绝密★本科目考试启用前

2022 北京高考真题

数　　学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\{x|-3<x<3\}$，集合 $A=\{x|-2<x\le 1\}$，则 $C_U A=$

（A）$(-2,1]$　　（B）$(-3,-2)\cup[1,3)$

（C）$[-2,1)$　　（D）$(-3,-2]\cup(1,3)$

（2）若复数 z 满足 $i\cdot z=3-4i$，则 $|z|=$

（A）1　　（B）5

（C）7　　（D）25

（3）若直线 $2x+y-1=0$ 是圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴，则 $a=$

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$-\frac{1}{2}$

（C）1　　（D）-1

（4）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$,则对任意实数 x，有

（A）$f(-x)+f(x)=0$　　（B）$f(-x)-f(x)=0$

（C）$f(-x)+f(x)=1$　　（D）$f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

（5）已知函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$，则

（A）$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减　　（B）$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增

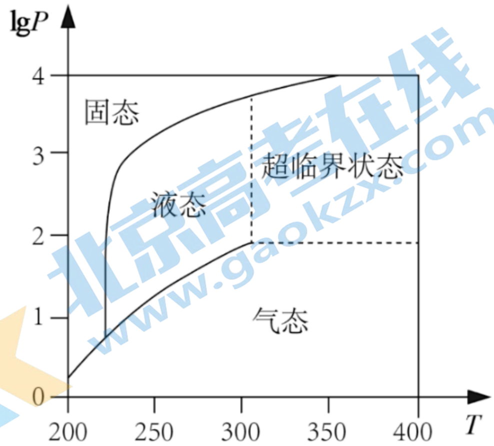
（C）$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减　　（D）$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递增

（6）设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列，则“$\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）在北京冬奥会上，国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术，为实现绿色冬奥作出了贡献，如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系，其中 T 表示温度，单位是 K；P 表示压强，单位是 bar，下列结论中正确的是



（A）当 $T=220$，$P=1026$ 时，二氧化碳处于液态

（B）当 $T=270$，$P=128$ 时，二氧化碳处于气态

（C）当 $T=300$，$P=9987$ 时，二氧化碳处于超临界状态

（D）当 $T=360$，$P=729$ 时，二氧化碳处于超临界状态

（8）若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_0+a_2+a_4=$

（A）40　　　　（B）41

（C）-40　　　　（D）-41

（9）已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6，S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合，设集合 $T=\{Q\in S\,|\,PQ\leqslant 5\}$，则 T 表示的区域的面积为

（A）$\dfrac{3\pi}{4}$　　　　（B）π

（C）2π　　　　（D）3π

（10）在 $\triangle ABC$ 中，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90^\circ$．P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是

（A）$[-5,3]$　　　　（B）$[-3,5]$

（C）$[-6,4]$　　　　（D）$[-4,6]$

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是________.

（12）已知双曲线 $y^2+\dfrac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，则 $m=$________.

（13）若函数 $f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一个零点为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $A=$______；$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=$________.

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a\\(x-2)^2, & x\geqslant a\end{cases}$，若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为________.

（15）已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前n项和S_n，满足$a_n \cdot S_n = 9(n=1,2,\cdots)$给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$的第 2 项小于 3；　　②$\{a_n\}$为等比数列；

③$\{a_n\}$为递减数列；　　④$\{a_n\}$中存在小于$\dfrac{1}{100}$的项。

其中所有正确结论的序号是_________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

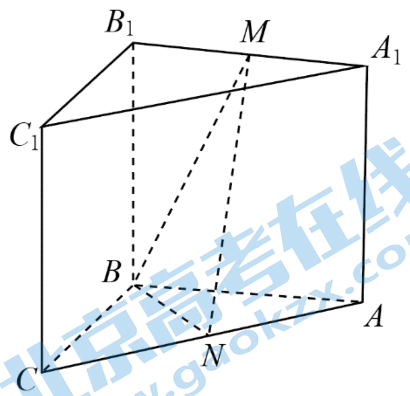
在$\triangle ABC$中，$\sin 2C = \sqrt{3}\sin C$.

