2024 北京怀柔一中高三零模

数　　学

满分：150 分　考试用时：120 分钟

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1.已知集合 $A=\{x|3-x>1\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A.$\{3,4\}$ B.$\{2,3,4\}$　C.$\{0,1\}$　D.$\{0,1,2\}$

2.已知复数 z 满足 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$，则其共轭复数 $\bar{z}=$（　　）

A.i　B.$-\mathrm{i}$　C.$\dfrac{5}{3}\mathrm{i}$　D.$-\dfrac{5}{3}\mathrm{i}$

3.在 $\left(3x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^3$ 的展开式中，常数项是（　　）

A.$\dfrac{9}{4}$　B.$-\dfrac{9}{4}$　C.$\dfrac{9}{2}$　D.$-\dfrac{9}{2}$

4.已知函数 $f(x)=\dfrac{4x^2}{2x^2+1}$，则对任意实数 x，函数 $f(x)$ 的值域是（　　）

A.$(0,2)$ B.$(0,2]$ C.$[0,2)$ D.$[0,2]$

5.设 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 为非零向量，则“$\vec{m}\cdot\vec{n}<0$”是“存在 $\lambda<0$，使得 $\vec{m}=\lambda\vec{n}$”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充分且必要条件　　D.既不充分也不必要条件

6.攒尖是我国古代建筑中屋顶的一种结构样式，多见于亭阁式建筑、园林建筑等，如图所示的亭子带有攒尖的建筑屋顶可近似看作一个圆锥，其底面积为 16π，屋顶的体积为 $\dfrac{32\sqrt{5}}{3}\pi$，算得侧面展开图的圆心角约为（　　）

A.$\dfrac{2\pi}{3}$　B.$\dfrac{5\pi}{6}$　C.$\dfrac{4\pi}{3}$　D.$\dfrac{7\pi}{6}$

7.圆 C 的圆心在抛物线 $y=2x^2$ 上，且圆 C 过抛物线 $y=2x^2$ 的焦点，则圆 C 上的点到直线 $y=-1$ 距离的

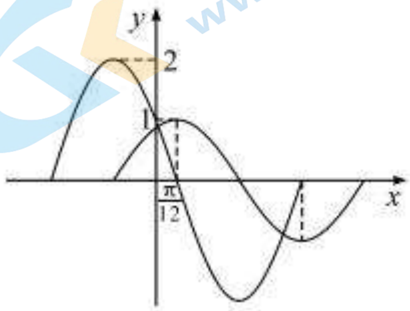
最小值为（　　）

A. $\frac{7}{8}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

8.“绿水青山就是金山银山”的理念已经提出 18 年，我国城乡深化河道生态环境治理，科学治污。现有某乡村一条污染河道的蓄水量为 v 立方米，每天的进出水量为 k 立方米，已知污染源以每天 r 个单位污染河水，某一时段 t（单位：天）河水污染质量指数 $m(t)$（每立方米河水所含的污染物）满足 $m(t)=\frac{r}{k}+\left(m_0-\frac{r}{k}\right)e^{-\frac{k}{v}t}$（$m_0$ 为初始质量指数），经测算，河道蓄水量是每天进出水量的 50 倍.若从现在开始停止污染源，要使河水的污染水平下降到初始时的 $\frac{1}{6}$，需要的时间大约是（参考数据：$\ln 5\approx 1.61$，$\ln 6\approx 1.79$）（　　）

A.1 个月 B.3 个月 C.半年　D.1 年

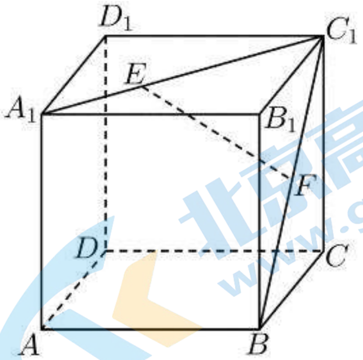
9.已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，及其导函数的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的解析式为（　　）



A. $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

10.如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，F 为线段 BC_1 的中点，E 为线段 A_1C_1 上的动点，则下列四个结论正确的是（　　）



A.存在点 E，使 EF // 平面 $ABCD$

B.三棱锥 B_1-ACE 的体积随动点 E 变化而变化

C.直线 EF 与 AD_1 所成的角不可能等于 30°

D.存在点 E，使 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分.

11.函数 $f\left(x\right)=\lg\dfrac{1+2x}{x}$ 的定义域是______.

12.已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点，过 F_2 作 C 的两条渐近线的平行线，与渐近线交于 M，N 两点.若 $\angle MF_1N=\dfrac{\pi}{3}$，则双曲线 C 的离心率为______.

13.甲袋中有 5 个红球和 3 个白球，乙袋中有 4 个红球和 2 个白球，如果所有小球只存在颜色的差别，并且整个取球过程是盲取，分两步进行：第一步，先从甲袋中随机取出一球放入乙袋，分别用 A_1、A_2 表示由甲袋中取出红球、白球的事件；第二步，再从乙袋中随机取出两球，用 B 表示第二步由乙袋中取出的球是“两球都为红球”的事件，则事件 B 的概率是______.

