[redacted] 2024 届高中毕业班第二次考试

文科数学(老教材版)答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查集合的运算.

解析 $A\cap B=\{2,3,4\}$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查复数的基本概念和运算.

解析 $z=\dfrac{3+5i}{1-i}=-1+4i$,故 $\bar{z}=-1-4i$.

3. 答案 A

命题意图 本题考查平均数与方差的计算.

解析 由题可知$\dfrac{1}{5}(2+7+8+5+a)=5$,得 $a=3$,则方差 $s^2=\dfrac{1}{5}(3^2+2^2+3^2+0+2^2)=5.2$.

4. 答案 B

命题意图 本题考查平面向量的数量积.

解析 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,m-4)$,因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,所以 $2+m-4=0$,得 $m=2$.

5. 答案 C

命题意图 本题考查数列的概念与性质.

解析 由题意知 $a_n=2n+1$,$b_n=\dfrac{1}{2}(n-1)$,可知 $a_2=5=b_{11}$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查三角形的面积公式和余弦定理.

解析 由题意得 $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$,$S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$,$S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$,则 $S_1-S_2-S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$,所以 $a^2-b^2-c^2=bc$,故 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$,又 $0<A<\pi$,所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

7. 答案 D

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\dfrac{\sin\alpha}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\alpha}=4$,所以$\dfrac{\tan\alpha}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\tan\alpha}=4$,所以 $\tan\alpha=2\sqrt{3}-2\tan\alpha$,解得 $\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

8. 答案 A

命题意图 本题考查几何概型的计算.

解析 设$\triangle ABC$ 的边长为 $2a(a>0)$,则内切圆的半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$,$\triangle DEF$ 的边长为 a,阴影部分的面积为 $\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$,$\triangle ABC$ 的面积为$\sqrt{3}a^2$,则所求的概率为$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}-\dfrac{1}{4}$.

9. 答案　D

命题意图　本题考查函数的单调性.

解析　由$\frac{1-x}{x}>0$,得$0<x<1$,所以$f(x)$的定义域为$(0,1)$. 设$g(x)=\log_2\frac{1-x}{x}=\log_2\left(\frac{1}{x}-1\right)$,易得$g(x)$在$(0,1)$上单调递减. 当$\frac{1-x}{x}>1$,即$0<x<\frac{1}{2}$时,$g(x)>0$,此时$f(x)=g(x)$单调递减,当$0<\frac{1-x}{x}<1$,即$\frac{1}{2}<x<1$时,$g(x)<0$,此时$f(x)=-g(x)$单调递增,所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{1}{2},1\right)$.

10. 答案　B

命题意图　本题考查圆柱与圆锥的结构特征.

解析　设圆锥的底面半径为r,母线长为l,则$\triangle SMN$的面积为$\frac{1}{2}SM\times SN\sin\angle MSN=\frac{1}{2}l\times l\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$,解得$l=2\sqrt{2}$.因为圆锥$SO$的侧面积为$\pi rl=2\sqrt{2}\pi r=4\sqrt{2}\pi$,所以$r=2$,$SO=\sqrt{l^2-r^2}=2$. 故该几何体的体积为$V=V_{圆柱}+V_{圆锥}=4\pi\times3+\frac{1}{3}\times4\pi\times2=\frac{44\pi}{3}$.

11. 答案　D

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　令$f(x)=0$,得$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,又$\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$,所以只能是$\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得$x=\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内,有$-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4}$共3个零点.

12. 答案　A

命题意图　本题考查双曲线的性质.

解析　设$|PF_2|=m(m>0)$,$|PF_1|=3m$,$\angle F_1PF_2=\theta$,显然$60°<\theta<180°$,则$|F_1F_2|=\sqrt{m^2+9m^2-2\times m\times3m\times\cos\theta}=\sqrt{10m^2-6m^2\cos\theta}=m\sqrt{10-6\cos\theta}$,所以$C$的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|-|PF_2|}=\frac{\sqrt{10-6\cos\theta}}{2}$. 由于$60°<\theta<180°$,所以$\cos\theta\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)$,所以$\frac{\sqrt{10-6\cos\theta}}{2}$的取值范围是$\left(\frac{\sqrt{7}}{2},2\right)$.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 答案　$2\sqrt{3}$

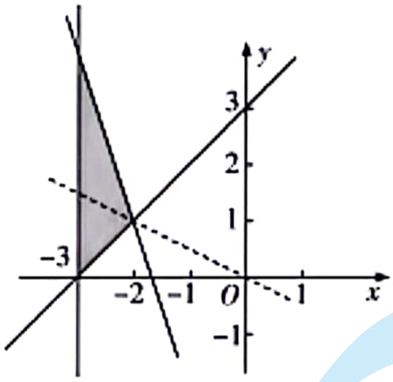
命题意图　本题考查椭圆的性质.

解析　因为$m>3$,所以$\frac{\sqrt{m^2-9}}{m}=\frac{1}{2}$,解得$m=2\sqrt{3}$.

14. 答案　-3

命题意图　本题考查简单的线性规划问题.

