高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查集合的交集运算，考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|(x-2)(x+1)\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

2. A 【解析】本题考查复数的运算，考查数学运算的核心素养.

$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$，$z+\bar{z}=-\dfrac{2}{5}$.

3. C 【解析】本题考查指数、对数、三角函数值的大小比较，考查逻辑推理的核心素养.

因为 $0<0.2^{0.3}<1$，$\cos 2<0$，$\lg 15>1$，所以 $b<a<c$.

4. A 【解析】本题考查等比数列的概念，考查数学运算的核心素养.

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_1q^7=6$，$a_6a_9^2=a_1q^5(a_1q^8)^2=(a_1q^7)^3=6^3=216$.

5. C 【解析】本题考查曲线的切线与圆的位置关系，考查数学运算的核心素养.

由 $y=\ln x$，得 $y'=\dfrac{1}{x}$，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$. 因为 $y=x-1$ 与圆 C：$x^2+y^2=r^2$ 相切，所以 C 的半径 $r=\dfrac{|-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. D 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=1$，

所以 $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{1+\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{1}{2}$.

7. B 【解析】本题考查双曲线的性质，考查直观想象的核心素养.

由 $\tan\angle POF_2=\dfrac{|PF_2|}{|OP|}=\dfrac{b}{a}$，$|OF_2|=c$，得 $|PF_2|=b=2$，$|OP|=a=\sqrt{2}$.

由 $\dfrac{|OP|^2+|OF_1|^2-|PF_1|^2}{2|OP|\cdot|OF_1|}+\dfrac{|OP|^2+|OF_2|^2-|PF_2|^2}{2|OP|\cdot|OF_2|}=0$，

得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=2(|OP|^2+|OF_1|^2)=2\times(2+6)=16$，解得 $|PF_1|=2\sqrt{3}$.

8. D 【解析】本题考查导数的应用，考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}<0$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减. 因为 A,B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角，所以 $A+B>\dfrac{\pi}{2}$，则 $\dfrac{\pi}{2}>A>\dfrac{\pi}{2}-B>0$，则 $0<\cos A<\cos(\dfrac{\pi}{2}-B)=\sin B<1<\dfrac{\pi}{2}$，故 $f(\cos A)>f(\sin B)$，同理可得 $f(\cos B)>f(\sin A)$. $\sin A$ 与 $\sin B$，$\cos A$ 与 $\cos B$ 的大小关系均不确定，所以 $f(\sin A)$ 与 $f(\sin B)$，$f(\cos A)$ 与 $f(\cos B)$ 的大小关系也均不确定.

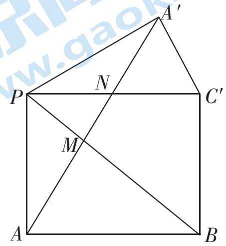
9. BD 【解析】本题考查抛物线的性质，考查数学运算的核心素养.

直线 $x=ty+3$ 与 x 轴的交点坐标为 $(3,0)$，则 $\dfrac{p}{2}=3$，即 $p=6$，由抛物线的性质可知当 $t=0$ 时，$|MN|$ 取得最小值，且最小值为 $2p=12$. 故选 BD.

10. AD 【解析】本题考查函数的概念，考查数学抽象的核心素养.

由函数的概念可知 m 不是 n 的函数，n 是 m 的函数，t 不是 n 的函数，t 是 m 的函数.

11. BCD 【解析】本题考查立体几何初步，考查直观想象，数学运算的核心素养.



因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，且 $PA=\sqrt{3}$，$AB=2AC=2$，所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径 $R=\frac{PB}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，表面积 $S=4\pi R^2=7\pi$，A 不正确. 若 $PC\perp$ 平面 AMN，则 $PC\perp AN$，$PC\perp MN$. 又 $PC\perp BC$，所以 $MN/\!/BC$. 又 $NC=AC\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$，所以 $PN=\frac{3}{2}$，$\frac{PN}{PC}=\frac{MN}{\sqrt{3}}=\frac{3}{4}$，解得 $|MN|=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，B 正确. 因为 M，N 分别为 PB，PC 的中点，所以 $MN/\!/BC$，则 $MN\perp$ 平面 ANC，$BC/\!/$ 平面 AMN，则点 B 到平面 AMN 的距离等于点 C 到平面 AMN 的距离. 设点 C 到平面 AMN 的距离为 d，易知 $AN=1$，$MN=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AN\cdot MN=\frac{\sqrt{3}}{4}$，由 $V_{C-AMN}=V_{M-ANC}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}d$，解得 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，C 正确. 如图，将 $\triangle PAC$，$\triangle PCB$ 翻折至平面 PAB 内，连接 AA'，易知 $|AA'|$ 即 $\triangle AMN$ 周长的最小值，

$|AA'|=\sqrt{PA'^2+PA^2-2PA'\cdot PA\cdot\cos\angle APA'}=3$，$\triangle AMN$ 周长的最小值为 3，D 正确.

