2022 北京高中合格考数学

（第一次）

考生须知：

1．考生要认真填写考场号和座位序号．

2．本试卷共 7 页，分为两部分：第一部分为选择题，共 60 分；第二部分为非选择题，共 40 分．

3．试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．第一部分必须用 2B 铅笔作答，第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答．

4．考试结束后，考生应将试卷、答题卡放在桌面上，待监考员收回．

第一部分（选择题共 60 分）

一、选择题共 20 小题，每小题 3 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,2\}, B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{-2,-1\}$　　B. $\{-2,0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,2\}$

2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1,-2)$，则 $z=$（　）

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $2-\mathrm{i}$　　C. $1+2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

3. $\sin\left(-45^\circ\right)=$（　）

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

4 已知函数 $f(x)=x^2, x\in\mathbf{R}$，则（　）

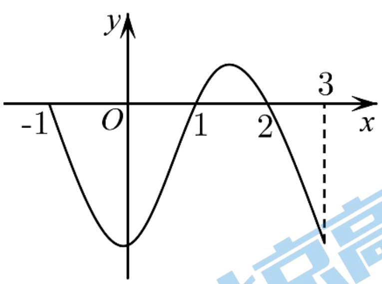
A. $f(x)$ 是奇函数　　B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数　　D. $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

5. $\sin\theta\cos\theta=$（　）

A. $\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$　　B. $\dfrac{1}{2}\cos 2\theta$　　C. $\sin 2\theta$　　D. $\cos 2\theta$

6. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为（　）



A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

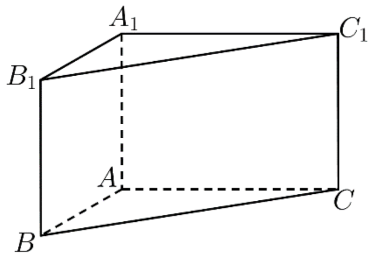
7. 某天甲地降雨的概率为 0.2，乙地降雨的概率为 0.3．假定这一天甲、乙两地是否降雨相互之间没有影响，则两地都降雨的概率为（　）

A. 0.24　　B. 0.14　　C. 0.06　　D. 0.01

8. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $f(x)=x$　　B. $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　C. $f(x)=\log_2 x$　　D. $f(x)=\sin x$

9. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形．若 $AB=AC=4, AA_1=3$，则该直三棱柱的体积为（　）



A. 6　　B. 12　　C. 18　　D. 24

10. 已知向量 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(1,1)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

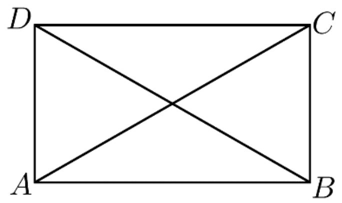
11. “四边形 $ABCD$ 为矩形”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的（　）

A 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

12. 函数 $f(x)=\log_2(x-3)$ 的定义域为（　）

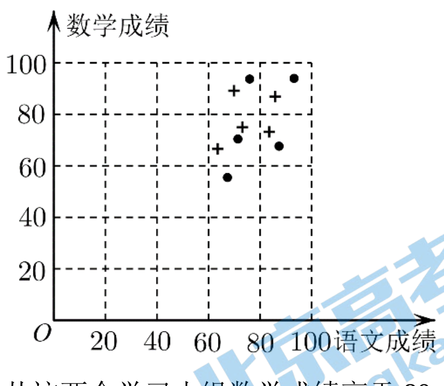
A. $(3,+\infty)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,3)$　　D. $(-\infty,0)$

13. 如图，已知四边形 $ABCD$ 为矩形，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$（　）



A. $\overrightarrow{BD}$　　B. $\overrightarrow{DB}$　　C. $\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{CA}$

14. 甲、乙两个学习小组各有 5 名同学，两组同学某次考试的语文、数学成绩如下图所示，其中“+”表示甲组同学，“*”表示乙组同学．



从这两个学习小组数学成绩高于 80 分的同学中任取一人，此人恰为甲组同学的概率是（　）

A. 0.25　　B. 0.3　　C. 0.5　　D. 0.75

15. 设 m，n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列命题中的真命题为（　）

A. 若 $m//\alpha, n//\alpha$，则 $m//n$　　B. 若 $m\perp\alpha, n\perp\alpha$，则 $m//n$

C. 若 $m//\alpha, m//\beta$，则 $\alpha//\beta$　　D. 若 $m//\alpha, m\subset\beta$，则 $\alpha//\beta$

16. 在$\triangle ABC$中，$a=1,c=2,B=60^\circ$，则$b=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

