

## 2019 年高三教学测试 (2019.9)

### 数学 试题卷

#### 注意事项:

1. 本科考试分试题卷和答题卷, 考生须在答题卷上作答. 答题前, 请在答题卷的密封线内填写学校、班级、学号、姓名;

2. 本试题卷分为第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 6 页, 全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

#### 参考公式:

如果事件  $A, B$  互斥, 那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

如果事件  $A, B$  相互独立, 那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率是  $p$ , 那么  $n$  次独立重复试验中事件  $A$  恰好发生  $k$  次

的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\dots,n).$$

柱体的体积公式

$$V = Sh,$$

其中  $S$  表示柱体的底面积,  $h$  表示柱体的高.

锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

其中  $S$  表示锥体的底面积,  $h$  表示锥体的高.

台体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

其中  $S_1, S_2$  分别表示台体的上、下底面积,  $h$  表示台体的高.

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2,$$

其中  $R$  表示球的半径.

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

其中  $R$  表示球的半径.

## 第I卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合  $A = \{i, i^2, i^3, i^4\}$  ( $i$  是虚数单位),  $B = \{1, -1\}$ , 则  $A \cap B =$

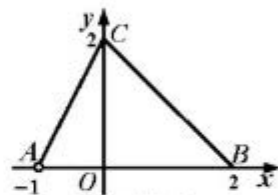
- A.  $\{-1\}$       B.  $\{1\}$       C.  $\{1, -1\}$       D.  $\emptyset$

2. “ $2^a = 2^b$ ” 是 “ $\ln a = \ln b$ ” 的

- A. 充分而不必要条件      B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

3. 如图, 函数  $f(x)$  ( $x \in (-1, 2]$ ) 的图象为折线  $ACB$ , 则不等式  $f(x) \geq \log_2(x+1)$  的解集为

- A.  $\{x | -1 < x \leq 0\}$       B.  $\{x | 0 < x \leq 1\}$   
C.  $\{x | -1 < x \leq 1\}$       D.  $\{x | -1 < x \leq 2\}$



(第 3 题图)

4. 已知  $x, y$  满足条件  $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x + 2y$  的最大值为

- A. 2      B. 3  
C. 4      D. 5

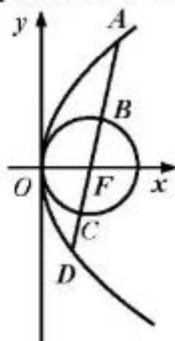
5. 袋中有形状、大小都相同且编号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个球, 其中 1 个白球, 2 个红球, 2 个黄球. 从中一次随机取出 2 个球, 则这 2 个球颜色不同的概率为

- A.  $\frac{3}{5}$       B.  $\frac{3}{4}$   
C.  $\frac{7}{10}$       D.  $\frac{4}{5}$

6. 已知向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  不共线, 且  $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ , 若  $\vec{c} = \vec{a} - \frac{|\vec{a}|^2 \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$ , 则向量  $\vec{a}$  与  $\vec{c}$  的夹角为

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\frac{\pi}{6}$   
C.  $\frac{\pi}{3}$       D. 0

7. 如图, 已知抛物线  $C_1: y^2 = 4x$  和圆  $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$ , 直线  $l$  经过  $C_1$  的焦点  $F$ , 自上而下依次交  $C_1$  和  $C_2$  于  $A, B, C, D$  四点, 则  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$  的值为



(第7题图)

- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{2}$       C. 1      D. 2

8. 若  $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , 且  $\alpha \sin \alpha - \beta \sin \beta > 0$ . 则下列结论正确的是

- A.  $\alpha > \beta$       B.  $\alpha + \beta > 0$   
C.  $\alpha < \beta$       D.  $\alpha^2 > \beta^2$

9. 已知各棱长均为 1 的四面体  $A-BCD$  中,  $E$  是  $AD$  的中点,  $P$  为直线  $CE$  上的动点, 则  $|BP| + |DP|$  的最小值为

