABP=60^\circ$． ……………………1 分

过 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M，得 $BM=BD\cos\angle ABP=\frac{1}{2}$． ……………………2 分

故 $BM:BA=BD:BP$，故 $DM\parallel PA$，所以 $PA\perp AB$． ……………………3 分

由 $BC\perp$ 平面 PAC，$PA\subset$ 平面 ABC 得 $BC\perp PA$ ……………………4 分
又 BC，$AB\subset$ 平面 ABC，$BC\cap AB=B$，故 $PA\perp$ 平面 ABC ……………………5 分
因为 $AC\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AC$． ……6 分



（2）解法 1：过 D 作 $DE\parallel BC$ 交 PC 于 E，
由 $BC\perp$ 平面 PAC，故 $DE\perp$ 平面 PAC ……7 分
过 E 作 $EF\perp AC$ 于 F，连接 DF，则 $AC\perp$ 平面 DEF．
由于 $DE\subset$ 平面 DEF，则 $AC\perp DF$．
则 $\angle DFE$ 为二面角 $P-AC-D$ 的平面角． ……8 分

由 $PD=3BD=3$，$DE\parallel BC$ 得 $DE=\frac{3}{4}$，

$EF\perp AC$，$PA\perp AC$，且 EF，$PA\subset$ 平面 PAC，得 $EF\parallel PA$，

$\frac{EF}{PA}=\frac{CE}{CP}=\frac{BD}{BP}=\frac{1}{4}$，得 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$． ……………………9 分

$DF=\sqrt{DE^2+EF^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$. ……………………………10 分

所以 $\cos\angle DFE=\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………………………11 分

所以二面角 $P-AC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………………………12分

解法 2：

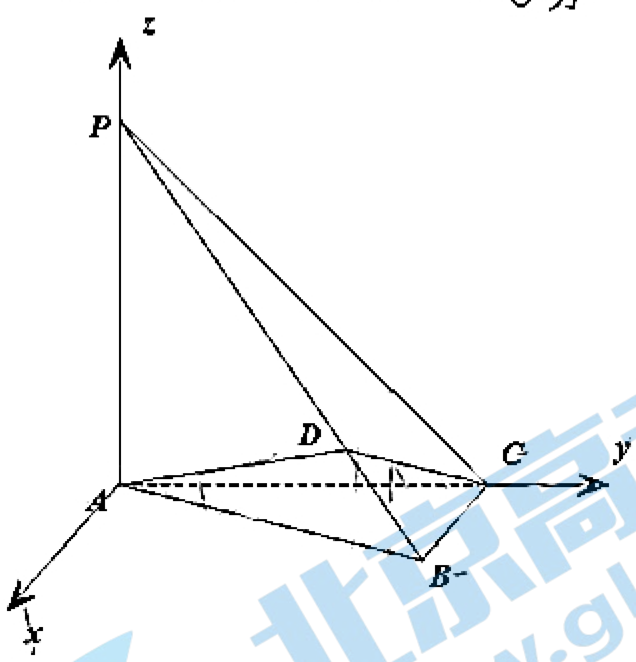
如图作 $AQ\,//\,CB$，以 AQ，AC，AP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系. …7 分

$AB=2$，$BC=1$，$BD=1$，$BP=4$，

所以 $AC=\sqrt{3}$，$AP=2\sqrt{3}$.

故 $A(0,0,0)$，$B(1,\sqrt{3},0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$.

由 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BP}$，得 $D(\dfrac{3}{4},\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$， ……………………………8 分



则 $\overrightarrow{AD}=(\dfrac{3}{4},\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},0)$.