12. ACD 【解析】本题考查数列的性质，考查逻辑推理，数学运算的核心素养.

由 $n=a_n^2+b_n\geqslant a_n^2$，得 $a_n\leqslant\sqrt{n}$，$n=a_n^2+b_n\leqslant a_n^2+2a_n<a_n^2+2a_n+1=(a_n+1)^2$，得 $a_n>\sqrt{n}-1$，即 $\sqrt{n}-1<a_n\leqslant\sqrt{n}$，记 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，因为 $a_n\in\mathbf{N}$，所以 $a_n=[\sqrt{n}]$，故 $a_{n+1}=[\sqrt{n+1}]$，则 $a_{n+1}\geqslant a_n$，A 正确. 若 $[\sqrt{n}]=[\sqrt{n+1}]$，则 $a_n=a_{n+1}$，$a_n^2=a_{n+1}^2$，则 $b_{n+1}-b_n=1$，此时 $b_{n+1}>b_n$，B 不正确. 当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=1$；当 $4\leqslant n\leqslant 8$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=2$；当 $9\leqslant n\leqslant 15$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=3$；当 $16\leqslant n\leqslant 24$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=4$；当 $25\leqslant n\leqslant 35$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=5$；当 $36\leqslant n\leqslant 48$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=6$；当 $49\leqslant n\leqslant 63$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=7$；当 $64\leqslant n\leqslant 80$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=8$；当 $81\leqslant n\leqslant 99$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=9$；当 $n=100$ 时，$a_n=[\sqrt{n}]=10$.

故 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=3\times1+5\times2+7\times3+9\times4+11\times5+13\times6+15\times7+17\times8+19\times9+1\times10=625$，C 正确. $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2=3\times1^2+5\times2^2+7\times3^2+9\times4^2+11\times5^2+13\times6^2+15\times7^2+17\times8^2+19\times9^2+1\times10^2=4435$，则 $b_1+b_2+\cdots+b_{100}=\sum\limits_{i=1}^{100}(i-a_i^2)=\frac{100\times101}{2}-4435=615$，D 正确.

13. -2 【解析】本题考查平面向量的坐标运算，考查数学运算的核心素养.

因为 $\boldsymbol{a}=(3,7)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3)$，所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(5,1)$，$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=5\times(-1)+1\times3=-2$.

14. $\frac{\pi}{12}$（答案不唯一，满足 $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 即可） 【解析】本题考查三角函数的图象与性质，考查逻辑推理的核心素养.

由题可知 $g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

15. 大雨 【解析】本题考查圆台的体积，考查数学运算，直观想象的核心素养.

由题可知水桶的上底面半径 $R=10$ cm，下底面半径 $r=4$ cm，桶深 $h=20$ cm，水面半径 $r_1=\frac{R+r}{2}=7$ cm，水深 $h_1=\frac{h}{2}=10$ cm，则水桶中水的体积 $V=\frac{1}{3}(\pi r^2+\pi r_1^2+\pi r r_1)\cdot h_1=310\pi\ \mathrm{cm}^3$，则日降雨量为 $\frac{V}{\pi R^2}=\frac{310\pi}{100\pi}=3.1$ cm $=31$ mm，故当日的降雨量等级为大雨.

16. e^4 **【解析】本题考查函数的零点与性质，考查逻辑推理的核心素养.**

显然 $f(2)\neq 0$，当 $x\neq 2$ 时，令 $(x-2)(e^{x-2}-1)-e(e^{x-2}+1)=0$，得 $\frac{x-2}{e}=\frac{e^{x-2}+1}{e^{x-2}-1}$. 令 $g(x)=\frac{x-2}{e}$，$h(x)=\frac{e^{x-2}+1}{e^{x-2}-1}$，则 $f(x)$ 的零点转化为 $g(x)$ 与 $h(x)$ 图象的交点. 因为 $h(4-x)=-h(x)$，所以 $h(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称. 易知 $g(x)=\frac{x-2}{e}$ 的图象也关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $x_1+x_2=4$，则 $e^{x_1+x_2}=e^4$.

17. 解：(1)因为 $\cos 2A+\sin(B+C)=1$，所以 $1-2\sin^2 A+\sin A=1$，…… 2 分

又 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin A=\frac{1}{2}$. …… 4 分

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，得 $A=\frac{\pi}{6}$. …… 5 分

(2)由(1)及余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$. …… 7 分

因为 $a=2$，$b=c$，所以 $b^2=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$，…… 8 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{b^2}{4}=2+\sqrt{3}$. …… 10 分

评分细则：

【1】第(1)问学生若得出 $\sin(B+C)=\sin A$，得 1 分；

【2】第(1)问未说明 $\sin A\neq 0$，直接得出 $\sin A=\frac{1}{2}$，扣 1 分.