（I）求$\angle C$；

（II）若$b=6$，且$\triangle ABC$的面积为$6\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面BCC_1B_1为正方形，平面$BCC_1B_1 \perp$平面ABB_1A_1，$AB=BC=2$，M,N分别为A_1B_1，AC的中点.



（I）求证：MN // 平面BCC_1B_1；

（II）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求直线AB与平面BMN所成角的正弦值。

条件①：$AB \perp MN$；

条件②：$BM = MN$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分。

（18）（本小题 13 分）

在校运动会上，只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛，比赛成绩达到 9.50m 以上（含 9.50m）的同学将获得优秀奖，为预测获得优秀奖的人数及冠军得主，收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩，并整理得到如下数据（单位：m）：

甲：9.80，9.70，9.55，9.54，9.48，9.42，9.40，9.35，9.30，9.25；

乙：9.78，9.56，9.51，9.36，9.32，9.23；

丙：9.85，9.65，9.20，9.16.

假设用频率估计概率，且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立

（I）估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率；

（II）设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数，估计X的数学期望EX；

（III）在校运动会铅球比赛中，甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大？（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$．

（I）求椭圆 E 的方程：

（II）过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B,C，直线 AB,AC 分别与 x 轴交于点 M,N，当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值。

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=e^x\ln(1+x)$．

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（I）设 $g(x)=f'(x)$，讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性；

（III）证明：对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$．

（21）（本小题 15 分）

已知 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷整数数列．给定正整数 m，若对任意的 $n\in\{1,2,\cdots,m\}$，在 Q 中存在 $a_1,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+j}(j\geqslant 0)$，使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$，则称 Q 为 $m-$连续可表数列．

（I）判断 $Q:2,1,4$ 是否为 5-连续可表数列？是否为 $6-$连续可表数列？说明理由；

（II）若 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 $8-$连续可表数列，求证：k 的最小值为 4；

（III）若 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 $20-$连续可表数列，$a_1+a_2+\cdots+a_k<20$，求证：$k\geq 7$．

参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	A	C	C	C	D	B	B	D

1【解析】$C_U A=(-3,-2)\cup(1,3)$

2.【解析】由条件可知 $z=\dfrac{3-4i}{i}=-4-3i$ 所以 $|z|=5$

3.【解析】若直线是圆的对称轴，则直线过圆心，圆心坐标（a,0）,所以由 2a+0-1=0 解得 $a=\dfrac{1}{2}$

4.【解析】由 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$，可得 $f(-x)=\dfrac{1}{1+2^{-x}}=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，所以得 $f(-x)+f(x)=\dfrac{2^x+1}{2^x+1}=1$

5.【解析】 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$，选项 A 中：$2x\in(-\pi,-\dfrac{\pi}{3})$，此时 $f(x)$ 单调递增，选项 B 中：

$2x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6})$，此时 $f(x)$ 先递增后递减，选项 C 中：$2x\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，此时 $f(x)$ 单调递减，选项 D 中：

$2x\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{6})$，此时 $f(x)$ 先递减后递增；所以选 C

6.【解析】①充分性证明：

若 $\{a_n\}$ 为递增数列，则有对 $\forall n\in N, a_{n+1}>a_n$，公差 $d=a_{n+1}-a_n>0$，

取正整数 $N_0=\left[-\dfrac{a_1}{d}\right]+2$（其中 $\left[-\dfrac{a_1}{d}\right]$ 为不大于 $-\dfrac{a_1}{d}$ 的最大正整数），

则当 $n>N_0$ 时，只要 $a_n>0$，都有 $a_n=a_1+(n-1)d>a_1+(\left[-\dfrac{a_1}{d}\right]+1)d>0$;

②必要性证明：

若存在正整数 N_0，当 $n>N_0$ 时，$a_n>0$,

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$

所以 $d>\dfrac{d-a_1}{n}$，对 $\forall n>N_0, n\in N$ 都成立

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{d-a_1}{n}=0$，且 $d\neq 0$

所以 d>0

所以对 $\forall n\in N$，都有 $a_{n+1}-a_n=d>0, a_{n+1}>a_n$，即：$\{a_n\}$ 为递增数列；

所以“$\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在正整数 N_0，当 $n>N_0$，时，$a_n>0$“的充要条件”

