2024 年高考数学仿真模拟卷(七)（新高考专用）

解析

(时间：120 分钟　满分：150 分)

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.答案　D

解析　由 $x^2-4x-5\leqslant 0$ 可得 $-1\leqslant x\leqslant 5$，所以 $A=[-1,5]$，由 $\log_2 x<2$，即 $\log_2 x<\log_2 4$，可得 $0<x<4$，所以 $B=(0,4)$，所以 $A\cap B=(0,4)$.

2.答案　B

解析　由 $\dfrac{z-1}{1-\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$ 可得 $z-1=(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$，所以 $|z-1|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

3.答案　C

解析　若“直线 l_1：$ax+y+2=0$ 与 l_2：$x+ay-3-a=0$ 平行”，则 $a^2-1=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-1$，

当 $a=1$ 时，直线 l_1：$x+y+2=0$，l_2：$x+y-4=0$，此时 $l_1/\!/l_2$，符合题意；

当 $a=-1$ 时，直线 l_1：$-x+y+2=0$，即 l_1：$x-y-2=0$，l_2：$x-y-2=0$，

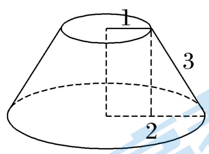
此时 l_1 与 l_2 重合，不符合题意；

综上所述，“直线 l_1：$ax+y+2=0$ 与 l_2：$x+ay-3-a=0$ 平行”等价于“$a=1$”．

所以“$a=1$”是“直线 l_1：$ax+y+2=0$ 与 l_2：$x+ay-3-a=0$ 平行”的充要条件．

4.答案　B

解析　由图可得，圆台的高为 $\sqrt{3^2-(2-1)^2}=2\sqrt{2}$，



故圆台的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times(\pi\times 1^2+\pi\times 2^2+\sqrt{\pi\times 1^2\times\pi\times 2^2})=\dfrac{14\sqrt{2}\pi}{3}$.

5.答案　C

解析　①游泳场地安排 2 人，则不同的安排方法有 $C_3^2A_2^2=6$(种)，

②游泳场地只安排 1 人，则不同的安排方法有 $C_3^1C_3^2A_2^2=18$(种)，

所以不同的安排方法有 $6+18=24$(种)．

6.答案　A

解析　设过点 $A(-a,0)$且方向向量为 $\boldsymbol{n}=(1，-1)$的光线，经直线 $y=-b$ 的点为 B，右焦点为 C.

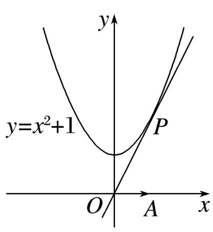
因为方向向量 $\boldsymbol{n}=(1，-1)$的直线斜率为-1，所以 $\angle CAB=\dfrac{\pi}{4}$，$k_{AB}=-1$，

又由反射光的性质可得 $k_{BC}=1$，故 $AB\perp BC$，所以$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 B 到 AC 的距离为 b，

又$|AC|=c+a$，故 $a+c=2b$，$a^2+c^2+2ac=4b^2=4(a^2-c^2)$，则$(3a-5c)(a+c)=0$，故 $3a=5c$，

离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$.

7.答案　A



解析　因为$|\overrightarrow{OA}|=1$，且方向固定，所以当$\angle AOP$ 最小时，投影向量长度最大，

此时点 P 在 y 轴右侧，且 OP 与抛物线相切，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

令直线 OP：$y=kx(k>0)$，则 $kx=x^2+1$，即 $x^2-kx+1=0$ 有唯一解，得 $k=2$(负舍)，

即 $\tan\angle AOP=\dfrac{\sin\angle AOP}{\cos\angle AOP}=2$，且 $\angle AOP$ 为锐角，

结合 $\sin^2\angle AOP+\cos^2\angle AOP=1$，解得 $\cos\angle AOP=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{OP}$方向上的投影向量的长度为$|\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOP=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

8.答案　C

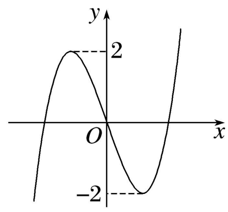
解析　因为 $f_n(x)=|f_{n-1}(x)|-1(n\geqslant2)$，所以当 $n\geqslant2$ 时，$f_n(x)\geqslant-1$，