17. 已知a，b是实数，且$a>b$，则（　）

A. $-a<-b$　　B. $a^2<b^2$　　C. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D. $|a|>|b|$

18. 已知$x>0,y>0$，且$xy=1$，则$x+y$的最小值为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

19. 已知函数$f(x)=2^x$，$x\in[0,+\infty)$，则$f(x)$（　）

A. 有最大值，有最小值　　B. 有最大值，无最小值

C. 无最大值，有最小值　　D. 无最大值，无最小值

20. 对于正整数n，记不超过n的正奇数的个数为$K(n)$，如$K(1)=1$，则$K(2022)=$（　）

A. 2022　　B. 2020　　C. 1011　　D. 1010

第二部分（非选择题 共40分）

二、填空题共4小题，每小题3分，共12分．

21. 计算：$\lg 2+\lg 5=$__________．

22. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2x, x<0,\\ \sqrt{x}, x\geq 0,\end{cases}$ 则$f(-1)=$________；方程$f(x)=1$的解为________．

23. 某校举行演讲比赛，五位评委对甲、乙两位选手　评分如下：

甲 8.1 7.9 8.0 7.9 8.1

乙 7.9 8.0 8.1 8.5 7.5

记五位评委对甲、乙两位选手评分数据的方差分别为$S_{甲}^2,S_{乙}^2$，则：$S_{甲}^2$______$S_{乙}^2$（填“>”，“=”或“<”）．

24. 对于温度的计量，世界上大部分国家使用摄氏温标（℃），少数国家使用华氏温标（℉），两种温标间有如下对应关系：

摄氏温标（℃）	…	0	10	20	30	40	50	…
华氏温标（℉）	…	32	50	68	86	104	122	…

根据表格中数值间呈现的规律，给出下列三个推断：

①25℃对应77℉；

②-20℃对应-4℉；

③存在某个温度，其摄氏温标的数值等于其华氏温标的数值．

其中所有正确推断的序号是____________．

三、解答题共4小题，共28分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

25. 已知函数$f(x)=x^2+mx+1$（m是常数）的图象过点$(1,2)$．

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）求不等式$f(x)<2x+1$的解集．

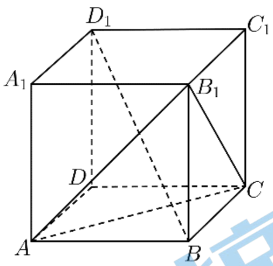
26. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

（1）写出 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

27 阅读下面题目及其解答过程.

如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.



（I）求证：$AC\perp BD_1$；

（II）求证：直线 D_1D 与平面 AB_1C 不平行.

解：（I）如图，连接 BD, B_1D_1 .

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

所以 $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$.

所以①__________.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

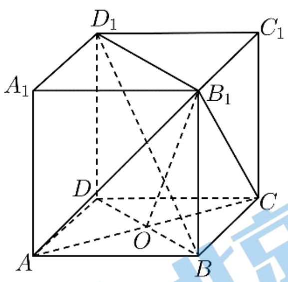
所以②__________.

因为 $D_1D\cap BD=D$，

所以③__________.

所以 $AC\perp BD_1$.

（II）如图，设 $AC\cap BD=O$，连接 B_1O .



假设 D_1D// 平面 AB_1C .

因为 $D_1D\subset$ 平面 D_1DBB_1，且平面 $AB_1C\cap$ 平面 $D_1DBB_1=$ ④__________，

所以⑤__________.

又 $D_1D//B_1B$，

这样过点 B_1 有两条直线 B_1O, B_1B 都与 D_1D 平行，显然不可能.

所以直线 D_1D 与平面 AB_1C 不平行.

以上题目的解答过程中，设置了①~⑤五个空格，如下的表格中为每个空格给出了两个选项，其中只有一个符合推理，请选出符合推理的选项，并填写在答题卡的指定位置（只需填写"A"或"B"）.

空格序号	选项
①	A．$D_1D\perp AC$　　B．$D_1D\perp BD$
②	A．$AB\perp BC$　　B．$AC\perp BD$
③	A．$BD_1\perp$ 平面 AB_1C　　B．$AC\perp$ 平面 D_1DBB_1
④	A．B_1O　　B．B_1B
⑤	A．$D_1D//B_1O$　　B．D_1D 与 B_1O 为相交直线

28. 给定集合 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(x)$ 为定义在 D 上的函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$，且对任意 $x\in D$，都有____________.