所以选 C

7.【解析】

A 选项：$\lg P=\lg 1026>3, T=220$，由图易知处于固态；

B 选项：$\lg P=\lg 128>2, T=270,$ 由图易知处于液态；

C 选项：$\lg P=\lg 9987\approx 3.999, T=300,$ 由图易知处于固态；

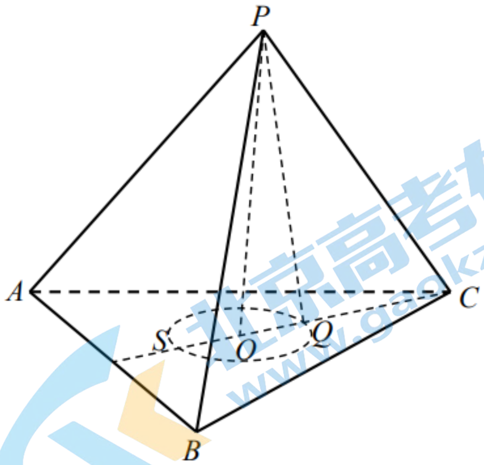
D 选项：$\lg P=\lg 729>2, T=360,$ 由图易知处于超临界状态；

所以选 D

8.【解析】

当 x=1 时，$1=a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ ①；当 x=-1 时，$81=a_4-a_3+a_2-a_1+a_0$ ②；①+②得原式=41

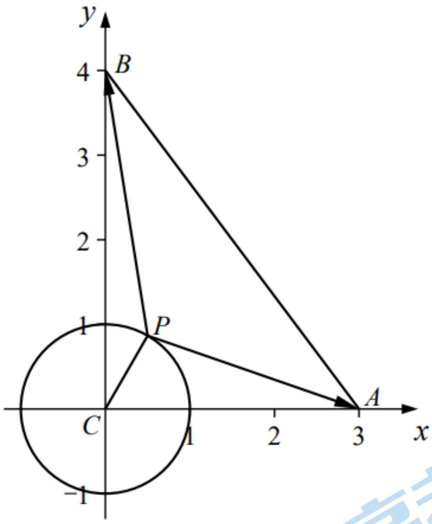
9.【解析】



过点 P 作底面射影点 O，则由题意，$CO=2\sqrt{3}, PC=6,$ 所以 $PO=2\sqrt{6},$ 当 CO 上存在一点 Q 使得 PQ=5，此时 QO=1，则动点 Q 在以 QO 为半径，O 为圆心得圆里，所以面积为 Π

10.【解析】

方法一：



建立如图所示坐标系，由题易知，设 C（0，0），A（3，0），B（0，4），

因为 PC=1，所以设 $P(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi],$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)\cdot(-\cos\theta,4-\sin\theta)=-3\cos\theta,-4\sin\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta$$

$$=1-5\sin(\theta+\varphi)(\sin\varphi=\frac{3}{5},\cos\varphi=\frac{4}{5})\in[-4,6],$$

所以选 D

方法二：

注意：$<\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CB}>=\left|\dfrac{\pi}{2}-<\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}>\right|$，且$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})$

$=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

二、填空题

11.【答案】$(-\infty,0)\cup(0,1]$

【解析】依题意$\begin{cases}x\neq 0,\\1-x\geq 0,\end{cases}$ 解得 $x\in(-\infty,0)\cup(0,1]$

12.【答案】-3

【解析】双曲线$y^2+\dfrac{x^2}{m}=1$的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{-m}}$，故 m=-3

13.【答案】$1,-\sqrt{2}$

【解析】$f(\dfrac{\pi}{3})=A\sin\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，解得$A=1$

$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\dfrac{\pi}{3})$，故$f(\dfrac{\pi}{12})=2\sin(\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3})=2\sin(-\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$