14.设首项是 1 的数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_n=\begin{cases}a_{n-1}+1,n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\\3a_{n-1}+1,n=2k+1,k\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，则 $a_4=$______；若 $S_m<2024$，则正整数 m 的最大值是______.

15.已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}ax^2-2x,x<1,\\\dfrac{ax}{e^x},x\geq 1\end{cases}$ $\left(a\in R\right)$.给出下列四个结论：

①存在实数 a，使得 $f\left(x\right)$ 有最大值；

②对任意实数 a，使得 $f\left(x\right)$ 存在至少两个零点；

③若 $a<0$，则存在 $x_0\in\left(1,+\infty\right)$，使得 $f\left(x_0\right)=-f\left(-x_0\right)$；

④函数 $f\left(x\right)$ 的值域不可能是 R.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演绎步骤。

16.（本小题共 13 分）

在① $\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin A\cos C=\sin B+\sin C$，

② $\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=2\sin B\sin C$，

③ $c\cdot\cos A\cos B+b\cdot\cos A\cos C=\dfrac{a}{2}$

这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

问题：在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且选择条件______，

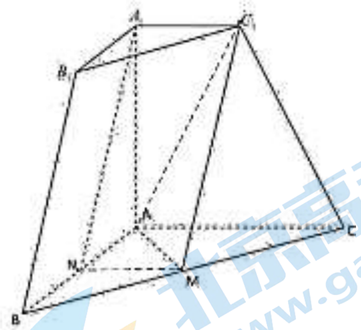
（Ⅰ）求角A；

（Ⅱ）若O是$\triangle ABC$内一点，$\angle AOB=120^\circ$，$\angle AOC=135^\circ$，$b=1$，$c=3$，求$\tan\angle ABO$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分；选择第②个条件解答不给分.

17.（本小题共 14 分）

三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，若$A_1A\perp$面ABC，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=2$，$A_1C_1=1$，M，N分别是BC，BA中点.



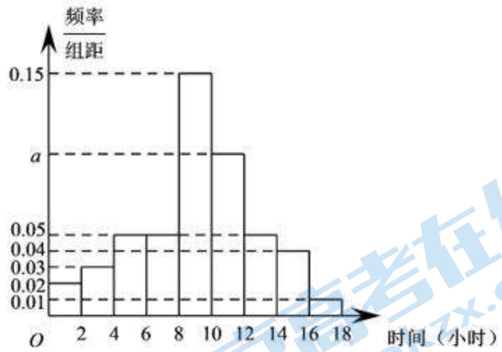
（Ⅰ）求证：$B_1B\parallel$平面C_1MA；

（Ⅱ）求二面角$A-C_1M-N$的正弦值；

（Ⅲ）求点C到平面C_1MA的距离.

18.（本小题共 13 分）

某学校为了解本学期学生参加公益劳动的情况，从学校内随机抽取了 500 名高中学生进行在线调查，收集了他们参加公益劳动时间（单位：小时）分配情况等数据，并将样本数据分成$[0,2]$，$(2,4]$，$(4,6]$，$(6,8]$，$(8,10]$，$(10,12]$，$(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$九组，绘制成如图所示的频率分布直方图.



（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）为进一步了解这 500 名学生参加公益劳动时间的分配情况，从参加公益劳动时间在$(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$三组内的学生中，采用分层抽样的方法抽取了 10 人，现从这 10 人中随机抽取 3 人.记参

加公益劳动时间在$(14,16]$内的学生人数为 X，求 X 的分布列和期望；

（III）以调查结果的频率估计概率，从该学校所有高中学生中随机抽取 20 名学生，用“$P_{20}(k)$”表示这 20 名学生中恰有 k 名学生参加公益劳动时间在$(10,12]$（单位：小时）内的概率，其中$k=0$，1，2，…，20.当$P_{20}(k)$最大时，写出 k 的值.（只需写出结论）.

19.（本小题共 15 分）

椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$F_1$，$F_2$是椭圆的左、右焦点，以$F_1$为圆心、$\dfrac{5}{2}$为半径的圆与以$F_2$为圆心、$\dfrac{3}{2}$为半径的圆的交点在椭圆 C 上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和长轴长；

（Ⅱ）已知直线$y=kx-2$与椭圆 C 有两个不同的交点 A，B，P 为 x 轴上一点.是否存在实数 k，使得$\triangle PAB$是以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形?若存在，求出 k 的值及点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

20.（本小题共 15 分）已知函数$f(x)=2a^x-ex^2$，（$a>0$且$a\neq1$）.

（Ⅰ）当$a=e$时，求函数$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）若函数$f(x)$存在两个极值点，不妨设x_1是极小值点，x_2是极大值点，若$x_1<x_2$，求实数 a 的取值范围.

21.（本小题共 15 分）

有穷数列$\{a_n\}$共$m(m\geq3)$项，其各项均为整数，任意两项均不相等.