$f_{2\,023}(x)=0\Leftrightarrow f_{2\,022}(x)=\pm1$，得$|f_{2\,021}(x)|=0$ 或$|f_{2\,021}(x)|=2$，得 $f_{2\,021}(x)=0$ 或 $f_{2\,021}(x)=2$，

由 $f_{2\,021}(x)=0$ 得 $f_{2\,019}(x)=0$ 或 $f_{2\,019}(x)=2$，

由 $f_{2\,021}(x)=2$ 得$|f_{2\,020}(x)|=3$，进而可得 $f_{2\,019}(x)=4$，

故由 $f_{2\,023}(x)=0$ 可得，$f_{2\,019}(x)=0$ 或 $f_{2\,019}(x)=2$ 或 $f_{2\,019}(x)=4$.



…

依此类推，可得 $f_1(x)=2k$，其中 $k=0,1,2$，…2 023.

又 $f'_1(x)=3x^2-3$，

令 $f'_1(x)=3x^2-3>0$ 可得 $f_1(x)$在$(-\infty，-1)$，$(1，+\infty)$上单调递增，

令 $f'_1(x)=3x^2-3<0$ 可得 $f_1(x)$在$(-1,1)$上单调递减，画出函数的图象，如图所示.

由图可知，$f_1(x)$的图象与 $y=2k$，$k=0,1,2$，…，2 023 共有 $3+2+2\,022=2\,027$(个)交点.

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分)

9．答案　BC

解析　直线 l 的方程可化为 $m(x-2)=y-2$，过定点(2,2)，故 A 错误；

设 $P(2,2)$，则圆心到直线的距离 $d\leqslant|CP|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，且半径 $r=3$，

所以最小弦长为 $2\sqrt{3^2-5}=4$，故 B 正确；

当 $m=1$ 时，直线方程为 $x-y=0$，则点 $C(3,4)$关于直线 l 对称的点为(4,3)，故 C 正确；

当垂足为 $M(2,2)$时，$|MC|=\sqrt{5}<\sqrt{13}$，所以$\sqrt{13}$不是最小值，故 D 错误.

10.答案　BC

解析　由题意可得$|\overrightarrow{EM}|=|\overrightarrow{NF}|=1$.

对于 A，可得$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{PE}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{PE}+\dfrac{1}{8}(\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE})=\dfrac{7}{8}\overrightarrow{PE}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{PF}$，故 A 错误；

对于 B，$\because\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{NF}$，$\therefore\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PN}$，整理得$\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}$，故 B 正确；

对于 C，由题意可得 $0°<\angle MPN<\angle EPF=90°$，$EP\perp PF$，

则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=|\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{PN}|\cos\angle MPN>0$，$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，即$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}>\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$，故 C 正确；

对于 D，$\because\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MN}$，但向量不能比较大小，故 D 错误.

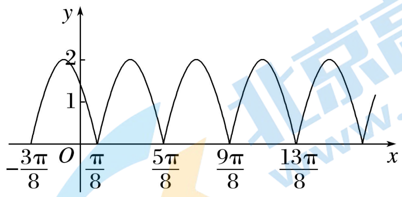
11.答案　BC

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

解析　$f\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)=\left|2\sin\left[2\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\right|=\left|2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right|=f(x)$，

故 A 不正确；B 正确；

$f(x)=\left|2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 的图象如图所示，



若 $f(x_1)f(x_2)=4$，$x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)=f(x_2)=2$，

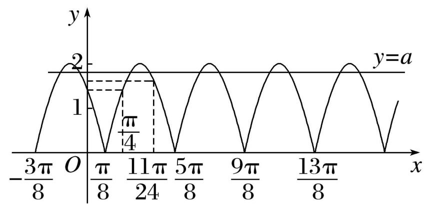
由图可知，因为 $f(x)=\left|2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{2}$，所以$|x_1-x_2|_{\min}=T=\frac{\pi}{2}$，故 C 正确；

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|2\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|2\sin\frac{\pi}{4}\right|=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{11\pi}{24}\right)=\left|2\sin\left(2\times\frac{11\pi}{24}-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|2\sin\frac{2\pi}{3}\right|=\sqrt{3}$，

若 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{11\pi}{24}\right]$，函数 $y=f(x)-a$ 有两个零点，

即 $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象有两个交点，

由图可知，$a\in[\sqrt{3},\ 2)$，故 D 不正确.