从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，补充在横线处，使 $f(x)$ 存在且唯一确定.

条件①：$f(-x)+f(x)=1$；

条件②：$f(-x)\cdot f(x)=1$；

条件③：$f(-x)-f(x)=1$.

解答下列问题：

（1）写出 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 的值；

（2）写出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调区间；

（3）设 $g(x)=f(x)-m(m\in\mathbf{R})$，写出 $g(x)$ 的零点个数.

参考答案

一、选择题共 20 小题，每小题 3 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,2\},B=\{0,1,2\}$，则 $A\bigcap B=$（　）

A. $\{-2,-1\}$　　B. $\{-2,0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,2\}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据集合的交集运算，可求得答案.

【详解】集合 $A=\{-2,-1,0,2\},B=\{0,1,2\}$，

故 $A\cap B=\{0,2\}$，

故选：D

2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1,-2)$，则 $z=$（　）

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $2-\mathrm{i}$　　C. $1+2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数　几何表示即得.

【详解】∵复数 z 对应的点的坐标是 $(1,-2)$，

$\therefore z=1-2\mathrm{i}$.

故选：D.

3. $\sin\left(-45^\circ\right)=$（　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用诱导公式求得正确答案.

【详解】$\sin\left(-45^\circ\right)=-\sin 45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B

4. 已知函数 $f(x)=x^2,x\in\mathbf{R}$，则（　）

A. $f(x)$ 是奇函数　　B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数　　D. $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

【答案】B

【解析】

【分析】由函数奇偶性的定义即可判断答案.

【详解】由题意，$x\in\mathrm{R}, f\left(-x\right)=\left(-x\right)^2=x^2=f\left(x\right)$，即函数为偶函数.

故选：B.

5. $\sin\theta\cos\theta=$（　）

A. $\frac{1}{2}\sin 2\theta$　　B. $\frac{1}{2}\cos 2\theta$　　C. $\sin 2\theta$　　D. $\cos 2\theta$

【答案】A

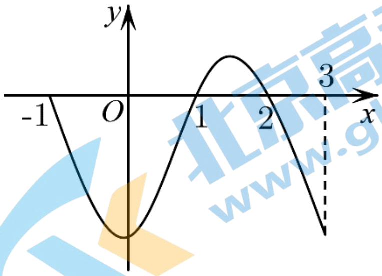
【解析】

【分析】利用二倍角公式即得.

【详解】由二倍角公式可得，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$.

故选：A.

6. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为（　）



A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

【答案】C

【解析】

【分析】结合图象确定正确选项.

【详解】由图象可知，当 $x\in(1,2)$ 时，$f(x)>0$.

故选：C

7. 某天甲地降雨的概率为 0.2，乙地降雨的概率为 0.3．假定这一天甲、乙两地是否降雨相互之间没有影响，则两地都降雨的概率为（　）

A. 0.24　　B. 0.14　　C. 0.06　　D. 0.01

【答案】C

【解析】

【分析】根据相互独立事件概率计算公式，计算出正确答案.

【详解】依题意，两地都降雨的概率为 $0.2\times0.3=0.06$.

故选：C

8. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $f(x)=x$　　B. $f(x)=\frac{1}{x}$　　C. $f(x)=\log_2 x$　　D. $f(x)=\sin x$

【答案】B

【解析】

【分析】根据基本初等函数的单调性即可求解.

【详解】 $f(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 不符题意；

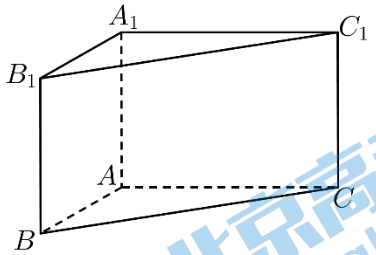
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 B 符合题意；

$f(x)=\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 不符题意；

$f(x)=\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调，故 D 不符题意.

故选：B.

9. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形．若 $AB=AC=4, AA_1=3$，则该直三棱柱的体积为（　）



A. 6　　　　B. 12　　　　C. 18　　　　D. 24

【答案】D

【解析】

【分析】根据棱柱的体积计算公式，可直接求得答案.