$b_i=|a_i-a_{i+1}|(i=1,2,\cdots,m-1)$，$b_i\leq b_{i+1}(i=1,2,\cdots,m-2)$.

（1）若$\{a_n\}$：0，1，a_3.求a_3的取值范围；

（2）若$m=5$，当$\sum\limits_{i=1}^{5}|a_i|$取最小值时，求$\sum\limits_{i=1}^{4}b_i$的最大值；

（3）若$1\leq a_i\leq m(i=1,2,\cdots,m)$，$\sum\limits_{k=1}^{m-1}b_k=m+1$，求 m 的所有可能取值.

参考答案

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	C	B	C	A	B	C	D

6.【参考答案】圆锥底面积 $\pi r^2=16\pi$，所以底面圆半径 $r=4$，底面圆周长为 8π，

由圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}h\pi r^2=\dfrac{32\sqrt{5}}{3}\pi$，则 $h=2\sqrt{5}$，算得扇形的半径 $R=6$，

根据圆心角计算公式，$\theta=\dfrac{8\pi}{6}=\dfrac{4\pi}{3}$，所以侧面展开图的圆心角约为 $\dfrac{4\pi}{3}$

7.【参考答案】设圆 C 的圆心为 $(a,2a^2)$，半径为 r，由抛物线的焦点为 $(0,\dfrac{1}{8})$，

准线方程为 $y=-\dfrac{1}{8}$，可得 $r=2a^2+\dfrac{1}{8}$，所以圆 C 与抛物线的准线相切，

与直线 $y=-1$ 相离，所以圆 C 上的点到直线 $y=-1$ 的距离的最小值为 $1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

8.【参考答案】某一时段 t 河水污染质量指数 $m(t)=\dfrac{r}{k}+(m_0-\dfrac{r}{k})e^{-\frac{k}{v}t}$，

由题意可知，$\dfrac{k}{v}=\dfrac{1}{50}$.从现在开始停止污染源，则 $r=0$，$t=0$，$m(0)=m_0$，

要使河水的污染水平下降到初始时的 6%，则 $e^{-\frac{t}{50}}=\dfrac{1}{6}$，即 $-\dfrac{t}{50}=-\ln 6$，

解得 $t=89.5\approx 90$，所以需要的时间大约是 3 个月.

9.【参考答案】由于 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，则 $f'(x)=\omega A\cos(\omega x+\varphi)$，

根据 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增，由图可知，$A=1,\omega=2$，

由图 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=1$，所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，则 $\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，$0<\varphi<\pi$

解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，此时 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$

10.【参考答案】以点 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，设正方体边长为 2,

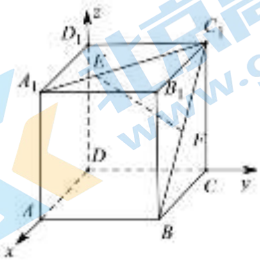
则 $F(1,2,1)$, $D(0,0,0)$, $B(2,2,0)$, $A(2,0,0)$, $D_1(0,0,2)$, $B_1(2,2,2)$,

因为 E 为线段 A_1C_1 上运动，设 $E(m,2-m,2)(0\le m\le 2)$，

则 $\overrightarrow{EF}=(1-m,m,-1)$，平面 $ABCD$ 的法向量为 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$，

若 $EF\parallel$ 平面$ABCD$，则 $\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{DD_1}=0$，则有 $-2\neq 0$，显然无解，故 A 错误；

因为 $A_1C_1\parallel$ AC，$AC\subset$ 平面 ACB_1，



$A_1C_1\not\subset$ 平面 ACB_1，故 $A_1C_1\parallel$ 平面 ACB_1，

因为 E 为线段 A_1C_1 上运动，故 E 到平面 ACB_1 的距离不变，

所以 V_{E-ACB_1} 为定值，不随 E 的变动而变动，

故三棱锥 B_1-ACE 的体积不随动点 E 变化而变化，B 错误；

$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，设直线 EF 与 AD_1 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{EF}>|=\left|\dfrac{(-2,0,2)\cdot(1-m,m,-1)}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2m^2-2m+2}}\right|=\dfrac{|m-2|}{2\sqrt{m^2-m+1}}$，令 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $m=-1$或$\dfrac{1}{2}$，由于 $0\le m\le 2$，所以 $m=\dfrac{1}{2}$，故当 E 为 A_1C_1 靠近 C_1 的四等分点时，

直线 EF 与 AD_1 所成的角为 30°，故 C 错误；

设平面 AB_1C_1D 的法向量为 $\mathbf{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{DA}=x=0,\\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=2y+2z=0,\end{cases}$

令 $y=1$ 得 $z=-1$，故 $\mathbf{n}=(0,1,-1)$，因为当 $m=1$ 时，$(1-m,m,-1)=(0,1,-1)$ 即 $\overrightarrow{EF}=\mathbf{n}$，

故 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D，故 D 正确.

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 5 分.