12.答案　BCD

解析　若 $A_1M\perp AB_1$，则 A_1M 在平面 ABB_1A_1 上的投影在 A_1B 上，所以 M 的轨迹为 A_1C，

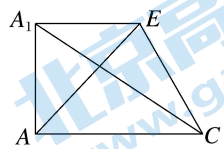
AM 的最小值为 A 到 A_1C 的距离，$AM\times A_1C=AA_1\times AC$，$AM\times\sqrt{3}=1\times\sqrt{2}$，故 AM 的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 A 错误；

因为 E，F 分别为 AB_1 和 BC 的中点，所以 $EF\parallel A_1C$，M 的轨迹为 A_1C，M 到平面 AEF 的距离为定值，所以三棱锥 $A-EFM$ 的体积为定值，故 B 正确；

当且仅当 M 为 A_1C 的中点时，$EM\parallel$ 平面 $ABCD$，若存在两个点 M，$EM_1\parallel$ 平面 $ABCD$，$EM_2\parallel$ 平面 $ABCD$，

$EM_1\cap EM_2=E$，$EM_1\subset$ 平面 EA_1C，$EM_2\subset$ 平面 EA_1C，平面 $EA_1C\parallel$ 平面 $ABCD$，得出矛盾，故 C 正确；

将平面 EA_1C 翻折到与平面 AA_1C 重合，



$\cos\angle EA_1C=\frac{A_1E^2+A_1C^2-EC^2}{2A_1E\cdot A_1C}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin\angle AA_1C=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\sin\angle AA_1C=\cos\angle EA_1C$，所以 $\angle AA_1E=\frac{\pi}{2}$，$AE=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $AM+EM$ 的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 D 正确.

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．答案　-120

解析　由二项式展开式的通项，可得 $T_{k+1}=C_{10}^{k}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10-k}(-y)^k$，

故只有 $T_8=C_{10}^{7}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3(-y)^7$ 包含 x^3y^7，又 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ 展开式的通项为 $S_{m+1}=C_3^m x^{3-m}\left(\frac{1}{x}\right)^m=C_3^m x^{3-2m}$，

故当 $m=0$ 时，x^3y^7 的系数为$(-1)^7C_{10}^{7}C_3^0=-120$.

14.答案　0.053

解析　设任取一件产品来自甲厂为事件 A_1、来自乙厂为事件 A_2、来自丙厂为事件 A_3，

则彼此互斥，且 $A_1\cup A_2\cup A_3=\Omega$，

关注北京高考在线官方微信：　京考一点通（微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

$P(A_1)=\frac{3\,000}{3\,000+3\,000+4\,000}=\frac{3}{10}$，$P(A_2)=\frac{3\,000}{3\,000+3\,000+4\,000}=\frac{3}{10}$，$P(A_3)=\frac{4\,000}{3\,000+3\,000+4\,000}=\frac{2}{5}$，

设任取一件产品，取到的是次品为事件 B，

则 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=\frac{3}{10}\times 6\%+\frac{3}{10}\times 5\%+\frac{2}{5}\times 5\%=\frac{53}{1\,000}=0.053.$

15.答案　$2x+y-4=0$

解析　设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$分别为函数 $f(x)$的图象上关于直线 $x=1$ 对称的两点，不妨设 $x_1\leqslant 1$，则 $x_2>1$.

所以$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\y_1=y_2,\end{cases}$　所以$\begin{cases}x_1=2-x_2,\\y_1=y_2,\end{cases}$　所以 $y_2=e^{2-x_2}+2-x_2-1=e^{2-x_2}-x_2+1$.

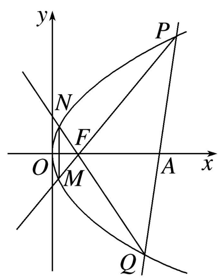
所以当 $x>1$ 时，$f(x)=e^{2-x}-x+1$.所以 $f(2)=e^{2-2}-2+1=0$.

而 $f'(x)=-e^{2-x}-1$，所以 $f'(2)=-e^{2-2}-1=-2$.

