绝密★考试结束前

2023-2024 学年第一学期天域全国名校协作体联考

高三年级数学学科 试题

考生须知：

1．本卷共 5 页满分 150 分，考试时间 120 分钟.

2．答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号并填涂相应数字.

3．所有答案必须写在答题纸上，写在试卷上无效.

4．考试结束后，只需上交答题纸.

选择题部分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若集合 $A=\left\{x\middle|x^2-5x\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|y=\ln(x-7)\right\}$，则 $\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=$（　　）

A．$(0,7]$　　B．$(0,5)$　　C．$(7,+\infty)$　　D．$(5,+\infty)$

2．设复数 $z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $z\cdot\bar{z}=$（　　）

A．$\dfrac{5}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　C. 2　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

3．已知圆锥的底面半径为 2，高为 $4\sqrt{2}$，则该圆锥的侧面积为（　　）

A．4π　　B．12π　　C．16π　　D．$\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

4．已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是单位向量，若 $\vec{a}\perp\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为（　　）

A．$\dfrac{1}{3}\vec{a}$　　B．$-\dfrac{1}{3}\vec{a}$　　C．$\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　D．$-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

5．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)+2$，则下列是周期函数的是（　　）

A. $y=f(x)-x$　　B. $y=f(x)+x$　　C. $y=f(x)-2x$　　D. $y=f(x)+2x$

6．已知圆 C：$x^2-6x+y^2+5=0$，P，Q 是圆上的两点，O 为坐标原点，且 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{PQ}$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的值为（　　）

A．$\sqrt{10}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．10　　D．5

7．小明先后投掷两枚骰子，已知有一次投掷时朝上的点数为偶数，则两次投掷时至少有一次朝

上的点数为 4 的概率为（ ）

A. $\frac{11}{36}$ B. $\frac{11}{27}$ C. $\frac{10}{27}$ D. $\frac{17}{36}$

8. 人教 A 版必修第一册第 92 页上“探究与发现”的学习内容是“探究函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象与性质”，经探究它的图象实际上是双曲线.现将函数 $y=3x+\frac{1}{x}$ 的图象绕原点顺时针旋转得到焦点位于 x 轴上的双曲线 C，则该双曲线 C 的离心率是（ ）

A. $3+\sqrt{10}$ B. $20-6\sqrt{10}$ C. $\sqrt{3+\sqrt{10}}$ D. $\sqrt{20-6\sqrt{10}}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列结论中正确的是（ ）

A. “$\exists x_0\in\mathbf{R},2^{x_0}>x_0^2$”的否定为“$\forall x\in\mathbf{R},\ 2^x\le x^2$”

B. 设 α,β 是两个不同的平面，m 是直线且 $m\subset\alpha$．则“$m\perp\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的充要条件

C. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(10,\sigma^2)$，则 $P(x\le7)<P(x\ge13)$

D. 对具有线性相关关系的变量 x,y，其线性回归方程为 $\hat{y}=2x-m$，若样本的中心为 $(m,2)$，则实数 m 的值是 2

10. 将函数 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$ 图象上点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，然后将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到函数 $g(x)=2\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象.则下列结论中正确的是（ ）

A. $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

B. $\varphi=-\frac{\pi}{3}$

C. $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{7\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $x=-\frac{\pi}{12}$ 为 $g(x)$ 图象的一条对称轴

11. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}+x^3-ax$，则下列结论中正确的是（ ）

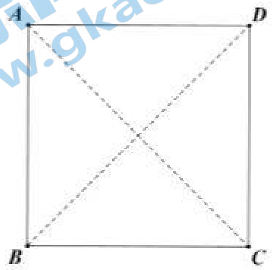
A. 当 $a=0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=x$

B. $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值之和为 0

C. 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，则 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$

D. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至多有 3 个零点

12. 如图，有一只青蛙在正方形池塘的顶点 $ABCD$ 之间跳跃，假设青蛙它跳向相邻顶点的概率为 $\frac{1}{4}$，跳向不相邻顶点的概率为 $\frac{1}{2}$，若青蛙一开始位于顶点 A 处，记青蛙跳跃 n 次后仍位于顶点 A 上的概率为 P_n，则下列结论中正确的是（　　）



A. 青蛙跳跃 2 次后位于 B 点的概率为 $\frac{1}{4}$

B. 数列 $\left\{P_n-\frac{1}{4}\right\}$ 是等比数列

C. 青蛙跳动奇数次后只能位于点 A 的概率始终小于 $\frac{1}{4}$

D. 存在整数 $n\in\mathbf{N}^*$，使得青蛙跳动 n 次后位于 C 点和 D 点的概率相等

非选择题部分

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知抛物线 $x^2=2py$ 上一点 $A(x_0,2)$ 到焦点的距离是该点到 x 轴距离的 2 倍，则 $p=$______

14.设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差 $d>0$，$S_5=S_9$，则当 S_n 取最小值时，$n=$______

15. 米斗是称量粮食的量器，是古代官仓、粮栈、米行的必备的用具。为使坚固耐用，米斗多用上好的木料制成。米斗有着吉祥的寓意，是丰饶富足的象征，带有浓郁的民间文化韵味，如今也成为了一种颇具意趣的藏品。如图的米斗可以看作一个正四棱台，已知该米斗的侧棱长为 10，两个底边长分别为 8 和 6，则该米斗的外接球的表面积是__________

16. 若 $a>0$，$b>0$，且 $3a+b=1$，不等式 $3a^2+b-mab+2>0$ 恒成立，则 m 的取值范围为__________

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$公差为2，且a_1,a_2,a_4恰为等比数列$\{b_n\}$的前三项.