设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

令 $x=2$，则 $z=-\sqrt{3}$，$y=0$，$\vec{n}=(2,0,-\sqrt{3})$ 为平面 ACD 的一个法向量. ……9 分

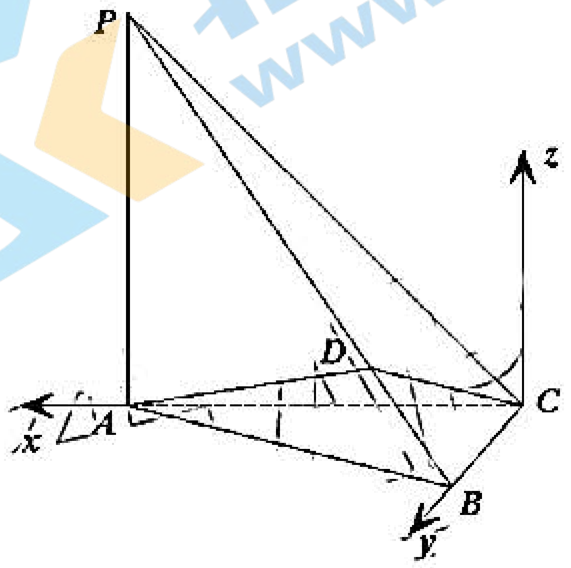
由于 $BC\perp$ 平面 PAC，故 $\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$ 为平面 PAC 的一个法向量. ………10 分

则 $\cos\langle\overrightarrow{CB},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CB}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………………………11 分

所以二面角 $P-AC-D$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………………12 分

解法 3：

如图作$CQ\ /\!/\ AP$，以CA，CB，CQ分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系．…7 分



$AB=2$， $BC=1$，$BD=1$， $BP=4$，

所以$AC=\sqrt{3}$，$AP=2\sqrt{3}$．

故$C(0,0,0)$， $B(0,1,0)$， $A(\sqrt{3},0,0)$，$P(\sqrt{3},0,2\sqrt{3})$．

由$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BP}$得$D(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$．………………8 分

则$\overrightarrow{CD}=(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$， $\overrightarrow{CA}=(\sqrt{3},0,0)$

设平面ACD的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}\sqrt{3}x=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{3}{4}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

令$y=2$，则$z=-\sqrt{3}$，$x=0$，$\vec{n}=(0,2,-\sqrt{3})$为平面ACD的一个法向量． ……9 分

由于$BC\perp$平面PAC，故$\overrightarrow{CB}=(0,1,0)$为平面$PAC$的一个法向量． ………………10 分

则$\cos\langle\overrightarrow{CB},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CB}||\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ ……………………11 分

所以二面角$P-AC-D$的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ ……………………12 分

20．（12 分）

(1)解：设每一位参与答题测试的学生所得分数为随机变量X，

则X的可能取值分别为$5,3,0$， ……………………1 分

则$P(X=5)=0.5$，$P(X=3)=(1-0.5)\times0.5=0.25$，

$P(X=0)=(1-0.5)(1-0.5)=0.25$． ……………………4 分

则每一位参与答题测试的学生所得分数的数学期望为

$EX=5\times0.5+3\times0.25+0\times0.25=3.25$. ……5 分

(2) 解：由题意得 $f(p)=C_{12}^{9}p^{9}(1-p)^{3}$，$(0<p<1)$， ……6 分

则 $f'(p)=C_{12}^{9}[9p^{8}(1-p)^{3}-3p^{9}(1-p)^{2}]$ ……7 分

$=3C_{12}^{9}p^{8}(1-p)^{2}(3-4p)$.

由 $f'(p)=0$，得 $p=0.75$， ……8 分

由 $f'(p)>0$，得 $0<p<0.75$，

由 $f'(p)<0$，得 $0.75<p<1$，

所以 $f(p)$ 在 $(0,0.75)$ 上是增函数，在 $(0.75,1)$ 上是减函数. ……9 分

所以 $p=0.75$ 是 $f(p)$ 的极大值点，也是 $f(p)$ 的最大值点. ……10 分

由题意得 $p=1-(1-m)(1-0.5)=0.5+0.5m$. ……11 分

则 $0.5+0.5m=0.75$，解得 $m=0.5$.

