2017年全国高中数学联合竞赛加试（A卷）
参考答案及评分标准

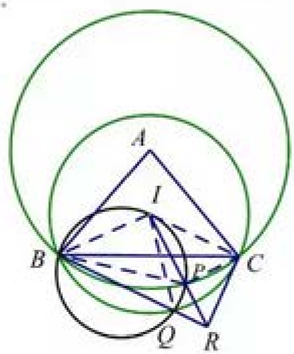
说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分．

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，**不得增加其他中间档次**．

一、（本题满分40分）如图，在ΔABC中，$AB=AC$，I为ΔABC的内心．以A为圆心，AB为半径作圆Γ_1，以I为圆心，IB为半径作圆Γ_2，过点B、I的圆Γ_3与Γ_1、Γ_2分别交于点P、Q（不同于点B）．设IP与BQ交于点R．

证明：$BR\perp CR$．**（答题时请将图画在答卷纸上）**



证明：连接IB，IC，IQ，PB，PC．

由于点Q在圆Γ_2上，故$IB=IQ$，所以$\angle IBQ=\angle IQB$．

又B，I，P，Q四点共圆，所以$\angle IQB=\angle IPB$，于是$\angle IBQ=\angle IPB$，故$\Delta IBP\backsim\Delta IRB$，从而有$\angle IRB=\angle IBP$，且

$$\frac{IB}{IR}=\frac{IP}{IB}.$$ ……………………10分

注意到$AB=AC$，且I为ΔABC的内心，故$IB=IC$，所以

$$\frac{IC}{IR}=\frac{IP}{IC},$$

于是$\Delta ICP\backsim\Delta IRC$，故$\angle IRC=\angle ICP$． ……………………20分

又点P在圆Γ_1的弧BC上，故$\angle BPC=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，因此

$$\begin{aligned}\angle BRC&=\angle IRB+\angle IRC=\angle IBP+\angle ICP\\&=360^\circ-\angle BIC-\angle BPC\\&=360^\circ-\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A\right)-\left(180^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)\\&=90^\circ,\end{aligned}$$

故$BR\perp CR$． ……………………40分

二、（本题满分 40 分） 设数列$\{a_n\}$定义为$a_1=1$，

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n, & 若\ a_n\le n,\\ a_n-n, & 若\ a_n>n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

求满足$a_r<r\le 3^{2017}$的正整数r的个数.

解： 由数列的定义可知$a_1=1,a_2=2$．假设对某个整数$r\ge 2$有$a_r=r$，我们证明对$t=1,\cdots,r-1$，有

$$a_{r+2t-1}=2r+t-1>r+2t-1,\quad a_{r+2t}=r-t<r+2t. \qquad ①$$

对t归纳证明.

当$t=1$时，由于$a_r=r\ge r$，由定义，$a_{r+1}=a_r+r=r+r=2r>r+1$，$a_{r+2}=a_{r+1}-(r+1)=2r-(r+1)=r-1<r+2$，结论成立.

设对某个$1\le t<r-1$，①成立，则由定义

$$a_{r+2t+1}=a_{r+2t}+(r+2t)=r-t+r+2t=2r+t>r+2t+1,$$

$$a_{r+2t+2}=a_{r+2t+1}-(r+2t+1)=2r+t-(r+2t+1)=r-t-1<r+2t+2,$$

即结论对$t+1$也成立．由数学归纳法知，①对所有$t=1,2,\cdots,r-1$成立，特别当$t=r-1$时，有$a_{3r-2}=1$，从而$a_{3r-1}=a_{3r-2}+(3r-2)=3r-1$.

若将所有满足$a_r=r$的正整数r从小到大记为$r_1,r_2,\cdots$，则由上面的结论可知$r_1=1,r_2=2$，$r_{k+1}=3r_k-1$，$k=2,3,\cdots$.　……………………20 分

由此可知，$r_{k+1}-\dfrac{1}{2}=3\left(r_k-\dfrac{1}{2}\right)(k=1,\cdots,m-1)$，从而

$$r_m=3^{m-1}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3^{m-1}+1}{2}.$$

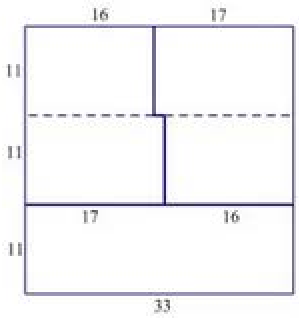
由于$r_{2018}=\dfrac{3^{2017}+1}{2}<3^{2017}<\dfrac{3^{2018}+1}{2}=r_{2019}$，在$1,2,\cdots,3^{2017}$中满足$a_r=r$的数$r$共有2018个，为$r_1,r_2,\cdots,r_{2018}$.　……………………30 分