【详解】因为在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$AB=AC=4, AA_1=3$，则 $\angle BAC$ 为直角，

故可得：$V_{ABC-A_1B_1C_1}=S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\times AA_1=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times 3=24$，

故选：D

10. 已知向量 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(1,1)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】由平面向量数量积的坐标运算即可求得答案.

【详解】 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 1+0\times 1=1$.

故选：B.

11. “四边形 $ABCD$ 为矩形”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】利用充分条件与必要条件的定义判断即可.

【详解】若四边形 $ABCD$ 是矩形，则它是平行四边形，

反之,若四边形 $ABCD$ 为平行四边形，四边形 $ABCD$ 不一定是矩形，

所以“四边形 $ABCD$ 为矩形”是“四边形 $ABCD$ 为平行四边形”的充分不必要条件.

故选：A.

12. 函数 $f(x)=\log_2(x-3)$ 的定义域为（   ）

A. $(3,+\infty)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,3)$　　D. $(-\infty,0)$

【答案】A

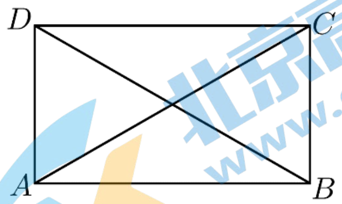
【解析】

【分析】由真数大于 0 可得.

【详解】由 $x-3>0$，得 $x>3$.

故选：A

13. 如图，已知四边形 $ABCD$ 为矩形，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$（   ）



A. $\overrightarrow{BD}$　　B. $\overrightarrow{DB}$　　C. $\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{CA}$

【答案】C

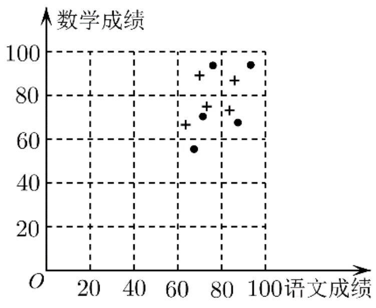
【解析】

【分析】根据向量加法的平行四边形法则求得正确答案.

【详解】根据向量加法的平行四边形法则可知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

故选：C

14. 甲、乙两个学习小组各有 5 名同学，两组同学某次考试的语文、数学成绩如下图所示，其中“+”表示甲组同学，“*”表示乙组同学.



从这两个学习小组数学成绩高于 80 分的同学中任取一人，此人恰为甲组同学的概率是（   ）

A. 0.25　　B. 0.3　　C. 0.5　　D. 0.75

【答案】C

【解析】

【分析】利用古典概型概率计算公式，计算出所求概率.

【详解】根据图象可知，两个小组高于 80 分的同学各有 2 人，

所以从中任取一人，此人恰为甲组同学的概率是$\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$.

故选：C

15. 设 m，n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，则下列命题中的真命题为（　）

A. 若$m // \alpha, n // \alpha$，则$m // n$　　B. 若$m \perp \alpha, n \perp \alpha$，则$m // n$

C. 若$m // \alpha, m // \beta$，则$\alpha // \beta$　　D. 若$m // \alpha, m \subset \beta$，则$\alpha // \beta$

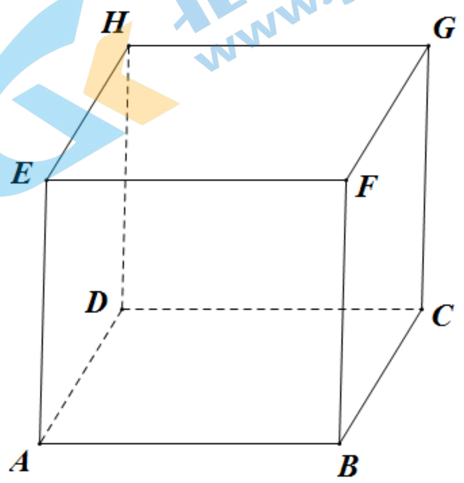
【答案】B

【解析】

【分析】在正方体中取直线和平面可排除 ACD，由线面垂直的性质可得 B 正确.

【详解】在正方体 $ABCD-EFGH$ 中，记底面 $ABCD$ 为α，EF 为 m，EH 为 n，显然 A 不正确；记底面 $ABCD$ 为α，EF 为 m，平面 $CDHG$ 为β，故排除 C；记底面 $ABCD$ 为α，EF 为 m，平面 $ABFE$ 为β，可排除 D；由线面垂直的性质可知 B 正确.