- A.  $1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$       B.  $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}$       C.  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$       D.  $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}$

10. 已知  $a, b \in \mathbb{R}$ , 关于  $x$  的不等式  $|x^3 + ax^2 + bx + 1| \leq 1$  在  $x \in [0, 2]$  时恒成立, 则当  $b$  取得最大值时,  $a$  的取值范围为

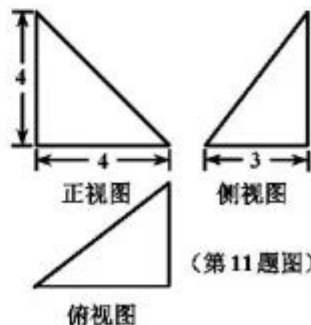
- A.  $[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}, -2]$       B.  $[-2, -\frac{3}{4}]$   
C.  $[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}, -\frac{3}{4}]$       D.  $[-\frac{5}{2}, -2]$

## 第 II 卷

二、填空题 (本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分)

11. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则俯视图的面积为  $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$ , 该几何体的体积为  $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$ .

12. 已知  $\{a_n\}$  是公差为  $-2$  的等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 若  $a_2 + 1, a_5 + 1, a_7 + 1$  成等比数列, 则  $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ , 当  $n = \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $S_n$  取得最大值.



(第11题图)

13. 已知函数  $f(x) = (1 + \cos 2x)\sin^2 x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), 则  $f(x)$  的最小正周期为     ▲    ;  
当  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  时,  $f(x)$  的最小值为     ▲    .
14. 二项式  $(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$  的展开式中, 所有有理项 (系数为有理数,  $x$  的次数为整数的项) 的系数之和为     ▲    ; 把展开式中的项重新排列, 则有理项互不相邻的排法共有     ▲     种. (用数字作答)
15.  $\triangle ABC$  中,  $AB = 5$ ,  $AC = 2\sqrt{5}$ ,  $BC$  上的高  $AD = 4$ , 且垂足  $D$  在线段  $BC$  上,  $H$  为  $\triangle ABC$  的垂心且  $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), 则  $\frac{x}{y} =$      ▲    .
16. 已知  $P$  是椭圆  $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$  ( $a_1 > b_1 > 0$ ) 和双曲线  $\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1$  ( $a_2 > 0, b_2 > 0$ ) 的一个交点,  $F_1, F_2$  是椭圆和双曲线的公共焦点,  $e_1, e_2$  分别为椭圆和双曲线的离心率, 若  $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$ , 则  $e_1 \cdot e_2$  的最小值为     ▲    .
17. 已知  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq \lambda, \\ x^2 - 4x + 2\lambda, & x < \lambda. \end{cases}$  若函数  $f(x)$  恰有 2 个不同的零点, 则  $\lambda$  的取值范围为     ▲    .

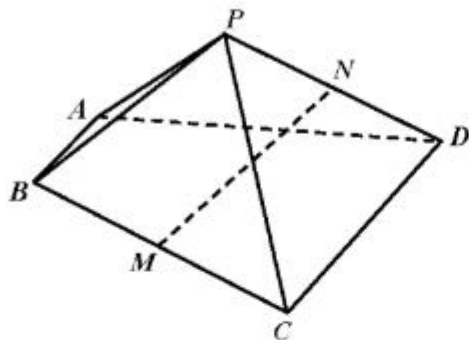
三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 74 分)

18. (本题满分 14 分) 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  的对边, 且满足  $(a+b) \cdot (\sin A - \sin B) = (c-b) \cdot \sin C$ .
- (I) 求角  $A$  的大小;
- (II) 当  $a = 2$  时, 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

19. (本题满分 15 分) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $BC = CD = 2AB = 2$ ,  $\triangle PAD$  是等边三角形,  $M, N$  分别为  $BC, PD$  的中点.