由①可知，对每个$k=1,2,\cdots,2017$，$r_k+1,r_k+2,\cdots,3r_k-2$中恰有一半满足$a_r<r$．由于$r_{2018}+1=\dfrac{3^{2017}+1}{2}+1$与$3^{2017}$均为奇数，而在$r_{2018}+1,\ \cdots,3^{2017}$中，奇数均满足$a_r>r$，偶数均满足$a_r<r$，其中的偶数比奇数少 1 个．因此满足$a_r<r\le 3^{2017}$的正整数$r$的个数为

$$\frac{1}{2}\left(3^{2017}-2018-1\right)=\frac{3^{2017}-2019}{2}. \qquad ……………………40 分$$

三、（本题满分 50 分） 将33×33方格纸中每个小方格染三种颜色之一，使得每种颜色的小方格的个数相等．若相邻两个小方格的颜色不同，则称它们的公共边为“分隔边”．试求分隔边条数的最小值.

解： 记分隔边的条数为L．首先，将方格纸按如图分成三个区域，分别染成三种颜色， 粗线上均为分隔边，此时共有 56 条分隔边，即$L=56$．　…………10 分



下面证明 $L \geq 56$．将方格纸的行从上至下依次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{33}$，列从左至右依次记为 $B_1, B_2, \cdots, B_{33}$．行 A_i 中方格出现的颜色数记为 $n(A_i)$，列 B_i 中方格出现的颜色个数记为 $n(B_i)$．三种颜色分别记为 c_1, c_2, c_3．对于一种颜色 c_j，设 $n(c_j)$ 是含有 c_j 色方格的行数与列数之和．记

$$\delta(A_i, c_j) = \begin{cases} 1, & 若A_i行含有c_j色方格, \\ 0, & 否则, \end{cases}$$

类似地定义 $\delta(B_i, c_j)$．于是

$$\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i)) = \sum_{i=1}^{33}\sum_{j=1}^{3}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j))$$
$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{33}(\delta(A_i,c_j)+\delta(B_i,c_j)) = \sum_{j=1}^{3} n(c_j).$$

由于染 c_j 色的方格有 $\frac{1}{3}\cdot 33^2 = 363$ 个，设含有 c_j 色方格的行有 a 个，列有 b 个，则 c_j 色的方格一定在这 a 行和 b 列的交叉方格中，因此 $ab \geq 363$，从而

$$n(c_j) = a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{363} > 38,$$

故

$$n(c_j) \geq 39,\ j = 1, 2, 3. \qquad ①$$

…………………20 分

由于在行 A_i 中有 $n(A_i)$ 种颜色的方格，因此至少有 $n(A_i)-1$ 条分隔边．同理在列 B_j 中，至少有 $n(B_j)-1$ 条分隔边．于是

$$L \geq \sum_{i=1}^{33}(n(A_i)-1) + \sum_{i=1}^{33}(n(B_i)-1)$$
$$= \sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i)) - 66 \qquad ②$$
$$= \sum_{j=1}^{3} n(c_j) - 66. \qquad ③$$

…………………30 分

下面分两种情形讨论．

情形 1：有一行或一列全部方格同色．不妨设有一行全为 c_1 色，从而方格纸的 33 列中均含有 c_1 色的方格，由于 c_1 色方格有 363 个，故至少有 11 行中含有 c_1 色方格，于是

$$n(c_1)\ge 11+33=44. \qquad ④$$

由①，③及④即得

$$L\ge n(c_1)+n(c_2)+n(c_3)-66\ge 44+39+39-66=56.$$

…………………40 分

情形 2：没有一行也没有一列的全部方格同色．则对任意 $1\le i\le 33$，均有 $n(A_i)\ge 2$，$n(B_i)\ge 2$．从而由②知

$$L\ge\sum_{i=1}^{33}(n(A_i)+n(B_i))-66\ge 33\times 4-66=66>56.$$

综上所述，分隔边条数的最小值等于 56.　　　　…………………50 分

四、（本题满分 50 分）设 m,n 均是大于 1 的整数，$m\ge n$．$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不超过 m 的互不相同的正整数，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素．证明：对任意实数 x，均存在一个 i（$1\le i\le n$），使得 $\| a_i x\|\ge\frac{2}{m(m+1)}\| x\|$，这里 $\| y\|$ 表示实数 y 到与它最近的整数的距离．