故选：B



16. 在$\triangle ABC$中，$a=1, c=2, B=60°$，则$b=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据由余弦定理，可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，代入数据即得.

【详解】由余弦定理，得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，

$\therefore\ b=\sqrt{3}$.

故选：D.

17. 已知 a，b 是实数，且$a>b$，则（　）

A. $-a<-b$　　B. $a^2<b^2$　　C. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D. $|a|>|b|$

【答案】A

【解析】

【分析】根据不等式的性质确定正确答案.

【详解】由于 $a>b$，所以 $-a<-b$，A 选项正确.

$a=1,b=-1,a^2=b^2,|a|=|b|$，BD 选项错误.

$a=2,b=1,\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，C 选项错误.

故选：A

18. 已知 $x>0,y>0$，且 $xy=1$，则 $x+y$ 的最小值为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】由基本不等式即可求得答案.

【详解】因为 $x,y>0$，所以 $x+y\geq 2\sqrt{xy}=2$，当且仅当 $x=y=1$ 时取“=”.

故选：B.

19. 已知函数 $f(x)=2^x$，$x\in[0,+\infty)$，则 $f(x)$（　）

A. 有最大值，有最小值　　B. 有最大值，无最小值

C. 无最大值，有最小值　　D. 无最大值，无最小值

【答案】C

【解析】

【分析】根据指数函数的知识确定正确选项.

【详解】$f(x)=2^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，

所以最小值为 $f(0)$，没有最大值.

故选：C

20. 对于正整数 n，记不超过 n 的正奇数的个数为 $K(n)$，如 $K(1)=1$，则 $K(2022)=$（　）

A. 2022　　B. 2020　　C. 1011　　D. 1010

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意求出正奇数的个数即可.

【详解】由题意，不超过 2022 的正奇数有 $\frac{2022}{2}=1011$ 个.

故选：C.

第二部分（非选择题 共 40 分）

二、填空题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分.

21. 计算：$\lg 2+\lg 5=$___________.

【答案】1

【解析】

【详解】$\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$.

故答案为 1

22. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2x, x<0,\\ \sqrt{x}, x\geq 0,\end{cases}$ 则 $f(-1)=$________；方程 $f(x)=1$ 的解为________.

【答案】 ①. -2 ②. 1

【解析】

【分析】根据分段函数的性质求解即可.

【详解】$f(-1)=2\times(-1)=-2$；

$x<0$ 时，$f(x)<0$，故 $f(x)=1>0$ 时，$x\geq 0$，则 $\sqrt{x}=1$，解得 $x=1$.

故答案为：-2；1.

23. 某校举行演讲比赛，五位评委对甲、乙两位选手的评分如下：

甲 8.1 7.9 8.0 7.9 8.1

乙 7.9 8.0 8.1 8.5 7.5

记五位评委对甲、乙两位选手评分数据的方差分别为 $S_{甲}^2, S_{乙}^2$，则：$S_{甲}^2$______$S_{乙}^2$（填“>”，“=”或“<”）.

【答案】<

【解析】

【分析】计算出 $S_{甲}^2, S_{乙}^2$，由此确定正确答案.

【详解】甲 得分平均值为 $\dfrac{8.1+7.9+8.0+7.9+8.1}{5}=8.0$，

$$S_{甲}^2=\frac{1}{5}\left(0.1^2\times 4\right)=\frac{0.04}{5}$$

乙的得分平均值为 $\dfrac{7.9+8.0+8.1+8.5+7.5}{5}=8.0$，

$$S_{乙}^2=\frac{1}{5}\left(0.1^2\times 2+0.5^2\times 2\right)=\frac{0.52}{5},$$

所以 $S_{甲}^2<S_{乙}^2$.

故答案为：<

24. 对于温度的计量，世界上大部分国家使用摄氏温标（℃），少数国家使用华氏温标（℉），两种温标间有如下对应关系：

摄氏温标（℃）	…	0	10	20	30	40	50	…
华氏温标（℉）	…	32	50	68	86	104	122	…

根据表格中数值间呈现的规律，给出下列三个推断：

①25℃对应77℉；

②-20℃对应-4℉；

③存在某个温度，其摄氏温标的数值等于其华氏温标的数值.

其中所有正确推断的序号是______.

【答案】①②③

【解析】

【分析】根据条件可得 $y=1.8x+32$，然后逐项分析即得.