11．$\left\{x\middle|x<-\dfrac{1}{2}或x>0\right\}$_

12．【参考答案】易知 MN 关于 x 轴对称，$\angle MF_1F_2=\dfrac{1}{2}\angle MF_1N=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\tan\angle MF_1F_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由 $\begin{cases}y=\dfrac{b}{a}x,\\ y=-\dfrac{b}{a}(x-c)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{c}{2},\\ y=\dfrac{bc}{2a},\end{cases}$ 所以 $M(\dfrac{c}{2},\dfrac{bc}{2a})$，$\tan\angle MF_1F_2=\dfrac{\frac{bc}{2a}}{\frac{3}{2}c}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+(\dfrac{b}{a})^2}=2$.

13.【参考答案】根据相互独立事件和互斥事件的概率计算公式

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)=\frac{5}{8}\times\frac{C_5^2}{C_7^2}+\frac{3}{8}\times\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{17}{42}$$

14.【参考答案】由 $a_n=\begin{cases}a_{n-1}+1, & n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\\ 3a_{n-1}+1, & n=2k+1,k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ $\therefore a_2=2,a_3=7,a_4=8$

当 n 为偶数时，$a_{n+2}=a_{n+1}+1=3a_n+2$，则 $a_{n+2}+1=3(a_n+1)$，有 $a_n=3^{\frac{n}{2}}-1$

当 n 为奇数时，$a_{n+2}=3a_{n+1}+1=3(a_n+1)+1=3a_n+4$，则 $a_{n+2}+2=3(a_n+2)$，

有 $a_n=3^{\frac{n+1}{2}}-2$

若 m 为奇数时，设 $m=2k-1$，$S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m$

其中，有个 k 奇数的项，和为

$$S_1=a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}=3^1+3^2+\cdots+3^k-2k=\frac{3^{k+1}-3}{2}-2k$$

另外有 $k-1$ 个偶数的项，和为

$$S_2=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}=3^1+3^2+\cdots+3^{k-1}-2(k-1)=\frac{3^k-3}{2}-2(k-1)$$

如 $m=11$ 时 $k=6$，则 $S_{11}=\dfrac{3^7-3}{2}-12+\dfrac{3^6-3}{2}-5=1092+363-17=1438<2024$

因为 $a_{12}=728$，所以 $S_{12}=S_{11}+a_{12}=1438+728=2166>2024$ 不成立，

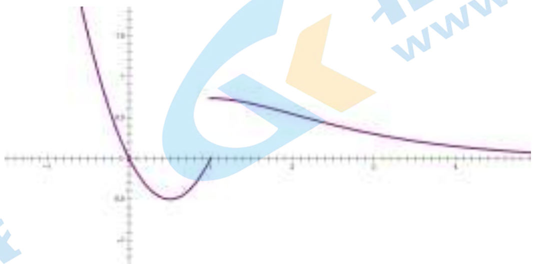
所以正整数 m 的最大值是 11

15.【参考答案】

①当 $a>0$ 时，$f(x)=\dfrac{ax}{e^x},x\geq 1$ 单调递减，

$f(x)=ax^2-2x,x<1,$ 开口向上

的对称轴 $f(x)=\dfrac{1}{a}>0,$ 不存在最大值

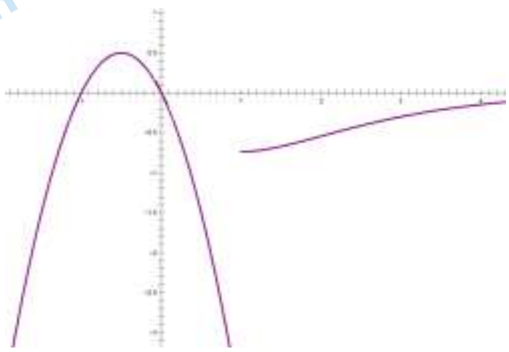


当 $a<0$ 时，$f(x)=\dfrac{ax}{e^x},x\geq 1$ 单调递增，

$f(x)=ax^2-2x,x<1,$ 开口向下

的对称轴 $f(x)=\dfrac{1}{a}<0,$ 存在最大值

因此，①正确；



②对任意实数 a，$f(x)=\dfrac{ax}{e^x},x\geq 1$ 无零点，

对于 $f(x)=ax^2-2x, x<1,$

使得 $f(x)=0$ 的解为 $x=0$，必存在一个零点，

但是当 $0<a<2$ 时， 另一个解不满足 $x<1$ 的条件，此时只 $f(x)$ 存在一个零点，②错误；

③当 $a<-2$ 时，画出函数图象即可判断， $f(x)$ 的图像上不一定存在关于原点对称的两点，

因此，③错误；

④分情况绘制函数图象可以判断④正确.