(I) 求证:  $MN \parallel$  平面  $PAB$ ;

(II) 若二面角  $P-AD-C$  的大小为  $\frac{\pi}{3}$ , 求直线  $MN$  与平面  $PAD$  所成角的正切值.



(第 19 题图)

20. (本题满分 15 分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $2S_n = 3a_n - 1$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ).

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = \frac{\log_3 a_{n+2}}{a_n}$ ,  $T_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 求证:  $T_n < \frac{15}{4}$ .

21. (本题满分 15 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的焦距为  $2\sqrt{3}$ , 且过点  $A(2, 0)$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 若点  $B(0, 1)$ , 设  $P$  为椭圆  $C$  上位于第三象限内一动点, 直线  $PA$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 直线  $PB$  与  $x$  轴交于点  $N$ , 求证: 四边形  $ABNM$  的面积为定值, 并求出该定值.

22. (本题满分 15 分) 已知函数  $f(x) = e^{2x} - ax + b (a, b \in \mathbb{R},$  其中  $e$  为自然对数的底数).

(I) 若  $a > 0$ , 求函数  $f(x)$  的单调递增区间;

(II) 若函数  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ .

(i) 当  $a = b$  时, 求实数  $a$  的取值范围;

(ii) 设  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 求证:  $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$ .



## 2019 年高三教学测试 (2019.9)

### 数学 参考答案

一、选择题 (本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. C;      2. B;      3. C;      4. C;      5. D;  
6. A;      7. C;      8. D;      9. B;      10. A.

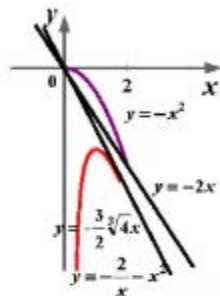
10. 提示: 当  $x=0$  时, 不等式显然成立.

当  $x \in (0, 2]$  时,  $-1 \leq x^3 + ax^2 + bx + 1 \leq 1$ , 即  $-\frac{2}{x} - x^2 \leq ax + b \leq -x^2$ ,

即直线  $y = ax + b$  夹在曲线段  $y = -x^2 - \frac{2}{x}, x \in (0, 2]$  和

$y = -x^2, x \in (0, 2]$  之间. 由图像易知,  $b$  的最大值为 0, 此时  $a$  的最

大值为  $-2$ , 最小值为  $-\frac{3}{2}\sqrt{4}$ .



二、填空题 (本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分)

11. 6, 8;                      12. 19, 10;  
13.  $\frac{\pi}{2}, 0$ ;                14. 32, 144;  
15.  $\frac{2}{3}$ ;                        16.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;                      17. (0, 2).

17. 提示: 由已知可得  $f(x) = x^2 - 4x + 2\lambda$  在区间  $(-\infty, \lambda)$  上必须要有零点, 故

$\Delta = 16 - 8\lambda \geq 0$  解得:  $\lambda \leq 2$ , 所以  $x = 4$  必为函数  $f(x)$  的零点, 故由已知可得:

$f(x) = x^2 - 4x + 2\lambda$  在区间  $(-\infty, \lambda)$  上仅有一个零点. 又  $f(x) = x^2 - 4x + 2\lambda$  在  $(-\infty, \lambda)$  上

单调递减, 所以  $f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda < 0$ , 解得  $\lambda \in (0, 2)$

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 74 分)

2019 年高三教学测试 数学参考答案 第 1 页 共 6 页

18. (本题满分 14 分) 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  三个内角  $A, B, C$  的对边, 且满足  $(a+b) \cdot (\sin A - \sin B) = (c-b) \cdot \sin C$ ,

(I) 求角  $A$  的大小;

(II) 当  $a=2$  时, 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

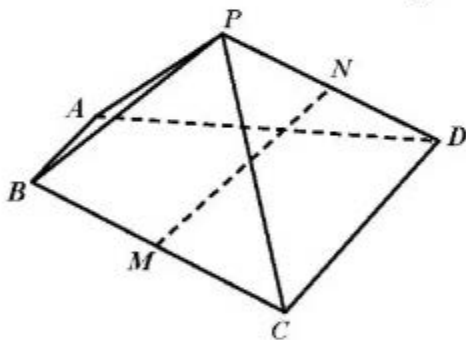
18. (I) 由正弦定理  $(a+b) \cdot (\sin A - \sin B) = (c-b) \cdot \sin C$  等价于  $(a+b)(a-b) = (c-b)c$ , 化简即为  $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ , 从而  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ , 所以  $A = \frac{\pi}{3}$ .