14. 0(答案不唯一),1

【解析】由题意知，函数最值于单调性相关，故可考虑以 0，2 为分界点研究函数 $f(x)$的性质，当 x<0 时，$f(x)$=-ax+1,x<a,该段的值域为$(-\infty,-a^2+1)$，故整个函数没有最小值；当 a=0 时，$f(x)$=-ax+1,x<a 该段值域为{1}，而$f(x)=(x-2)^2, x\geq a$ 的值域为$[0,+\infty)$，故此时 $f(x)$的值域为$[0,+\infty)$，即存在最小值为 0，故第一个空可填写 0；当 0<a≤2 时，$f(x)$=-ax+1,x<a,该段的值域为$(-a^2+1,+\infty)$，而$f(x)=(x-2)^2, x\geq a$ 的值域为$[0,+\infty)$，若存在最小值，则需满足$-a^2+1\geq 0$，于是可得 0<a≤1；当 a>2 时 $f(x)$=-ax+1,x<a,该段得值域为$(a^2+1,+\infty)$，而$f(x)=(x-2)^2, x\geq a$ 的值域为$[(a-2)^2,+\infty)$，若存在最小值，则需满足$-a^2+1\geq(a-2)^2$，此不等式无解.综上，a 的取值范围是[0,1]，故 a 的最大值为 1.

15.【答案】①③④

【解析】n=1 可得$a_1^2=9$，又各项均为正，可得$a_1=3$，令 n=2 可得$a_2(3+a_2)=9$，可解得

$a_2=\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{2}<3$，故①正确；当 n≥2 时，由$S_n=\dfrac{9}{a_n}$得$S_{n-1}=\dfrac{9}{a_{n-1}}$，于是可得$a_n=\dfrac{9}{a_n}-\dfrac{9}{a_{n-1}}$，即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{9-a_n^2}{9}$，若$\{a_n\}$为等比数列，则 n≥2 时，$a_{n+1}=a_n$，即从第二项起为常数，可检验 n=3 则不成立，故②错误；

$a_n \cdot S_n = 9(n=1,2\cdots)$. 可得 $a_n \cdot S_n = a_{n+1} \cdot S_{n+1}$，于是 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{S_n}{S_{n+1}} < 1$，所以 $a_{n+1} < a_n$，于是③正确，对于④，若所有项均大于等于 $\frac{1}{100}$，取 $n>90000$，则 $a_n \geq \frac{1}{100}, S_n > 900$，于是 $a_n S_n > 9$，与已知矛盾，所以④正确.

三、解答题

16.（I）由已知 $2\sin C\cos C = \sqrt{3}\sin C$

由于 $\angle C$ 在 ΔABC 中，故 $0 < \angle C < \pi, \sin C \neq 0$，故 $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle C = \frac{\pi}{6}$

（II）由（I）知 $\sin C = \frac{1}{2}, \therefore S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = 6\sqrt{3}$ 代入 $\sin C \cdot \frac{1}{2}b = 6$ 得 $a = 4\sqrt{3}$

由余弦定理：$C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore C_{\Delta ABC} = 6 + 6\sqrt{3}$

17.（1）设点 P 为 AB 中点，由于 P 为 AB 中点，N 为 AC 中点

所以 PN 为 ΔABC 中位线

$PN \parallel BC$

又 M 为 AB 中点，PM 是正方形 AA_1B_1B 的中位线

所以 $PM \parallel BB_1$

$$\because \begin{cases} BB_1 \parallel PM \\ BC \parallel PN \\ BB_1 \cap BC = B \\ PM \cap PN = P \end{cases} \Rightarrow \text{面}BCC_1B_1 \parallel \text{面}MPN$$

又 $MN \subseteq$ 面 MPN

$\therefore MN \parallel$ 面 BCC_1B_1

（2）选择条件①，$\because$ 面 $BCC_1B_1 \perp$ 面 ABB_1A_1

面 $BB_1C_1C \cap$ 面 $ABC = BC$，面 $A_1B_1BA \cap$ 面 $ABC = AB$

$\therefore BC \perp AB$，又 $NP \parallel BC$

$\therefore NP \perp AB$，又由①：$MN \perp AB$

$$\therefore \begin{cases} NP \perp AB \\ MN \perp AB \\ NP \cap MN = N \end{cases} \Rightarrow \text{面}MNP \perp AB$$

