

高三数学

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $(3-i)(2+3i)$ 在复平面内对应的点所在的象限为
A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第四象限
2. 集合 $A = \{x | y = \sqrt{1-x}\}$, $B = \{x | x(x-3) < 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[-1, 0)$
B. $(0, 1]$
C. $[1, 3)$
D. \emptyset
3. 已知圆锥的母线长为 2, 其侧面展开图为一个圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ 的扇形, 则该圆锥的底面半径为
A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 1
D. $\sqrt{2}$
4. 函数 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为
A. $x+4y-3=0$
B. $x-4y+1=0$
C. $x+4y-5=0$
D. $x-4y-5=0$
5. 国家射击运动员甲在某次训练中的 5 次射击成绩(单位:环)为 9, 6, m , 10, 8, 其中 m 为整数, 若这 5 次射击成绩的第 40 百分位数为 8, 则 $m =$
A. 6
B. 7
C. 8
D. 9
6. 古希腊的毕达哥拉斯学派通过研究正五边形和正十边形的作图, 发现了黄金分割率. 黄金分割率的值也可以用 $2\sin 18^\circ$ 表示, 即 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\sin 18^\circ$, 设 θ 为正五边形的一个内角, 则 $\frac{\sin \theta}{\sin 36^\circ} =$
A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
B. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
7. 已知圆 $M: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$, P 为 x 轴上的动点, 过点 P 作圆 M 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 则四边形 $PAMB$ 面积的最小值为
A. 2
B. $2\sqrt{2}$
C. 4
D. $4\sqrt{2}$
8. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $4a^2 + b^2 + 2ab = 6$, 则 $3a^2 + 2b^2$ 的最小值为
A. 6
B. $3\sqrt{3}$
C. $2\sqrt{6}$
D. 4

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知 $a \cos B + b \cos A = abc$, $A + B = 2C$ 。

- (1) 求 $\triangle ABC$ 的面积；
- (2) 求 AB 边上的高的最大值。

18. (12 分)

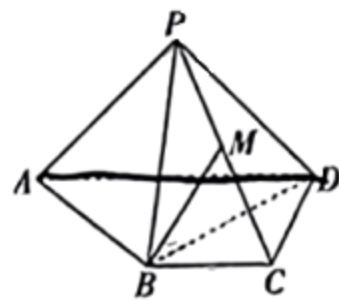
某单位招聘会设置了笔试、面试两个环节，先笔试后面试。笔试设有三门测试，三门测试相互独立，三门测试至少两门通过即通过笔试，通过笔试后进入面试环节，若不通过，则不予录用。面试只有一次机会，通过后即被录用。已知每一门测试通过的概率均为 $\frac{1}{2}$ ，面试通过的概率为 $\frac{2}{5}$ 。

- (1) 求甲通过了笔试的条件下，第三门测试没有通过的概率；
- (2) 已知有 100 人参加了招聘会， X 为被录取的人数，求 X 的期望。

19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形， $BC \parallel AD$, $CD \perp AD$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $BC = CD = \frac{1}{2}AD = 2$ 。

- (1) 证明： $PC \perp BD$ 。
- (2) M 为 PC 的中点，求直线 BM 与平面 PCD 所成角的正弦值。



20. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + a_n = 2n$.

(1)若 $\{a_n\}$ 为等差数列,求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,不等式 $(-1)^n \lambda < S_{2n} - 8n + 9$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立,求实数 λ 的取值范围.

21. (12分)

设 F 为抛物线 $M: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, P 是抛物线 M 的准线与 x 轴的交点, A 是抛物线 M 上一点,当 $AF \perp x$ 轴时, $|AP| = 2\sqrt{2}$.

(1)求抛物线 M 的方程.

(2) AF 的延长线与 M 的交点为 B , PA 的延长线与 M 的交点为 C ,点 A 在 P 与 C 之间.

(i)证明: B, C 两点关于 x 轴对称.

(ii)记 $\triangle FBC$ 的面积为 S_1 , $\triangle PFC$ 的面积为 S_2 ,求 $S_2 - 2S_1$ 的最大值.

22. (12分)

已知 x_1, x_2, x_3 是关于 x 的方程 $|x \ln x| = a$ 的三个不同的根,且 $x_1 < x_2 < x_3$.

(1)求 a 的取值范围;

(2)证明: $x_1 x_2 x_3 \leq e^{-\frac{2}{3}}$.