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演绎步骤。

16．解：方案一：选条件①

（I）由 $B=\pi-(A+C)$ $\therefore \sqrt{3}\sin C\sin A+\cos C\sin A=\sin(A+C)+\sin C$， ……1 分

整理得 $(\sqrt{3}\sin A-\cos A)\sin C=\sin C$， ……………………………………………3 分

又 $0°<C<180°$，所以 $\sin C>0$，

$\therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即 $\sin(A-30°)=\dfrac{1}{2}$． ……………………………………5 分

又 $0°<A<180°$， $\therefore A=60°$． ………………………………………………………6 分

（II）$\because \angle OAC+\angle OAB=60°$， $\angle OAB+\angle ABO=180°-120°=60°$，

$\therefore \angle OAC=\angle ABO$． ……………………………………………………………7 分

在 ΔABO 中，$\dfrac{AO}{\sin\angle ABO}=\dfrac{3}{\sin 120°}$， $\therefore AO=2\sqrt{3}\sin\angle ABO$． ……………8 分

在 $\triangle ACO$ 中， $\dfrac{1}{\sin 135°}=\dfrac{AO}{\sin\angle ACO}=\dfrac{AO}{\sin(45°-\angle ABO)}$，

$\therefore AO=\sqrt{2}\sin(45°-\angle ABO)$， ……………………………………………………10 分

$\therefore \sqrt{2}\sin(45°-\angle ABO)=2\sqrt{3}\sin\angle ABO$，

整理得 $\cos\angle ABO=(2\sqrt{3}+1)\sin\angle ABO$， ……………………………………12 分

$\therefore \tan\angle ABO=\dfrac{2\sqrt{3}-1}{11}$． ……………………………………………………………13 分

方案二：选条件②不构成三角形，不给分

（I）$\because \sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=2\sin B\sin C$，

由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=2bc$．

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$， 又 $0°<A<180°$， $\therefore A=0$ 不符合题意.

方案三：选条件③

（I） $\because 2\cos A(c\cos B+b\cos C)=a$，

由正弦定理得 $2\cos A(\sin C\cos B+\sin B\cos C)=\sin A$，……………………2 分

$\therefore 2\cos A\sin A=\sin A$，又 $0°<A<180°$，所以 $\sin A>0$，$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，……4 分

又 $0°<A<180°$，$\therefore A=60°$．……………………………………………6 分

（II）同方案一（2）

17.【参考答案】

（I）证明：连接 MN, C_1A.由 M, N 分别是 BC, BA 的中点，根据中位线性质，$MN // AC$，

且 $MN=\dfrac{AC}{2}=1$，……………………………1 分

由棱台性质，$A_1C_1 // AC$，于是 $MN // A_1C_1$，……2 分

由 $MN=A_1C_1=1$ 可知，四边形 MNA_1C_1 是平行四边形，则 $A_1N // C_1M$，……………3 分

再根据 $AN=BN=\dfrac{AB}{2}=1$,且 $A_1B_1 // AB$，$\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{A_1C_1}{AC}=\dfrac{1}{2}$，

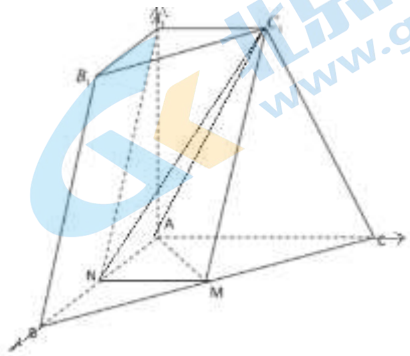
可知，四边形 A_1B_1BN 是平行四边形，则 $A_1N // B_1B$，则 $B_1B // C_1M$，……………4 分

又 B_1B 平面 C_1MA，$C_1M \subset$ 平面 C_1MA，于是 B_1B //平面 C_1MA…………………6 分

（II）解：由已知 $A_1A \perp$ 面 $ABC, AB\perp AC$，以 A 为坐标原点，AB, AC, AA_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

如图，$AB=AC=AA_1=2, A_1C_1=1$，M, N 分别是 BC, BA 中点，

则 $A(0,0,0), N(1,0,0), M(1,1,0), C_1(0,1,2), A_1(0,0,2)$，………………………………8 分



$\therefore \overrightarrow{AC_1}=(0,1,2), \overrightarrow{AM}=(1,1,0)$，

设平面 AC_1M 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=x+y=0\end{cases}$，

$\therefore \vec{n}=(2,-2,1)$ ………………………………9 分

$\therefore \overrightarrow{C_1N}=(1,-1,-2), \overrightarrow{NM}=(0,1,0)$

设平面 C_1MN 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{C_1N}=x-y-2z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{NM}=y=0\end{cases}$，

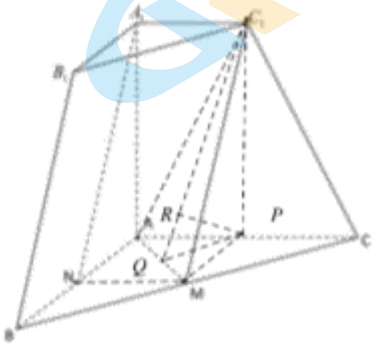
$\therefore \vec{m}=(2,0,1)$ ……………………………………10 分