(II) 由  $a=2$ , 则  $4 = b^2 + c^2 - bc \geq bc$ , 故  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \sqrt{3}$ , 此时  $\triangle ABC$  是边长为 2 的正三角形.

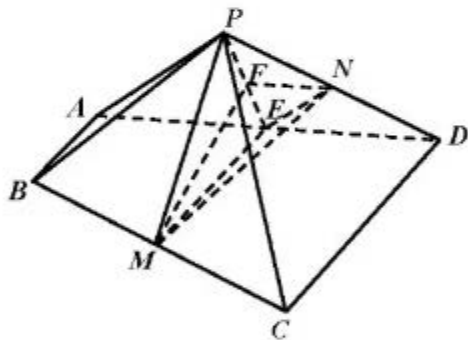
19. (本题满分 15 分) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $BC = CD = 2AB = 2$ ,  $\triangle PAD$  是等边三角形,  $M, N$  分别为  $BC, PD$  的中点.

(I) 求证:  $MN \parallel$  平面  $PAB$ ;

(II) 若二面角  $P-AD-C$  的大小为  $\frac{\pi}{3}$ , 求直线  $MN$  与平面  $PAD$  所成角的正切值.



(第 19 题图)



(第 19 题图)

19. (I) 取  $AD$  中点  $E$ , 连接  $EN, EM$ .

由于  $EN \parallel AP$ ,  $EM \parallel AB$ ,  $AP \cap AB = A$ ,  $EM \cap EN = E$ , 从而平面  $PAB \parallel$  平面  $EMN$ . 又  $MN \subseteq$  平面  $EMN$ , 从而  $MN \parallel$  平面  $PAB$ .

(II) 法一: 连接  $PM$ . 由于  $PE \perp AD$ ,  $ME \perp AD$ , 则  $\angle PEM$  是二面角  $P-AD-C$  的平面角,  $\angle PEM = 60^\circ$ ,  $\triangle PEM$  是边长为  $\frac{3}{2}$  的正三角形, 且  $AD \perp$  平面  $PEM$ .



又  $AD \subseteq$  平面  $PAD$ , 则平面  $PEM \perp$  平面  $PAD$ .

过点  $M$  作  $MF \perp PE$  于  $F$ , 则  $MF = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ,  $MF \perp$  平面  $PAD$ ,  $\angle MNF$  是直线  $MN$  与平面  $PAD$  所成角的平面角.

由于  $N, F$  分别是  $PD, PE$  的中点, 则  $NF = \frac{1}{2}DE = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 从而  $\tan \angle MNF = \frac{MF}{NF} = 3$ , 即直线  $MN$  与平面  $PAD$  所成角的正切值为 3.

法二: 连接  $PM$ . 由于  $PE \perp AD$ ,  $ME \perp AD$ , 则  $\angle PEM$  是二面角  $P-AD-C$  的平面角,  $\angle PEM = 60^\circ$ , 即  $\triangle PEM$  是边长为  $\frac{3}{2}$  的正三角形, 且  $AD \perp$  平面  $PEM$ .

又  $AD \subseteq$  平面  $ABCD$ , 则平面  $PEM \perp$  平面  $ABCD$ .

过点  $P$  作  $PO \perp ME$  于  $O$ , 则  $PO \perp$  平面  $ABCD$ .

过点  $O$  作  $OQ \parallel AD$ , 交  $CD$  于点  $Q$ , 则  $OQ \perp OM$ .