解析　不等式组表示的可行域如图中阴影部分所示,直线$x+2y-z=0$过点$(-3,0)$时z取得最小值,且$z_{min}=-3+0=-3$.



15. **答案**　3

命题意图　本题考查空间位置关系的判断以及相关计算.

解析　因为平面 α 经过棱 BB_1，DD_1 的中点，所以四边形 $MENF$ 为菱形，且易证 $A_1C\perp EF$. 又因为 $A_1C\perp ME$，所以 $A_1C\perp$ 平面 $MENF$，所以 $A_1C\perp MN$，且 MN 经过 A_1C 的中点. 在矩形 A_1ACC_1 中利用三角形相似可计算得 $A_1M=3$.

16. **答案**　$\frac{1}{e}$

命题意图　本题考查导数的几何意义.

解析　设 $f(x)=a^x\ln a$，则 $f'(x)=a^x(\ln a)^2$，故 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程可写为 $y=a^{x_0}(\ln a)^2\cdot(x-x_0)+a^{x_0}\ln a$，即 $y=a^{x_0}(\ln a)^2x-x_0a^{x_0}(\ln a)^2+a^{x_0}\ln a$，若切线为 $y=ex$，则 $-x_0a^{x_0}(\ln a)^2+a^{x_0}\ln a=0$，得 $x_0=\frac{1}{\ln a}$，所以 $a^{\frac{1}{\ln a}}(\ln a)^2=e$，即 $e(\ln a)^2=e$，又因为 $0<a<1$，得 $a=\frac{1}{e}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图**　本题考查概率的计算以及独立性检验的应用.

解析　（Ⅰ）因为 $K^2=\frac{400\times(160\times40-80\times120)^2}{240\times160\times280\times120}=\frac{200}{63}\approx3.175$，…………（2 分）

因为 $3.175<3.841$，所以没有 95% 的把握认为男性和女性在选购羽绒服时的关注点有差异. ……（4 分）

（Ⅱ）选出的女性人数为 $7\times\frac{160}{280}=4$，选出的男性人数为 $7\times\frac{120}{280}=3$，…………（7 分）

设 4 名女性为 A，B，C，D，3 名男性为 e，f，g，

从这 7 人中任选 2 人，所有的情况为 AB，AC，AD，Ae，Af，Ag，BC，BD，Be，Bf，Bg，CD，Ce，Cf，Cg，De，Df，Dg，ef，eg，fg，共 21 种，…………（9 分）

2 人都是女性的情况为 AB，AC，AD，BC，BD，CD，共 6 种，…………（10 分）

故所求的概率为 $\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$. …………（12 分）

18. **命题意图**　本题考查面面垂直的证明以及点到平面的距离的计算.

解析　（Ⅰ）因为 $EF\perp FC$，平面 $EFCD\perp$ 平面 $ABCF$，

所以 $EF\perp$ 平面 $ABCF$，…………（1 分）

又因为 $PC\subset$ 平面 $ABCF$，所以 $EF\perp PC$. …………（2 分）

在矩形 $ABCF$ 中，$AF=1$，$AB=2$，P 为 AB 的中点，

所以 $FP=CP=\sqrt{2}$，$FC=2$，根据勾股定理可得 $FP\perp PC$. …………（3 分）

因为 $EF\cap FP=F$，所以 $PC\perp$ 平面 EPF，…………（4 分）

所以平面 $EPF\perp$ 平面 DPC. …………（5 分）

(Ⅱ)由题意知 $V_{D-PBC}=V_{B-DPC}$, …………………………………………………………………… (7 分)

$V_{D-PBC}=\frac{1}{3}EF\times S_{\triangle PBC}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{6}$. …………………………………………………………………… (8 分)

在△DPC 中,可得 $DP=PC=DC=\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle DPC}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………………………………… (10 分)

设点 B 到平面 DPC 的距离为 d,则 $V_{B-DPC}=\frac{1}{3}S_{\triangle DPC}d$,

所以 $d=\dfrac{3\times\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即点 B 到平面 DPC 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查递推关系与等比数列的性质,以及错位相减法的应用.

解析 (Ⅰ)因为 $a_n=2a_{n-1}-2n+4(n\geq2)$,

所以 $a_n-2n=2[a_{n-1}-2(n-1)](n\geq2)$. …………………………………………………………………… (2 分)

所以$\{a_n-2n\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列. …………………………………………………………………… (4 分)

所以 $a_n-2n=2^n$,即 $a_n=2^n+2n$. …………………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $2^n\cdot a_n-4^n=n\cdot2^{n+1}$. …………………………………………………………………… (7 分)

设前 n 项和为 T_n,

则 $T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$,

$2T_n=1\times2^3+2\times2^4+3\times2^5+\cdots+n\times2^{n+2}$, …………………………………………………………………… (9 分)

两式相减可得

$-T_n=2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-n\times2^{n+2}=\frac{2^2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+2}=2^{n+2}-4-n\times2^{n+2}=(1-n)2^{n+2}-4$,

所以 $T_n=(n-1)2^{n+2}+4$. …………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查抛物线的性质,抛物线与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)由题可得 $16=8p$,解得 $p=2$, …………………………………………………………………… (2 分)

所以 $F(0,1)$,$S_{\triangle MOF}=\frac{1}{2}|OF|y_M=\frac{1}{2}\times1\times4=2$. …………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 C 的方程为 $y^2=4x$.