设二面角 $A-C_1M-N$ 平面角大小为 θ

$$\therefore |\cos\theta| = \left|\cos\langle \vec{n}, \vec{m}\rangle\right| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}，\quad \therefore \sin\theta = \frac{2}{3}$$

所以，二面角 $A-C_1M-N$ 正弦值为 $\frac{2}{3}$． ……………………………………12 分

（III）[方法一：几何法]



过 C_1 作 $C_1P\perp AC$，垂足为 P，

作 $C_1Q\perp AM$，垂足为 Q，连接 PQ, PM，

过 P 作 $PR\perp C_1Q$，垂足为 R．

由题干数据可得，$C_1A = C_1C = \sqrt{5}$，

$$C_1M = \sqrt{C_1P^2 + PM^2} = \sqrt{5}，$$

根据勾股定理，$C_1Q = \sqrt{5-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，

由 $C_1P\perp$ 平面 AMC，$AM\subset$ 平面 AMC，则 $C_1P\perp AM$，又 $C_1Q\perp AM$，$C_1Q\cap C_1P = C_1$，

$C_1Q, C_1P\subset$ 平面 C_1PQ，于是 $AM\perp$ 平面 C_1PQ．

又 $PR\subset$ 平面 C_1PQ，则 $PR\perp AM$，又 $PR\perp C_1Q$，$C_1Q\cap AM = Q$，

$C_1Q, AM\subset$ 平面 C_1MA，故 $PR\perp$ 平面 C_1MA．

在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1PQ$ 中，$PR = \dfrac{PC_1\cdot PQ}{QC_1} = \dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{3}$，又 $CA = 2PA$，

点 C 到平面 C_1MA 的距离是 P 到平面 C_1MA 的距离的两倍，

所以，点 C 到平面 C_1MA 的距离是 $\frac{4}{3}$． ……………………………………14 分

[方法二：等体积法]辅助线同方法一．

设点 C 到平面 C_1MA 的距离为 h．

$$V_{C_1-AMC} = \frac{1}{3}\times C_1P\times S_{\triangle AMC} = \frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2}{3}，$$

$V_{C-C_1MA}=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle AMC_1}=\frac{1}{3}\times h\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{h}{2}$.

由 $V_{C_1-AMC}=V_{C-C_1MA}\Leftrightarrow\frac{h}{2}=\frac{2}{3}$，即 $h=\frac{4}{3}$. ....14 分

[方法三：空间向量公式法]

设 C 到平面 C_1MA 的距离是 d，$\therefore\overrightarrow{AC}=(0,2,1)$，设 $d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|}=\frac{4}{3}$ ....14 分

18.【参考答案】

（Ⅰ）由概率和为 1 得：$2\times0.02+2\times0.03+2\times0.05+2\times0.05+2\times0.15+2\times a+2\times0.05$

$+2\times0.04+2\times0.01$

$=1$

解得：$a=0.1$ ....3 分

（Ⅱ）由分层抽样性质知，

从参加公益劳动时间在 $(12,14]$ 中抽取 5 人，

从参加公益劳动时间在 $(14,16]$ 中抽取 4 人，

从参加公益劳动时间在 $(16,18]$ 中抽取 1 人， ....4 分

从该 10 人中抽取 3 人，则 X 的可能取值为 0,1,2,3， ....5 分

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，

$P(X=2)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$， ....9 分

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

.................................10 分

期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=1.2$ ....11 分

（Ⅲ）学生参加公益劳动时间在 $(10,12]$ 的概率 $P=0.1\times2=0.2$，

则 $P_{20}(k)=C_{20}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20-k}$，当 $k=4$ 时，$P_{20}(k)$ 最大. ………………….13 分

19.【参考答案】

(Ⅰ)由题意，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}=2a$，解得 $a=2,c=\sqrt{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，长轴长为 $2a=4$ ……………………………4 分

(Ⅱ)联立 $\begin{cases} y=kx-2 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 消 y 整理得：$(4k^2+1)x^2-16kx+12=0$，

由 $\Delta=256k^2-4(4k^2+1)\times 12>0$，解得 $k^2>\dfrac{3}{4}$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{16k}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{12}{4k^2+1}$，

设 AB 中点 $G(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{8k}{4k^2+1}$，$y_0=kx_0-2=\dfrac{-2}{4k^2+1}$，

故 $G\left(\dfrac{8k}{4k^2+1},\dfrac{-2}{4k^2+1}\right)$ ……………………………6 分

假设存在 k 和点 $P(x_0,0)$，使得 $\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形，

则 $PG\perp AB$，故 $k_{PG}\cdot k_{AB}=-1$，

所以 $\dfrac{\dfrac{-2}{4k^2+1}}{\dfrac{8k}{4k^2+1}-x_0}\times k=-1$，解得 $x_0=\dfrac{6k}{4k^2+1}$，故 $P\left(\dfrac{6k}{4k^2+1},0\right)$ ……………………8 分