以点  $O$  为原点,  $OM, OQ, OP$  分别为  $x, y, z$  轴, 建

立空间直角坐标系  $O-xyz$ , 则  $P(0, 0, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ ,

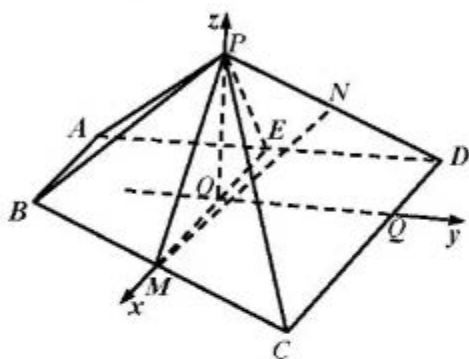
$A(-\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $D(-\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $M(\frac{3}{4}, 0, 0)$ ,  $N(-\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{8})$ ,  $\overrightarrow{MN} = (-\frac{9}{8}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{8})$ .

设平面  $PAD$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 则  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{4}z = 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{4}z = 0 \end{cases}$ , 解得

$\begin{cases} y = 0 \\ x = -\sqrt{3}z \end{cases}$ , 令  $z = 1$ , 则  $\vec{n} = (-\sqrt{3}, 0, 1)$ .

设直线  $MN$  与平面  $PAD$  所成角的平面角为  $\theta$ , 则  $\sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{MN}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $\tan \theta = 3$ , 即

直线  $MN$  与平面  $PAD$  所成角的正切值为 3.



(第 19 题图)

20. (本题满分 15 分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $2S_n = 3a_n - 1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = \frac{\log_3 a_{n+2}}{a_n}$ ,  $T_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 求证:  $T_n < \frac{15}{4}$ .

20. (I) 当  $n=1$  时  $a_1=1$ .

当  $n \geq 2$  时,  $\begin{cases} 2S_n = 3a_n - 1 \\ 2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 1 \end{cases}$ , 两式相减得:  $a_n = 3a_{n-1}$ .

故  $\{a_n\}$  是以 3 为公比的等比数列, 且  $a_1=1$ ,

所以  $a_n = 3^{n-1}$ .

(II) 由 (I) 得:  $b_n = \frac{n+1}{3^{n-1}}$ ,

由错位相减法

$$T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{2}{3^0} + \frac{3}{3^1} + \dots + \frac{n+1}{3^{n-1}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}T_n = \frac{2}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n+1}{3^n} \quad (2)$$

$$\text{两式相减得: } \frac{2}{3}T_n = 2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) - \frac{n+1}{3^n} = \frac{5}{2} - \frac{2n+5}{2 \cdot 3^n},$$

$$\text{求得: } T_n = \frac{15}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^{n-1}}.$$

所以  $T_n < \frac{15}{4}$ .

21. (本题满分 15 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的焦距为  $2\sqrt{3}$ , 且过点  $A(2, 0)$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 若点  $B(0, 1)$ , 设  $P$  为椭圆  $C$  上位于第三象限内一动点, 直线  $PA$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 直线  $PB$  与  $x$  轴交于点  $N$ , 求证: 四边形  $ABNM$  的面积为定值, 并求出该定值.

21. (I) 由  $2c=2\sqrt{3}$ , 且  $a=2$ , 求得  $c=\sqrt{3}$ , 所以  $b=1$ .

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ;

(II) 设  $P(x_0, y_0)$  ( $x_0 < 0, y_0 < 0$ ), 则  $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$ .

又  $A(2, 0), B(0, 1)$ , 所以直线  $PA$  的方程为  $y = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$ .

令  $x=0$ , 得  $y_M = -\frac{2y_0}{x_0 - 2}$ , 从而  $|BM| = 1 - y_M = 1 + \frac{2y_0}{x_0 - 2}$ .

直线  $PB$  的方程为  $y = \frac{y_0 - 1}{x_0}x + 1$ .