所以曲线 $y=f(x)$在点 $P(2,f(2))$处的切线方程为 $y=-2(x-2)$，即 $2x+y-4=0$.

16.答案　16

解析　∵焦点 F 到准线的距离为 2，∴$p=2$，则抛物线方程为 $y^2=4x$，∴$F(1,0)$，



又$\overrightarrow{OA}=4\overrightarrow{OF}$，∴$A(4,0)$；

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，设直线 PQ：$x=my+4$，

由$\begin{cases}x=my+4,\\y^2=4x,\end{cases}$　得 $y^2-4my-16=0$，∴$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-16$；

设直线 PM：$x=ny+1$，

由$\begin{cases}x=ny+1,\\y^2=4x\end{cases}$　得 $y^2-4ny-4=0$，∴$y_1+y_3=4n$，$y_1y_3=-4$，则 $y_3=-\frac{4}{y_1}$；

同理可得 $y_4=-\frac{4}{y_2}$；

$$\therefore \frac{S_{\triangle PQF}}{S_{\triangle MNF}}=\frac{\frac{1}{2}|PF|\cdot|QF|\sin\angle PFQ}{\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\sin\angle MFN}=\frac{|PF|\cdot|QF|}{|MF|\cdot|NF|}=\frac{|y_1y_2|}{|y_3y_4|}=\left|\frac{y_1y_2}{\frac{16}{y_1y_2}}\right|=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=16.$$

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．解　(1)因为 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{\pi-B}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$，

所以由 $\cos B+\sin\frac{A+C}{2}=0$ 得 $\cos B+\cos\frac{B}{2}=0$，所以 $2\cos^2\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}-1=0$，

解得 $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$或 $\cos\frac{B}{2}=-1$，

因为 $0<B<\pi$，所以 $0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\frac{B}{2}>0$，故 $\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，

则$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{3}$，故 $B=\frac{2\pi}{3}$.

(2)因为 $a∶c=3∶5$，令 $c=5m(m>0)$，则 $a=3m$，

关注北京高考在线官方微信：　京考一点通　(微信号:bjgkzx)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

由三角形面积公式可得 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b\times\frac{15\sqrt{3}}{14}$，则 $15b=7ac=7\times15m^2$，故 $b=7m^2$，

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，则 $49m^4=49m^2$，解得 $m=1$，

从而 $a=3$，$c=5$，$b=7$，故△ABC 的周长为 $a+b+c=15$.

18．**解**　(1)因为 $a_{n+1}=\frac{4a_n}{3a_n+1}$，$a_1=\frac{4}{5}\neq0$，所以 $a_n\neq0$，取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4a_n}$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{4a_n}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，即 $\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{4a_n}{1-a_n}$，即 $b_{n+1}=4b_n$，

因为 $b_1=4\neq0$，所以 $\{b_n\}$ 是 $b_1=4$，$q=4$ 的等比数列，

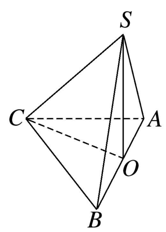
所以 $b_n=4^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)在 b_1，b_2 之间有 2 个 3，b_2，b_3 之间有 2^2 个 3，b_3，b_4 之间有 2^3 个 3，b_4，b_5 之间有 2^4 个 3，

合计 $2+2^2+2^3+2^4=30$ 个 3，

所以 $S_{36}=\sum_{i=1}^{5}b_i+31\times3=\frac{4\times(1-4^5)}{1-4}+93=1\,364+93=1\,457$.

19．**(1)证明**　作 $SO\perp$ 底面 ABC，垂足为 O，则 $\angle SBO$ 为 SB 与平面 ABC 所成角，



即 $\angle SBO=\frac{\pi}{3}$，在 Rt△SBO 中，由 $SB=4$ 可得 $BO=2$，$SO=2\sqrt{3}$，

因为 $SO\perp$ 底面 ABC，$CO\subset$ 底面 ABC，故 $SO\perp CO$，

在 Rt△SCO 中，$SC=2\sqrt{6}$，则 $CO=\sqrt{SC^2-SO^2}=\sqrt{24-12}=2\sqrt{3}$，

在△BCO 中，由 $BC=4$，$CO=2\sqrt{3}$，$BO=2$ 可得 $BC^2=CO^2+BO^2$，故 $CO\perp BO$，且 $\angle BCO=\frac{\pi}{6}$，