由题意可知直线 AB 不与 x 轴平行,设直线 AB 的方程为 $x=my+b$,$A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$,$B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$,则 $y_1y_2\neq\pm4$.

联立方程得$\begin{cases}x=my+b,\\y^2=4x,\end{cases}$整理可得 $y^2-4my-4b=0$, …………………………………………………………………… (6 分)

则 $\Delta=16m^2+16b>0$,且 $y_1+y_2=4m$①,$y_1y_2=-4b$②. …………………………………………………………………… (7 分)

$k_{HA}=\dfrac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{4}-4}=\frac{4}{y_1+4}$,同理可得 $k_{HB}=\frac{4}{y_2+4}$. …………………………………………………………………… (8 分)

由题意得 $k_{HA}\times k_{HB}=\frac{4}{y_1+4}\times\frac{4}{y_2+4}=-2$,即 $4(y_1+y_2)+y_1y_2+24=0$,

将①②代入可得 $16m-4b+24=0$,即 $b=4m+6$. …………………………………………………………………… (10 分)

故直线 AB 的方程可化为 $x=my+4m+6$,即 $x-6=m(y+4)$,

直线 AB 过定点 $D(6,-4)$. ………………………………………………………………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 （Ⅰ）$f'(x)=3x^2-2a$, ……………………………………………………………………（1 分）

因为 $a>0$，令 $f'(x)<0$，得 $-\frac{\sqrt{6a}}{3}<x<\frac{\sqrt{6a}}{3}$，令 $f'(x)>0$，得 $x<-\frac{\sqrt{6a}}{3}$ 或 $x>\frac{\sqrt{6a}}{3}$. ……………（3 分）

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\sqrt{6a}}{3},\frac{\sqrt{6a}}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6a}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{6a}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………（4 分）

（Ⅱ）当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant3e^x+x^3-x^2$，即 $x^3-2ax+a^2\leqslant3e^x+x^3-x^2$，

整理得 $3e^x\geqslant x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$，即 $\frac{(x-a)^2}{3e^x}\leqslant1$. ……………………………………………（5 分）

令 $g(x)=\frac{(x-a)^2}{3e^x}(x\geqslant0)$，则 $g(x)_{\max}\leqslant1$ 即可.

求导得 $g'(x)=-\frac{(x-a)(x-a-2)}{3e^x}$，

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=a,x_2=a+2$，…………………………………………………………………（7 分）

所以 $g(x)$ 在 $[0,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，

则 $g(x)_{\max}=g(0)$ 或 $g(a+2)$. ……………………………………………………………………（9 分）

所以 $\begin{cases}g(0)=\frac{a^2}{3}\leqslant1,\\ g(a+2)=\frac{4}{3e^{a+2}}\leqslant1,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\sqrt{3}$，

所以 a 的取值范围是 $(0,\sqrt{3}]$. ……………………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查方程的互化、直线的参数方程的应用.

解析 （Ⅰ）由 l 的参数方程可知 $P(-2,0)$，…………………………………………………………（1 分）

由题意知 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|OP||OQ|=\frac{1}{2}\times2|OQ|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $|OQ|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即 $Q\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. ……………（3 分）

所以 l 的斜率为 $\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}-0}{0-(-2)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 l：$\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），…………………………………………（6 分）

代入 $x^2-y^2=1$，得到 $t^2-4\sqrt{3}t+6=0$. ……………………………………………………（7 分）

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=4\sqrt{3}$，$t_1t_2=6>0$，…………………………………（8 分）

故 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的解法及性质.

解析 （Ⅰ）将 $a=2,b=3$ 代入 $f(x)\geqslant6$，得 $|x+2|+|x-3|\geqslant6$，…………………………（1 分）

等价于 $\begin{cases}x\leqslant-2,\\ 1-2x\geqslant6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2<x<3,\\ 5\geqslant6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant3,\\ 2x-1\geqslant6,\end{cases}$

得 $x\leqslant -\frac{5}{2}$或无解或 $x\geqslant \frac{7}{2}$. ……………………………………………………………………（4 分）

所以不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2},+\infty\right)$. ……………………………………（5 分）

（Ⅱ）$f(x)=|x+a|+|x-b|\geqslant|(x+a)-(x-b)|=|a+b|$, ……………………………………（6 分）

因为 $f(x)$ 的最小值为 2，且 $a>0,b>1$，所以 $a+b=2$. ……………………………………（7 分）

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b-1}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b-1}\right)(a+b-1)$$

$$=\frac{b-1}{a}+\frac{a}{b-1}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{b-1}{a}\cdot\frac{a}{b-1}}+2=4,$$ ……………………………………（9 分）

当且仅当$\frac{b-1}{a}=\frac{a}{b-1}$，即 $a=b-1$，也即 $a=\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$时取等号，

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b-1}$的最小值为 4. ……………………………………………………………（10 分）