【详解】设摄氏温标为 x ℃，对应的华氏温标为 y ℉，

根据表格数据可知 $\dfrac{50-32}{10-0}=1.8,\dfrac{68-32}{20-0}=1.8,\dfrac{86-32}{30-0}=1.8,\cdots$

$\therefore \dfrac{y-32}{x-0}=1.8$，即 $y=1.8x+32$，

$\therefore x=25$℃时，$y=77$℉，$x=-20$℃时，$y=-4$℉，故①②正确；

由 $y=1.8x+32=x$，可得 $x=-40$，即摄氏温标 -40℃对应的华氏温标为 -40℉，故③正确.

故答案为：①②③.

三、解答题共 4 小题，共 28 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

25. 已知函数 $f(x)=x^2+mx+1$（m 是常数）的图象过点 $(1,2)$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）求不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集.

【答案】（1）$f(x)=x^2+1$；

（2）$(0,2)$.

【解析】

【分析】（1）把点代入解析式可得 $m=0$，即得；

（2）利用一元二次不等式的解法即得.

小问 1 详解】

由题意，$f(1)=m+2=2$，

所以 $m=0$.

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^2+1$.

【小问 2 详解】

不等式 $f(x)<2x+1$ 等价于 $x^2-2x<0$.

解得 $0<x<2$.

所以不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集为 $(0,2)$.

26. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

（1）写出 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

【答案】（1）2π

（2）$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据解析式写出最小正周期；

（2）根据正弦函数的单调性判断函数在区间上的单调性，从而求出最值.

【小问 1 详解】

$f(x)$ 的最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$.

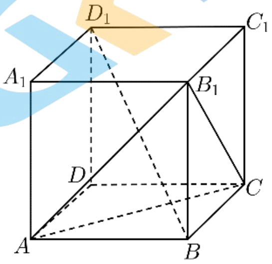
【小问 2 详解】

因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{3}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{6}$.

当 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$.

27. 阅读下面题目及其解答过程.

如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$.



（I）求证：$AC\perp BD_1$；

（II）求证：直线 D_1D 与平面 AB_1C 不平行.

解：（I）如图，连接 BD,B_1D_1 .

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

所以 $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$.

所以①____________.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，

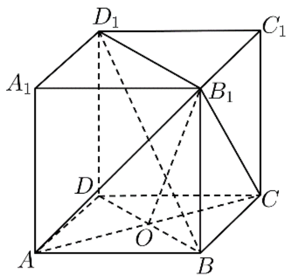
所以②___________.

因为 $D_1D\cap BD=D$，

所以③______________.

所以 $AC\perp BD_1$.

（II）如图，设 $AC\bigcap BD=O$，连接 B_1O .



假设 $D_1D//$ 平面 AB_1C .

因为 $D_1D\subset$ 平面 D_1DBB_1，且平面 $AB_1C\cap$ 平面 $D_1DBB_1=$④____________，

所以⑤__________.

又 $D_1D//B_1B$，

这样过点 B_1 有两条直线 B_1O, B_1B 都与 D_1D 平行，显然不可能.

所以直线 D_1D 与平面 AB_1C 不平行.

以上题目的解答过程中，设置了①~⑤五个空格，如下的表格中为每个空格给出了两个选项，其中只有一个符合推理，请选出符合推理的选项，并填写在答题卡的指定位置（只需填写“A”或“B”）.

空格序号	选项
①	A． $D_1D\perp AC$　　B． $D_1D\perp BD$
②	A． $AB\perp BC$　　B． $AC\perp BD$
③	A． $BD_1\perp$ 平面 AB_1C　　B． $AC\perp$ 平面 D_1DBB_1
④	A． B_1O　　B． B_1B
⑤	A． $D_1D//B_1O$　　B． D_1D 与 B_1O 为相交直线

【答案】（I）①A ②B ③B；（II）④A ⑤A

【解析】

【分析】结合线面垂直、线面平行的知识对“解答过程”进行分析，从而确定正确答案.

【详解】要证明 $AC\perp BD_1$，可通过证明 $AC\perp$ 平面 D_1DBB_1 来证得，

要证明 $AC\perp$ 平面 D_1DBB_1，可通过证明 $AC\perp BD, D_1D\perp AC$ 来证得，

所以①填 A，②填 B，③填 B.