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{c_n\}$满足$c_n=a_n+(-1)^n\cdot b_n$，求$\{c_n\}$的前n项和S_n.

18. （12 分）

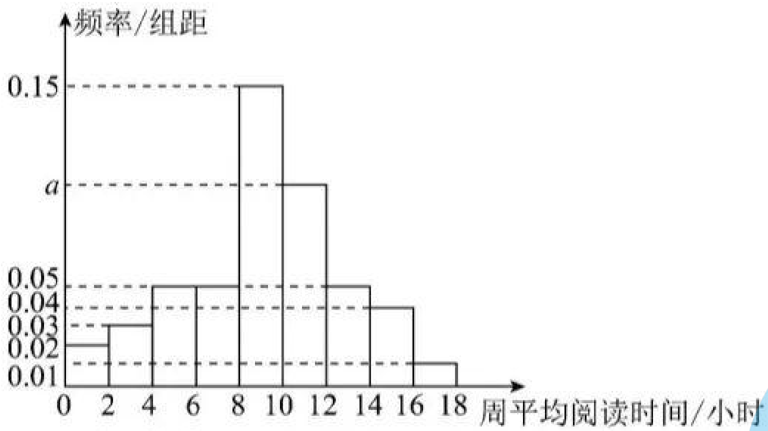
在$\triangle ABC$中角A,B,C所对的边分别为a,b,c，满足$2a\sin A\cos B+b\sin 2A=2\sqrt{3}a\cos C$.

（1）求角C的大小；

（2）若$c=2\sqrt{3}$，$\angle ABC$的平分线与$\angle BAC$的平分线交于点I，求$\triangle ABI$周长的最大值.

19. （12 分）

为了解某市区高中学生的阅读时间，从该市区随机抽取了800名学生进行调查，得到了这800名学生一周的平均阅读时间（单位：小时），并将样本数据分成九组，绘制成如图所示的频率分布直方图.



（1）求a的值；

（2）为进一步了解这800名学生阅读时间的分配情况，从周平均阅读时间在$(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$三组内的学生中，采用分层抽样的方法抽取了10人，现从这10人中随机抽取3人，记周平均阅读时间在$(14,16]$内的学生人数为X，求X的分布列和数学期望；

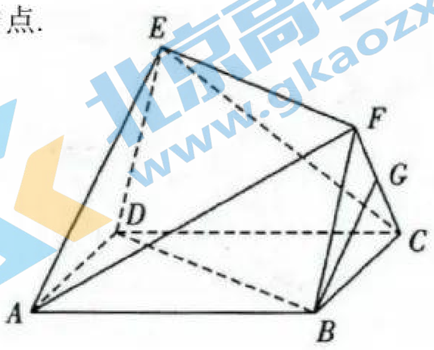
（3）以样本的频率估计概率，从该市区学生周平均阅读时间在$(8,14]$内中随机抽取20名学生.这20名学生中，周平均阅读时间在$(10,12]$内的学生最可能有多少名？

20. （12 分）

如图，已知多面体 $ABCDEF$ 的底面 $ABCD$ 为矩形，四边形 $BDEF$ 为平行四边形，平面 $FBC\perp$ 平面 $ABCD$， $FB=FC=BC=1$， $AB=2$， G 是 CF 的中点.

（1）证明： $BG//$ 平面 AEF；

（2）求直线 AE 与平面 $BDEF$ 所成角的余弦值.



21.（12 分）

已知在平面直角坐标系中，点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$， ΔPAB 的周长为定值 $4\sqrt{2}+4$.

（1）设动点 P 的轨迹为曲线 C，求曲线 C 的方程；

（2）过点 A 作直线 l 交 C 于 M、N 两点，连接 BM、BN 分别与 y 轴交于 D、E 两点，若 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BMN}$，求直线 l 的方程.

22.（12 分）

设函数 $f(x)=a\ln x-(x-1)e^x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若 $a=e$，求 $f(x)$ 的最大值；

（2）若 $f(x)$ 存在两个零点 x_1,x_2

（i）求 a 的取值范围;

（ii）设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，试探究是否存在实数 $a>e$，使得 x_1,x_0,x_2 成等差数列，若存在，求出 a 的值，若不存在，请说明理由.