所以 $f(p)$ 取得最大值时，$p=0.75$，$m=0.5$. ……12 分

21. (12 分)

(1) 解：由已知可得 $\begin{cases}2a+2c=4+2\sqrt{3},\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^{2}=b^{2}+c^{2},\end{cases}$ ……2 分

解得 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$. ……3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^{2}}{4}+y^{2}=1$ ……4 分

(2) 解：设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^{2}+y_0^{2}=5$. ……5 分

当 $x_0=\pm2$，则 $y_0=\pm1$，显然 $PA\perp PB$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$. ……6 分

当 $x_0\neq\pm2$，过点 P 的切线可设为 $y=k(x-x_0)+y_0$， ……7 分

由 $\begin{cases}y=kx+(y_0-kx_0)\\ x^{2}+4y^{2}=4\end{cases}$ 得 $(4k^{2}+1)x^{2}+8k(y_0-kx_0)x+4[(y_0-kx_0)^{2}-1]=0$， ……8 分

所以$\Delta=64k^2(y_0-kx_0)^2-16(4k^2+1)[(y_0-kx_0)^2-1]=0$. ……………………9 分

整理成关于k的方程$(4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0^2=0$， ……………………10 分

此方程的两个根k_1,k_2就是切线PA,PB的斜率，

所以$k_1\cdot k_2=\dfrac{1-y_0^2}{4-x_0^2}=\dfrac{1-(5-x_0^2)}{4-x_0^2}=-1$. ……………………11 分

所以$PA\perp PB$.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$为定值. ……………………12 分

22.（12 分）

（1）解：函数$f(x)=2ax-x^2-2\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$

$f'(x)=2a-2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2ax-2x^2-2}{x}=\dfrac{-2x^2+2ax-2}{x}$， ……………………1 分

因为$y=-2x^2+2ax-2$开口向下，

所以$f(x)$只能在$(0,+\infty)$上单调递减， ……………………2 分

即$-2x^2+2ax-2\le 0$在$(0,+\infty)$上恒成立， ……………………3 分

即$a\le x+\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立

因为$x+\dfrac{1}{x}\ge 2$，所以$a\le 2$. ……………………4 分

（2）解：因为$f(x)$有极大值和极小值，所以$f(x)$在定义域内必不单调，

由（1）得$a>2$，又因为$a\le\dfrac{5}{2}$，故$2<a\le\dfrac{5}{2}$. ……………………5 分

由$f'(x)=\dfrac{-2x^2+2ax-2}{x}=0$ 得$-2x^2+2ax-2=0$.

设x_1,x_2为方程$-2x^2+2ax-2=0$的两个根，

不妨设$x_1<x_2$，则$x_1+x_2=a,x_1x_2=1$. ……………………6 分

当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$是减函数，

当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$是增函数，

当$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$是减函数，

所以 $n=f(x_1)=2ax_1-x_1^{\,2}-2\ln x_1$，$m=f(x_2)=2ax_2-x_2^{\,2}-2\ln x_2$. ……………7 分

$$m-n=(2ax_2-x_2^{\,2}-2\ln x_2)-(2ax_1-x_1^{\,2}-2\ln x_1)$$

$$=2a(x_2-x_1)-(x_2^{\,2}-x_1^{\,2})-2\ln\frac{x_2}{x_1}$$

$$=2(x_1+x_2)(x_2-x_1)-(x_2^{\,2}-x_1^{\,2})-2\ln\frac{x_2}{x_1}$$

$$=(x_2^{\,2}-x_1^{\,2})-2\ln\frac{x_2}{x_1}$$

$$=\frac{x_2^{\,2}-x_1^{\,2}}{x_1x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}$$

$$=\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_1}{x_2}-2\ln\frac{x_2}{x_1}.$$ ……………………8 分

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，因为 $0<x_1<x_2$，所以 $t>1$，

又因为 $a^2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=2+\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=2+t+\dfrac{1}{t}$ ，$2<a\le\dfrac{5}{2}$，

所以 $4<2+t+\dfrac{1}{t}\le\dfrac{25}{4}$，解得 $1<t\le 4$. ……………………9 分

故 $m-n=S(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t$，$1<t\le 4$.

因为 $S'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\dfrac{(t-1)^2}{t^2}>0$， ……………………10 分

所以 $S(t)$ 在 $(1,4]$ 上单调递增

由于 $S(1)=0$，$S(4)=\dfrac{15}{4}-4\ln 2$， ……………………11 分

所以 $m-n$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{15}{4}-4\ln 2\right]$. ……………………12 分