在△ACO 中，$AC=4$，$\angle ACO=\frac{\pi}{6}$，则△$ACO\cong$△BCO，

故 $AO=BO=2$，而 $AB=4$，故点 O 必在 AB 上，且为 AB 的中点，

$SO\perp$ 底面 ABC，$AB\subset$ 底面 ABC，故 $SO\perp AB$，

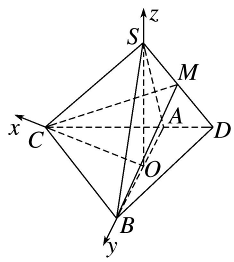
又 $AB\perp CO$，$SO\cap CO=O$，SO，$CO\subset$ 平面 SCO，故 $AB\perp$ 平面 SCO，$SC\subset$ 平面 SCO，

故 $SC\perp AB$.

(2)**解**　由(1)可知 $CO\perp AB$，$SO\perp CO$，且 $SO\cap AB=O$，SO，$AB\subset$ 平面 SAB，

故 $CO\perp$ 平面 SAB，

以点 O 为坐标原点，以 OC，OB，OS 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由于 $CD=\frac{3}{2}CA$，故 $AD=2$，

则 $B(0,2,0)$，$C(2\sqrt{3},0,0)$，$S(0,0,2\sqrt{3})$，$D(-\sqrt{3},-3,0)$，

所以 $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{7}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3},-2,0)$，

设平面 BCM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{7}{2}y+\sqrt{3}z=0,\\ 2\sqrt{3}x-2y=0,\end{cases}$ 令 $y=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},4)$，

由题意可取平面 SAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，

设平面 BCM 与平面 SAB 的夹角为θ，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{10}$，

故平面 BCM 与平面 SAB 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{10}$.

20．(1)**解** 方法一 X 的所有可能取值为 0,1,2,3，

在一次扑球中，扑到点球的概率 $P=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times3=\frac{1}{9}$，

所以 $P(X=0)=C_3^0\left(\frac{8}{9}\right)^3=\frac{512}{729}$，$P(X=1)=C_3^1\cdot\frac{1}{9}\times\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{243}$，

$P(X=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2\times\frac{8}{9}=\frac{8}{243}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{9}\right)^3=\frac{1}{729}$，

所以 X 的分布列如下

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

$E(X)=\frac{64}{243}\times1+\frac{8}{243}\times2+\frac{1}{729}\times3=\frac{81}{243}=\frac{1}{3}$.

方法二 依题意可得，门将每次可以扑到点球的概率为 $p=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，

门将在前三次扑到点球的个数 X 可能的取值为 0,1,2,3，易知 $X\sim B\left(3,\frac{1}{9}\right)$，

所以 $P(X=k)=C_3^k\times\left(\frac{1}{9}\right)^k\times\left(\frac{8}{9}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$，

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

所以 X 的期望 $E(X)=3\times\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$.

(2)①**证明** 第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n，

则当 $n\geqslant2$ 时，第 $n-1$ 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_{n-1}，

第 $n-1$ 次传球之前球不在甲脚下的概率为 $1-p_{n-1}$，

则 $p_n=p_{n-1}\times0+(1-p_{n-1})\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

即 $p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_{n-1}-\frac{1}{3}\right)$，又 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

所以 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

②解　由①可知 $p_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$，

所以 $p_{10}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{9}+\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，

所以 $q_{10}=\frac{1}{2}(1-p_{10})=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{9}\right]>\frac{1}{3}$，故 $p_{10}<q_{10}$.

21．解　(1)由 F_1：$x^2+y^2+4x=0$，得 $(x+2)^2+y^2=4$，可知 $F_1(-2,0)$，其半径为 2，

由 F_2：$x^2+y^2-4x-12=0$，得 $(x-2)^2+y^2=16$，可知 $F_2(2,0)$，其半径为 4.