证明：首先证明以下两个结论．

结论 1：存在整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足 $c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1$，并且 $|c_i|\le m$，$1\le i\le n$．

由于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$，由裴蜀定理，存在整数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，满足

$$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1. \qquad ①$$

下面证明，通过调整，存在一组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 满足①，且绝对值均不超过 m．记

$$S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sum_{c_i>m}c_i\ge 0,\qquad S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sum_{c_j<-m}|c_j|\ge 0.$$

如果 $S_1>0$，那么存在 $c_i>m>1$，于是 $c_ia_i>1$，又因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数，故由①可知存在 $c_j<0$．令

$$c_i'=c_i-a_j,\ c_j'=c_j+a_i,\ c_k'=c_k(1\le k\le n,\ k\ne i,j),$$

则

$$c_1'a_1+c_2'a_2+\cdots+c_n'a_n=1, \qquad ②$$

并且 $0\le m-a_j\le c_i'<c_i$，$c_j<c_j'<a_i\le m$．

因为 $c_i'<c_i$，且 $c_j'<m$，所以 $S_1(c_1',c_2',\cdots,c_n')<S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．又 $c_j'>c_j$ 及 $c_i'>0$，故 $S_2(c_1',c_2',\cdots,c_n')\le S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．

如果 $S_2>0$，那么存在 $c_j<-m$，因此有一个 $c_i>0$．令 $c_i'=c_i-a_j$，$c_j'=c_j+a_i$，$c_k'=c_k(1\le k\le n,\ k\ne i,j)$，那么②成立，并且 $-m<c_i'<c_i$，$c_j<c_j'<0$．与上面类似地可知 $S_1(c_1',c_2',\cdots,c_n')\le S_1(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，且 $S_2(c_1',c_2',\cdots,c_n')<S_2(c_1,c_2,\cdots,c_n)$．

因为 S_1 与 S_2 均是非负整数，故通过有限次上述的调整，可得到一组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得①成立，并且 $S_1=S_2=0$．结论 1 获证．　　　　………………20 分

结论 2：（1）对任意实数 a,b，均有 $\| a+b\|\le\| a\|+\| b\|$．

（2）任意整数 u 和实数 y 有 $\| uy\|\le|u|\cdot\| y\|$．

由于对任意整数u和实数x，有$\| x+u \|=\| x \|$，故不妨设$a,b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，此时$\| a \|=|a|$，$\| b \|=|b|$. 若$ab\le 0$，不妨设$a\le 0\le b$，则$a+b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，从而

$$\| a+b \|=|a+b|\le|a|+|b|=\| a \|+\| b \|.$$

若$ab>0$，即a,b同号. 当$|a|+|b|\le\frac{1}{2}$时，有$a+b\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，此时

$$\| a+b \|=|a+b|=|a|+|b|=\| a \|+\| b \|.$$

当$|a|+|b|>\frac{1}{2}$时，注意总有$\| a+b \|\le\frac{1}{2}$，故

$$\| a+b \|\le\frac{1}{2}<|a|+|b|=\| a \|+\| b \|.$$ …………………30 分

故（1）得证. 由（1）及$\| -y \|=\| y \|$即知（2）成立.

回到原问题，由结论 1，存在整数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，使得$c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n=1$，并且$|c_i|\le m$，$1\le i\le n$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}c_ia_ix=x.$$

利用结论 2 得

$$\| x \|=\left\|\sum_{i=1}^{n}c_ia_ix\right\|\le\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot\| a_ix \|\le m\sum_{i=1}^{n}\| a_ix \|.$$

因此

$$\max_{1\le i\le n}\| a_ix \|\ge\frac{1}{mn}\| x \|. \quad ③$$

…………………40 分

若$n\le\frac{1}{2}(m+1)$，由③可知

$$\max_{1\le i\le n}\| a_ix \|\ge\frac{\| x \|}{mn}\ge\frac{2\| x \|}{m(m+1)}.$$

若$n>\frac{1}{2}(m+1)$，则在$a_1,a_2,\cdots,a_n$中存在两个相邻正整数. 不妨设a_1,a_2相邻，则

$$\| x \|=\| a_2x-a_1x \|\le\| a_2x \|+\| a_1x \|.$$

故$\| a_2x \|$与$\| a_1x \|$中有一个$\ge\frac{\| x \|}{2}\ge\frac{2\| x \|}{m(m+1)}$.

综上所述，总存在一个i（$1\le i\le n$），满足$\| a_ix \|\ge\frac{2}{m(m+1)}\| x \|$. ………50 分