$\because PM \subset$ 面 MNP,

$\therefore PM \perp AB$

故 AB, BC, BB_1 两两垂直

以 B 为原点，$\overrightarrow{BC}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{BA}$ 为 y 轴正方向，$\overrightarrow{BB_1}$ 为 z 轴正方向建立坐标系

$B:(0,0,0), M(0,1,2), N:(1,1,0), A:(0,2,0), \overrightarrow{BM}:(0,1,2), \overrightarrow{BN}:(1,1,0), \overrightarrow{AB}:(0,-2,0)$

则 BMN 的法向量 $\vec{n}:(2,-2,1)$

AB 与面 BMN 所成角的正弦等于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{n}$ 所夹余弦的绝对值，即 $\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{n}\right|}\right| = \left|\dfrac{-4}{6}\right| = \dfrac{2}{3}$

答：所求正弦为 $\dfrac{2}{3}$.

18.（1）甲共投 10 次，优秀 4 次

由频率估计概率 $P_{甲优秀} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

（2）

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{3}{20}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{7}{20}$	$\dfrac{1}{10}$

甲优秀概率为 $\dfrac{2}{5}$，乙优秀概率为 $\dfrac{1}{2}$，丙优秀概率为 $\dfrac{1}{2}x$，X 可取的值为 0，1，2，3

$$故P(x=0)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\times\frac{3}{20}$$

$$P(x=1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{20}$$

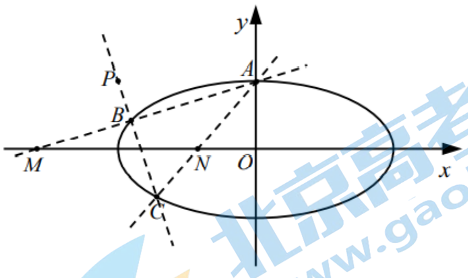
$$P(x=2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{20}$$

$$P(x=3)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{20}$$

$$\therefore EX=0\times\frac{3}{20}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{7}{20}+3\times\frac{1}{10}=\frac{7}{5}$$

（3）丙：丙投到过 3 人中的最大值 9.85，比甲、乙的最大值都要大，若比赛中发挥出好状态，丙实力最强。

19.



（1）由已知 $b=1, 2c=2\sqrt{3}, \therefore a=2, E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）由题可设直线方程为：$y-1=k(x+2), B=(x_1,y_1)C:(x_2,y_2)$

联立直线和椭圆E方程：$\begin{cases} y-1=k(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$

可得 $\Rightarrow (4k^2+1)x^2+(16k^2+8k)x+(16k^2+16k)=0$

由 $\Delta>0$ 可得 $(16k^2+8k)^2-4\times(1+4k^2)(16k^2+16k)>0$, 解得 $k<0$，

根据韦达定理可得 $x_1+x_2=-\dfrac{-(16k^2+8k)}{4k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{16k^2+16k}{4k^2+1}$

直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\dfrac{y_1-1}{x_1}$, AB 的直线方程为：$y=\dfrac{y_1-1}{x_1}+1$,

令 $y=0$，可得点 M 的横坐标 $x_M=\dfrac{x_1}{1-y_1}$, 同理可得点 N 的横坐标 $x_N=\dfrac{x_2}{1-y_2}$,

则有

$$|MN|=\left|\frac{x_1}{1-y_1}-\frac{x_2}{1-y_2}\right|=\left|\frac{x_1}{-k(x_1+2)}-\frac{x_2}{-k(x_2+2)}\right|=\left|\frac{1}{k}\left(\frac{x_2}{x_2+2}-\frac{x_1}{x_2+2}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{k}\cdot\frac{x_2(x_1+2)-x_1(x_2+2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\right|=\left|\frac{1}{k}\cdot\frac{2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\right|=2,$$

代入韦达定理可得 $\left|\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{2\sqrt{\left(\dfrac{-(16k^2+8k)}{1+4k^2}\right)^2-4\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}}}{\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}+2\left(\dfrac{-16k^2-8k}{1+4k^2}\right)+4}\right|=2$

化简可得：$\left|\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{2\sqrt{\dfrac{64(2k^2+k)^2-4\times16(k^2+k)(1+4k^2)}{1+4k^2}}}{\dfrac{16k^2+16k}{1+4k^2}+\dfrac{-32k^2-16k}{1+4k^2}+\dfrac{4+16k^2}{1+4k^2}}\right|=2$

即 $\left|\dfrac{1}{k}4\sqrt{4k^4+4k^3+k^2-4k^4-4k^3-k^2-k}\right|=2$

可得 $\left|\dfrac{\sqrt{-k}}{k}\right|=\dfrac{1}{2}$, 两边平方则有 $\dfrac{-1}{k}=\dfrac{1}{4}$, 解得 $k=-4$

故 k 的值为-4.