设动圆半径为 r，动圆圆心到 F_1 的距离为 n，到 F_2 的距离为 m，则有

$\begin{cases}n+2=r,\\m+4=r\end{cases}\Rightarrow n-m=2$ 或 $\begin{cases}n+r=2,\\m+r=4\end{cases}\Rightarrow m-n=2$，

即 $|n-m|=2=2a$，得 $a=1$，又 $|F_1F_2|=4=2c>2a$，

所以动圆圆心 M 的轨迹是以 F_1，F_2 为焦点的双曲线，由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $b^2=3$，

所以动圆圆心 M 的轨迹方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)①当直线 l_1 的斜率存在时，由题意知，$k\neq0$，设 l_1：$y=kx-2k$，

与双曲线联立得 $\begin{cases}y=kx-2k,\\x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$，

由直线 l_1 与双曲线有两个不同的交点，

所以 $\begin{cases}3-k^2\neq0,\\\Delta=16k^4+4(3-k^2)(4k^2+3)=36k^2+36>0,\end{cases}$ 得 $k^2\neq3$ 且 $k^2\neq0$，且 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\times\frac{6\sqrt{1+k^2}}{|3-k^2|}=\frac{6(k^2+1)}{|k^2-3|}$，

设 l_2：$y=-\frac{1}{k}x+\frac{2}{k}$，即 $x+ky-2=0$，

设点 F_1 到直线 l_2 的距离为 d，则 $d=\frac{|-2-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{4}{\sqrt{k^2+1}}$，

因为 l_2 交圆 F_1 于 P，Q 两点，故 $d<2$，得 $k^2>3$.且 $|PQ|=2\sqrt{2^2-d^2}=4\sqrt{\frac{k^2-3}{k^2+1}}$，

由题意可知 $MN\perp PQ$，

所以 $S_{\triangle PQM}+S_{\triangle PQN}=\frac{1}{2}\times|PQ|\times|MN|=12\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2-3}}=12\sqrt{1+\frac{4}{k^2-3}}$，

因为 $k^2>3$，可得 $S_{\triangle PQM}+S_{\triangle PQN}>12$.

②当直线 l_1 的斜率不存在时，$|PQ|=4$，$|MN|=6$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

所以 $S_{\triangle PQM}+S_{\triangle PQN}=\frac{1}{2}\times4\times6=12$，

综上，$S_{\triangle PQM}+S_{\triangle PQN}\geqslant12$.

22．(1)**解**　由题意知 $f(x)=e^x-a\sin x$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上有极小值，则 $f'(x)=e^x-a\cos x=0$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上有解，

故 $a=\frac{e^x}{\cos x}$，设 $g(x)=\frac{e^x}{\cos x}\left(x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$，显然 $g(x)=\frac{e^x}{\cos x}$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

又 $g(0)=1$，当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)\to+\infty$，所以 $a>1$.

当 $a>1$ 时，$f'(x)=e^x-a\cos x$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

又 $f'(0)=1-a<0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$，

由函数零点存在定理可知 $\exists\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，且 $f'(\alpha)=0$，

此时当 $x\in(0,\ \alpha)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\alpha,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ \alpha)$ 上单调递减，在 $\left(\alpha,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上有极小值点.

因此实数 a 的取值范围为 $a>1$.

(2)**证明**　由题意知 $f'(x)=e^x-a\cos x+b$，

故 $f'(x_0)=e^{x_0}-a\cos x_0+b=0$.

$f(x_0)=e^{x_0}-a\sin x_0+bx_0=e^{x_0}-a\sin x_0+bx_0+f'(x_0)$

$=2e^{x_0}-a(\sin x_0+\cos x_0)+bx_0+b=2e^{x_0}-\sqrt{2}a\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)+bx_0+b\geqslant2e^{x_0}+bx_0+b-\sqrt{2}a$.

设 $h(x)=2e^x+bx+b-\sqrt{2}a(x\in\mathbf{R})$，

则 $h'(x)=2e^x+b$，当 $x\in\left(-\infty,\ \ln\left(-\frac{b}{2}\right)\right)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in\left(\ln\left(-\frac{b}{2}\right),\ +\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(-\infty,\ \ln\left(-\frac{b}{2}\right)\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\left(-\frac{b}{2}\right),\ +\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h\left(\ln\left(-\frac{b}{2}\right)\right)=b\ln\left(-\frac{b}{2}\right)-\sqrt{2}a$.

因此 $f(x_0)\geqslant b\ln\left(-\frac{b}{2}\right)-\sqrt{2}a$ 成立.

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。