又因为 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ ……………………………9 分

所以 $(x_1-x_0,y_1)\cdot(x_2-x_0,y_2)=0$，即 $(x_1-x_0)(x_2-x_0)+y_1y_2=0$

整理得 $(k^2+1)x_1x_2-(2k+x_0)(x_1+x_2)+{x_0}^2+4=0$，……………………………10 分

所以 $(k^2+1)\cdot\dfrac{12}{4k^2+1}-(2k+\dfrac{6k}{4k^2+1})\cdot\dfrac{16k}{4k^2+1}+\left(\dfrac{6k}{4k^2+1}\right)^2+4=0$

分子通分得 $12\left(k^2+1\right)\times\left(4k^2+1\right)-8\times 16k^2\times\left(k^2+1\right)+36k^2+4\times\left(4k^2+1\right)^2=0$

即 $3\left(k^2+1\right)\times\left(4k^2+1\right)-32k^2\times\left(k^2+1\right)+9k^2+\left(4k^2+1\right)^2=0$

所以 $-4k^4+4=0$，所以 $k^4=1$，即 $k=\pm 1$ ……………………………13 分

当 $k=1$ 时，P 点坐标为 $\left(\dfrac{6}{5},0\right)$；当 $k=-1$ 时，P 点坐标为 $\left(-\dfrac{6}{5},0\right)$

此时，$\triangle PAB$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形. ……………………………15 分

20.【参考答案】

(Ⅰ) 由 $a=e$，则 $f(x)=2e^x-ex^2$，所以 $f'(x)=2e^x-2ex$， ………………2 分

则在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处切线的斜率$f'\left(0\right)=2$,，由$f\left(0\right)=2$,……………………4 分

在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处切线的方程是$y=2x+2$.　　　……………………………5 分

（Ⅱ）解法一：若$f\left(x\right)$存在两个极值点，

则$f'\left(x\right)=2a^x\ln a-2ex,\left(a>1且a\neq 1\right)$至少有两个变号零点，设为$x_1,x_2$，

令$g\left(x\right)=f'\left(x\right)=2a^x\ln a-2ex$，则$g'\left(x\right)=2a^x\left(\ln a\right)^2-2e$

且$f\left(0\right)=2>0$，$f'\left(0\right)=2\ln a$，$g'\left(0\right)=2\left(\ln a\right)^2-2e$，

当$a>0$时，$y=a^x$是增函数，所以$g'\left(x\right)=2a^x\left(\ln a\right)^2-2e$在$R$上单增，

存在$x_0\in R$，使得$g'\left(x_0\right)=0$，有

x	$\left(-\infty,x_0\right)$	x_0	$\left(x_0,+\infty\right)$
$g'\left(x\right)$	－	0	＋
$g\left(x\right)=f'\left(x\right)$	单减	极小值	单增

由于$f'\left(0\right)=2\ln a>0$，若$f'\left(x_0\right)=2a^{x_0}\cdot\ln a-2ex_0<0$，

则存在x_1,x_2分别是$f\left(x\right)$两个极值点，若$x_1<x_2$，如下表：

x	$\left(-\infty,x_1\right)$	x_1	$\left(x_1,x_2\right)$	x_2	$\left(x_2,+\infty\right)$
$f'\left(x\right)$	＋	0	－	0	＋
$f\left(x\right)$	单增	极大值	单减	极小值	单增

不符合题意，　　　　　　　　　　　　　　……………………………9 分

当$0<a<1$时，$y=a^x$是减函数，所以$g'\left(x\right)=2a^x\left(\ln a\right)^2-2e$在$R$上单减，

存在$x_0\in R$，使得$g'\left(x_0\right)=0$，有

x	$\left(-\infty,x_0\right)$	x_0	$\left(x_0,+\infty\right)$
$g'\left(x\right)$	＋	0	－
$g\left(x\right)=f'\left(x\right)$	单增	极大值	单减

由于$f'\left(0\right)=2\ln a<0$，若$g'\left(x_0\right)=2a^{x_0}\cdot\left(\ln a\right)^2-2e=0$，

$\therefore a^{x_0}=\frac{e}{(\ln a)^2}$，则 $x_0=\log_a\frac{e}{(\ln a)^2}$

若存在 x_1,x_2 分别是 $f(x)$ 两个极值点，若 $x_1<x_2$，如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	单减	极小值	单增	极大值	单减

使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，且 $f'(x_0)=2a^{x_0}\cdot\ln a-2ex_0>0$

即 $a^{x_0}\cdot\ln a-ex_0>0$，$\therefore\frac{e}{(\ln a)^2}\cdot\ln a>e\cdot\log_a\frac{e}{(\ln a)^2}$，

$\therefore\frac{1}{\ln a}>\log_a\frac{e}{(\ln a)^2}$，$\therefore a^{\frac{1}{\ln a}}>\frac{e}{(\ln a)^2}$，$\therefore\frac{1}{\ln a}\cdot\ln a>1-\ln(\ln a)^2$

$\therefore\ln(\ln a)^2<0$，$\therefore 0<(\ln a)^2<1$，$\therefore -1<\ln a<1$，$\therefore\frac{1}{e}<a<e$