20.解：（1） $f'(x)=e^x[\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}]$, 则 $f'(0)=1$, 又 $f(0)=0$, 故所求切线方程为 $y=x$

（2） $g'(x)=e^x[\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}]$,

又 $e^x>0, \ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}>\ln1+\dfrac{1+2x}{(1+x)^2}>0$

故 $g'(x)>0$ 对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 成立，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增

（3）证明：不妨设 $S\geq t$,由拉个日朗中值定理

$$\frac{f(s+t)-f(s)}{(s+t)-s}=f'(\xi),其中\xi\in[s,s+t],即f(s+t)-f(s)=tf'(\xi)$$

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(\eta)，其中\eta\in(0,t),即\ f(t)-f(0)=tf'(\eta)$$

由 $g(x)$在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f'(\xi)>f'(\eta)$

$\therefore f(s+t)-f(s)>f(t)-f(0)=f(t)$

$\therefore f(s+t)>f(s)+f(t)$证毕

21.【解析】（1）若 m=5，则对于任意 $n\in\{1，2，3，4，5\}$

$a_2=1=1,a_1=2=2,a_1+a_2=2+1=3,a_3=4=4,a_2+a_3=1+4=5,$

所以 Q 是 5-连续可表数列；

由不存在任意连续若干项之和相加为 6，所以 Q 不是 6-连续可表数列；

（2）反证法：假设 k 的值为 3，则 a_1，a_2，a_3 最多能表示 a_1，a_2，a_3，$a_1+a_2,a_2+a_3,a_1+a_2+a_3$ 共 6 个数字，与 Q 为 8-连续可表数列矛盾，故 $k\geq4$；

现构造 Q：1，2，3，4 可以表达出 1，2，3，4，5，6，7，8 这 8 个数字，

即存在 k=4 满足题意，故 k 的最小值为 4；

（3）用反证法证明：假设 $k\leq6$，

①不妨取 k=6,因为 Q 为 20-可表数列，且 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k<20,$

所以有一项必为负数，所以最多有 5 项时正数.

（i）假设 6 项中，1 项是负数，5 项是正数，

从 6 个正数中，取一个数字只能表示自身，共 6 个数字，

取两个数字能表示 5 个数字，取三个数字能表示 4 个数字，

取四个数字能表示 3 个数字，取五个数字能表示 2 个数字

取六个数字能表示 1 个数字，可以表示 6+5+4+3+2+1=21 个整数.

但是其中有一项是负数，所以最多能表示 20 个正整数，

即除去单个的负数项，剩下的连加形成的数字必须是 1，2，3，$\cdots$,19,20.

假如负数在中间，因为六数连加小于 20，所以将没有一个连加项之和为 20,

所以负数必然在首或者尾，不妨设 $a_1<0,$

想到每一个项在连加中都用了 6 次，

这些连加产生了一项负数和 1，2，3，$\cdots$，19，20 共 21 个整数，

所以由和相等可得 $a_1+1+2+\cdots+20=6(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k)=6(a_1+20)$

解得：$a_1=18>0,$ 与 $a_1<0,$ 矛盾，故假设不成立.

即假设 6 项中，1 项是负数，5 项是正数，不能满足题意；

（ii）再假设 6 项中，2 项是负数，4 项是正数，或其他情况，同理可证不能满足题意.

②如果当 k=5 时，连加所形成的整数只有 5+4+3+2+1=15，不够 20 个，舍去.

③如果当 $k\leq4$ 时，理由同上，舍去.

综上所述必有 $k\geq 7$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