平面 AB_1C 与平面 D_1DBB_1 的交线为 B_1O，所以④填 A，

由于 $D_1D//$ 平面 AB_1C，因为 $D_1D\subset$ 平面 D_1DBB_1，且平面 $AB_1C\cap$ 平面 $D_1DBB_1=B_1O$，

根据线面平行 性质定理可知，$D_1D//B_1O$，所以⑤填 A.

28. 给定集合 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(x)$ 为定义在 D 上的函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$，且对任意 $x\in D$，都有___________.

从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，补充在横线处，使 $f(x)$ 存在且唯一确定.

条件①：$f(-x)+f(x)=1$；

条件②：$f(-x)\cdot f(x)=1$；

条件③：$f(-x)-f(x)=1$.

解答下列问题：

（1）写出 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 的值；

（2）写出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调区间；

（3）设 $g(x)=f(x)-m(m\in\mathbf{R})$，写出 $g(x)$ 的零点个数.

【答案】答案详见解析

【解析】

【分析】判断条件③不合题意.选择条件①②、则先求得当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)$ 的表达式，然后结合函数的解析式、单调性、零点，对（1）（2）（3）进行分析，从而确定正确答案.

【详解】依题意 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}$.

对于条件③，对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)-f(x)=1$，

以 $-x$ 替换 x，则 $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=1$，这与 $f(-x)-f(x)=1$ 矛盾，所以条件③不合题意.

若选条件①，当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f\left(x\right)=1-f\left(-x\right)=1-\dfrac{-4x}{x^2+4}=1+\dfrac{4x}{x^2+4}$.

（1）$f\left(-1\right)=\dfrac{-4}{1+4}=-\dfrac{4}{5}, f\left(1\right)=1+\dfrac{4}{1+4}=\dfrac{9}{5}$.

（2）对于函数 $h\left(x\right)=\dfrac{4x}{x^2+4}\left(x\neq0\right)$，

任取 $x_1<x_2<0$，$h\left(x_1\right)-h\left(x_2\right)=\dfrac{4x_1}{x_1^2+4}-\dfrac{4x_2}{x_2^2+4}=4\times\dfrac{x_1\left(x_2^2+4\right)-x_2\left(x_1^2+4\right)}{\left(x_1^2+4\right)\left(x_2^2+4\right)}$

$=4\times\dfrac{x_1x_2^2+4x_1-x_1^2x_2-4x_2}{\left(x_1^2+4\right)\left(x_2^2+4\right)}=4\times\dfrac{x_1x_2\left(x_2-x_1\right)-4\left(x_2-x_1\right)}{\left(x_1^2+4\right)\left(x_2^2+4\right)}$

$=4\times\dfrac{(x_1x_2-4)\left(x_2-x_1\right)}{\left(x_1^2+4\right)\left(x_2^2+4\right)}$，

其中 $x_2-x_1>0$，当 $x_1<x_2<-2$ 时，$x_1x_2-4>0$，$h\left(x_1\right)-h\left(x_2\right)>0, h\left(x_1\right)>h\left(x_2\right)$，

所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-2\right)$ 上递减.

当 $-2<x_1<x_2<0$ 时，$x_1x_2-4<0$，$h(x_1)-h(x_2)<0, h(x_1)<h(x_2)$，

所以 $h(x)$ 在 $(-2,0)$ 上递增.

所以在区间 $(-\infty,0)$，$h(-2)\le h(x)<0, -1\le h(x)<0$.

同理可证得：$h(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减，$0<h(x)\le h(2), 0<h(x)\le 1$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=1+\dfrac{4x}{x^2+4}=1+h(x)$，

由上述分析可知，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增，在 $(2,+\infty)$ 上递减.且 $1<f(x)\le 2$.