且 $0<a<1$，所以 $a\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ ....15 分

（Ⅱ）解法二：由 $f'(x)=2a^x\ln a-2ex=0$

$\therefore\frac{a^x}{x}=\frac{e}{\ln a}$，$\because a^x=e^{\ln a^x}$，则 $\frac{a^x}{x}=\frac{e^{\ln a^x}}{x}=\frac{e}{\ln a}$，$\therefore\frac{e^{x\cdot\ln a}}{x\cdot\ln a}=\frac{e}{(\ln a)^2}$

令 $t=x\cdot\ln a,(t\neq0)$，则设 $h(t)=\frac{e^t}{t}$，设 $y=\frac{e}{(\ln a)^2}$

由于 $h'(t)=\frac{e^t}{t^2}(t-1)=0$，求得 $t=1$，如下表：

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	—	—	0	+
$h(x)$	单减	单减	极小值 e	单增

当 $h(t)=\frac{e^t}{t}$ 与 $y=\frac{e}{(\ln a)^2}$ 的图像有两个交点 t_1,t_2 时

有 $\frac{e}{(\ln a)^2}>e$，$\therefore 0<(\ln a)^2<1$，$\therefore -1<\ln a<1$，$\therefore\frac{1}{e}<a<e$

且 $0<a<1$，所以 $a\in\left(\frac{1}{e},1\right)$

21.【参考答案】

(1) 由题设 $b_1=|0-1|=1\le b_2=|1-a_3|$，则 $|1-a_3|\ge 1$，即 $1-a_3\le -1$ 或 $1-a_3\ge 1$，

所以 $a_3\ge 2$ 或 $a_3\le 0$，任意两项均不相等，所以 $a_3\ne 0$， $a_3\ne 1$，

所以 a_3 的取值范围是 $\{n\in \mathbf{Z}\mid n<0 或 n\ge 2\}$. ……………………………4 分

(2) 由 $\{a_n\}$ 各项均为整数，任意两项均不相等，要使 $\sum_{i=1}^{5}|a_i|$ 最小，即 $|a_i|$ 尽量小，

则 $(\sum_{i=1}^{5}|a_i|)_{\min}=0+1+1+2+2$，所以 $\{a_n\}$ 中的前 5 项为 $-2,-1,0,1,2$，

要使 $\sum_{i=1}^{4}b_i$ 最大，即 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+|a_4-a_5|$ 最大，

而 $b_i\le b_{i+1}$，则 $|a_1-a_2|\le|a_2-a_3|\le|a_3-a_4|\le|a_4-a_5|$.

不妨令 $a_5=2$，只需依次使 $|a_4-a_5|$，$|a_3-a_4|$，$|a_2-a_3|$，$|a_1-a_2|$ 取到最大，

要使 $|a_4-a_5|$ 最大，则 $a_4=-2$； 要使 $|a_3-a_4|$ 最大，则 $a_3=1$；

要使 $|a_2-a_3|$ 最大，则 $a_2=-1$，所以 $a_1=0$；

此时 $|a_4-a_5|=4>|a_3-a_4|=3>|a_2-a_3|=2>|a_1-a_2|=1$，

综上，$(\sum_{i=1}^{4}b_i)_{\max}=1+2+3+4=10$. ……………………………10 分

(3) 对于 $1\le a_i\le m(i=1,2,\cdots,m)$，则 $\sum_{k=1}^{m-1}b_k$ 的最小值为 $m-1$，

而 $\sum_{k=1}^{m-1}b_k=m+1>m-1$， 由 $(m+1)-(m-1)=2$，且 $b_i\le b_{i+1}(i=1,2,\cdots,m-2)$，

所以 $\{b_{m-1}\}$ 有如下情况:

①最后一项为 3，前面各项都为 1; ②最后两项为 2，前面各项都为 1;

$m=3$，数列 $\{b_{m-1}\}$ 不可能出现 3，或同时出现两个 2，排除;

$m=4$，数列 $\{a_m\}$ 为 3, 2, 1, 4，对应数列 $\{b_{m-1}\}$ 为 1, 1, 3，则存在满足题设的情况;

$m=5$，以下过程中 $x\in\mathbf{N}^*$，

若存在满足①的数列 $\{b_{m-1}\}$ 元素依次为 1, 1, 1, 3,

令数列 $\{a_m\}$ 前 4 项为 x，$x+1$，$x+2$，$x+3$，则第 5 项为 x (存在重复项，舍)或 $x+6$， 而第 5 项为 $x+6>5$，不满足题设;

若存在满足②的数列 $\{b_{m-1}\}$ 元素依次为 1, 1, 2, 2,

令数列 $\{a_m\}$ 前 3 项为 x，$x+1$，$x+2$，则第 4 项为 x (存在重复项，舍)或 $x+4$，

第 4 项为 $x+4$，第 5 项为 $x+2$ (存在重复项，舍)或 $x+6$，而 $x+6>5$ 不满足题设;

同上讨论，$m\geq 6$ 时不可能存在满足题设的数列 $\{a_m\}$． 综上，$m=4$ . ...15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！