令  $y=0$ , 得  $x_N = -\frac{x_0}{y_0 - 1}$ , 从而  $|AN| = 2 - x_N = 2 + \frac{x_0}{y_0 - 1}$ .

所以四边形  $ABNM$  的面积

$$S = \frac{1}{2} |AN| \cdot |BM| = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{x_0}{y_0 - 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{2y_0}{x_0 - 2}\right) = \frac{x_0^2 + 4y_0^2 + 4x_0y_0 - 4x_0 - 8y_0 + 4}{2(x_0y_0 - x_0 - 2y_0 + 2)}$$

$$= \frac{4(x_0y_0 - x_0 - 2y_0 + 2)}{2(x_0y_0 - x_0 - 2y_0 + 2)} = 2$$

所以四边形  $ABNM$  的面积  $S$  为定值 2.

22. (本题 15 分) 已知函数  $f(x) = e^{2x} - ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ , 其中  $e$  为自然对数的底数).

(I) 若  $a > 0$  时, 求函数  $f(x)$  的单调递增区间;

(II) 若函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ .

(i) 如果  $a = b$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(ii) 如果  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 求证:  $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$ .

22. (I) 由题意得  $f'(x) = 2e^{2x} - a$ , 当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}$ , 函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $\left(\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}, +\infty\right)$ ;

(II) (i) 方法一: 由 (I) 知,  $f'(x) = 2e^{2x} - a$ ,

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增, 不合题意, 所以  $a > 0$ .

又  $\ominus x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ ;  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,

$\therefore$  函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2})$  递减, 函数  $f(x)$  在

$(\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}, +\infty)$  递增,  $\therefore f(\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}) < 0$ ,

$$\therefore f(\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}) = e^{\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}} - \frac{a}{2} \ln \frac{a}{2} + a < 0, \text{ 得 } a > 2e^3.$$

方法二: 如果  $a = b$ , 则  $f(x) = e^{2x} - ax + a$ ,  $\ominus f(1) \neq 0$ ,  $f(x) = 0$  时, 得  $a = \frac{e^{2x}}{x-1}$  ( $x \neq 1$ ),

$$\text{令 } g(x) = \frac{e^{2x}}{x-1}, \quad g'(x) = \frac{2e^{2x}(x-1) - e^{2x}}{(x-1)^2} = \frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

当  $x < 1$  或  $1 < x < \frac{3}{2}$  时  $g'(x) < 0$ , 故  $g(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  和  $(1, \frac{3}{2})$  上为增函数,

当  $x > \frac{3}{2}$  时  $g'(x) > 0$ , 故  $g(x)$  在区间  $(\frac{3}{2}, +\infty)$  上为减函数.

$\therefore$  当  $x < 1$  时  $g(x) < 0$ , 当  $1 < x < \frac{3}{2}$  时  $g(x) > 0$ ,  $a > g(\frac{3}{2}) = 2e^3$ ;

(ii) 由题意得:

$$\begin{cases} e^{2x_1} - ax_1 + b = 0 \\ e^{2x_2} - ax_2 + b = 0 \end{cases}, \text{ 两式相减, 得 } a = \frac{e^{2x_2} - e^{2x_1}}{x_2 - x_1},$$

不妨设  $x_1 < x_2$ ,  $f'(x) = 2e^{2x} - a$ , 则

$$f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) = 2e^{x_1 + x_2} - \frac{e^{2x_2} - e^{2x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{e^{x_1 + x_2}}{x_2 - x_1} [2(x_2 - x_1) + e^{x_1 - x_2} - e^{x_2 - x_1}]$$

令  $t = x_2 - x_1 > 0$ ,  $h(t) = 2t - e^t + e^{-t}$ ,  $\ominus h'(t) = 2 - e^t - e^{-t} = 2 - (e^t + e^{-t}) < 0$ ,

$\therefore h(t)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,  $\therefore h(t) < h(0) = 0$ , 即  $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$ .

命题人: 沈志荣、张启源、邱东方、张艳宗

2019年8月