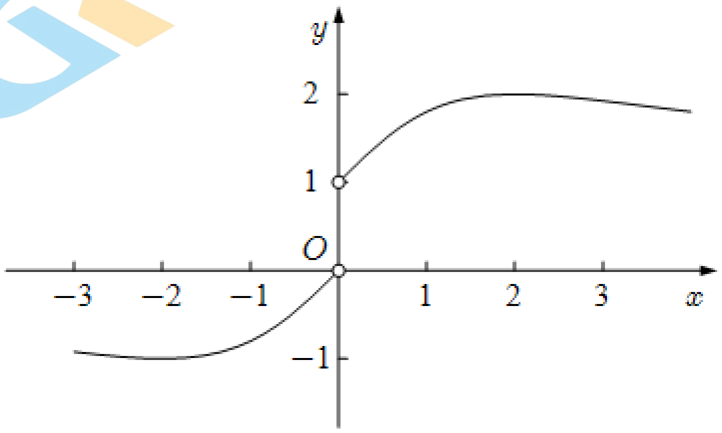
（3）$g(x)=f(x)-m=0, m=f(x)$，

由（2）的分析可画出 $f(x)$ 的大致图象如下图所示，

所以，当 $m<-1$ 或 $0\le m\le 1$ 或 $m>2$ 时，$g(x)$ 的零点个数是 0；

当 $m=-1$ 或 $m=2$ 时，$g(x)$ 的零点个数是 1；

当 $-1<m<0$ 或 $1<m<2$ 时，$g(x)$ 的零点个数是 2.



若选条件②，当 $x>0$ 时，$-x<0$，

由 $f(-x)\cdot f(x)=1$ 得 $f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}=\dfrac{x^2+4}{-4x}$，

（1）$f(-1)=\dfrac{-4}{1+4}=-\dfrac{4}{5}, f(1)=\dfrac{1+4}{-4}=-\dfrac{5}{4}$.

（2）对于函数 $h(x)=\dfrac{4x}{x^2+4}(x<0)$，

根据上述分析可知：$h(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上递减，在 $(-2,0)$ 上递增，

且在区间 $(-\infty,0)$，$h(-2)\le h(x)<0, -1\le h(x)<0$.

对于 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{-4x}(x>0)$，任取 $0<x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^2+4}{-4x_1}-\frac{x_2^2+4}{-4x_2}=\frac{1}{4}\left(\frac{x_2^2+4}{x_2}-\frac{x_1^2+4}{x_1}\right)$$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{x_1x_2^2-x_1^2x_2+4(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x_1x_2(x_2-x_1)-4(x_2-x_1)}{x_1x_2}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(x_1x_2-4)(x_2-x_1)}{x_1x_2}$.

其中 $x_2-x_1>0$.当 $0<x_1<x_2<2$ 时，$x_1x_2-4<0, f(x_1)-f(x_2)<0, f(x_1)<f(x_2)$，

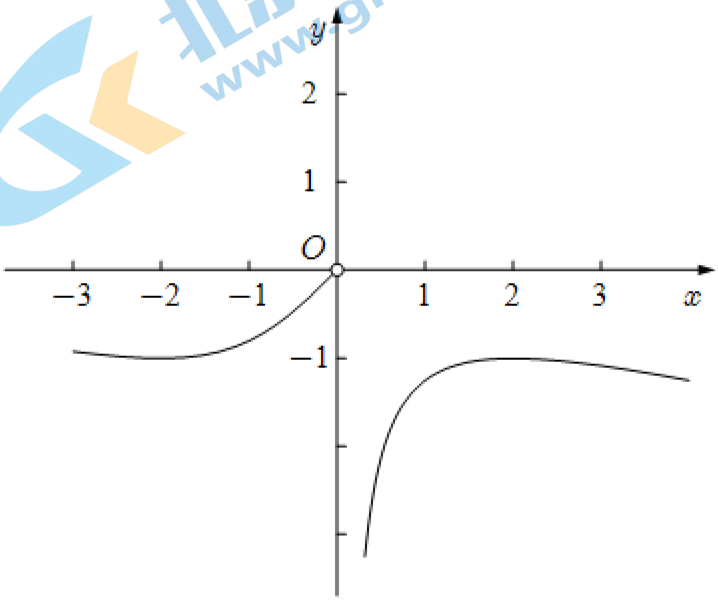
$f(x)$ 递增；当 $2<x_1<x_2$ 时，$x_1x_2-4>0, f(x_1)-f(x_2)>0, f(x_1)>f(x_2)$，$f(x)$ 递减.

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(0,2)$，减区间为 $(2,+\infty)$.且 $f(x)\le f(2)=-1$.

（3）$g(x)=f(x)-m=0, m=f(x)$，

结合上述分析画出 $f(x)$ 的大致图象如下图所示，

所以当 $m\ge 0$ 时，$g(x)$ 的零点个数是 0；当 $m<0$ 时，$g(x)$ 的零点个数是 2.



【点睛】利用函数的单调性的定义求函数的单调性，主要是计算出 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号.求解函数零点问题，可利用分离参数法，结合函数图象来进行求解.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。