18. 解：(1)由 $a=-27$，得 $f'(x)=3x^2-27$. …… 1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm 3$. …… 2 分

当 $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-3,3)$ 时，$f'(x)<0$. …… 3 分

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-3)$ 和 $(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(-3,3)$，…… 4 分

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(-3)=70$，$f(x)$ 的极小值为 $f(3)=-38$. …… 6 分

(2) $f(x)\geqslant 0$ 在 $(1,4)$ 上恒成立等价于 $a\geqslant -x^2-\frac{16}{x}$ 在 $(1,4)$ 上恒成立. …… 8 分

令 $g(x)=-x^2-\frac{16}{x}(1<x<4)$，则 $g'(x)=-2x+\frac{16}{x^2}=\frac{-2x^3+16}{x^2}$. …… 9 分

当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(2,4)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

$g(x)_{\max}=g(2)=-12$，…… 11 分

故 a 的取值范围为 $[-12,+\infty)$. …… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问学生若未注明是极大(小)值，扣 1 分；

【2】第(2)问 a 的取值范围未用区间表示,不扣分;

【3】第(2)问也可以直接对 $f(x)$ 求导,对参数 a 进行分类讨论求解,按步骤给分.

19.(1)解:设$\{a_n\}$的公差为 d,则$\begin{cases}2a_1+6d=8,\\ a_1(a_1+2d)=3,\end{cases}$ …………………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-9,\\ d=\frac{13}{3}\end{cases}$(舍去), ………………………………………………………… 4 分

故 $a_n=a_1+(n-1)d=n$. ……………………………………………………………………… 6 分

(2)证明:由(1)可知 $b_n=\frac{1}{2^{a_n}+1}=\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$, …………………………………… 9 分

则 $S_n<\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$. …………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问学生若未舍去$\begin{cases}a_1=-9,\\ d=\frac{13}{3}\end{cases}$这种情况,扣 1 分;

【2】第(2)问学生如果不是从第一项进行放缩的,证得结果按步骤给分.

20.(1)证明:连接 AC,与 BD 交于点 N,连接 PN. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AC\perp BD$. ……………………………………………………………………………………… 1 分

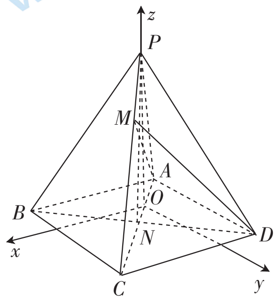
因为 $PB=PD$,N 为 BD 的中点,所以 $BD\perp PN$. …………………………………… 2 分

因为 $AC\cap PN=N$,$AC\subset$平面 PAC,$PN\subset$平面 PAC,所以 $BD\perp$平面 PAC. ……… 3 分

又 $PA\subset$平面 PAC,所以 $PA\perp BD$. ……………………………………………………… 4 分

(2)解:过 P 作 AC 的垂线,垂足为 O. 易知 $PO\perp$平面 $ABCD$. ………………………… 5 分

以 O 为坐标原点,过 O 且平行于 AB,AD 的直线分别为 x 轴,y 轴,OP 所在直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.



由 $AB=2\sqrt{2}$,得 $AC=4$,因为 $PA=2$,$PC=2\sqrt{3}$,所以 $PA\perp PC$,则

$PO=\sqrt{3}$,$AO=1$,$CO=3$,则 $D(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$,$A(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$,

$P(0,0,\sqrt{3})$,$C(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$. 由$\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{PM}$,得 $M(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3})$,

………………………………………………………………………………… 7 分

$\overrightarrow{AM}=(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{2\sqrt{3}}{3})$,$\overrightarrow{AD}=(0,2\sqrt{2},0)$. ……………………………… 8 分

设平面 ADM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,由$\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\frac{2\sqrt{3}}{3}z=0,\\ 2\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{2}$,得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{3})$. ……………………………………………………… 9 分

由图可知 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的一个法向量. ………………………………………… 10 分

$\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$, ………………………………………………… 11 分

故平面 ADM 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………… 12 分

评分细则:

第(2)问中的坐标系不唯一,按步骤给分.

21. 解:(1)由题可知 $\begin{cases}\frac{2b^2}{a}=3,\\ 4a=8,\end{cases}$ ………………………………………………………… 2 分

解得 $a=2,b=\sqrt{3}$, ………………………………………………………………………… 3 分

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………………………… 4 分

(2) $\frac{S_1}{S_2}$ 为定值,定值为 $\frac{1}{9}$. 理由如下: ………………………………………………………… 5 分

依题可设直线 MN 的方程为 $y=k(x-1)$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$, ……………………… 6 分

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$. ………………………………………………………… 7 分

易知 $A_1(-2,0)$, $A_2(2,0)$,直线 AB 的方程为 $x=-1$,则直线 A_1M 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,令 $x=-1$,得 $y_P=\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{k(x_1-1)}{x_1+2}$, ………………………………………………………… 8 分

同理可得 $y_Q=\frac{-3y_2}{x_2-2}=\frac{-3k(x_2-1)}{x_2-2}$. ……………………………………………………… 9 分

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|PF_1|}{|QF_1|}=\frac{\left|\frac{k(x_1-1)}{x_1+2}\right|}{\left|\frac{-3k(x_2-1)}{x_2-2}\right|}=\frac{1}{3}\left|\frac{(x_1-1)(x_2-2)}{(x_2-1)(x_1+2)}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{x_1x_2-2x_1-x_2+2}{x_1x_2-x_1+2x_2-2}\right|$ …… 10 分

$=\frac{1}{3}\left|\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)-x_1+2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)-3x_1-2}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{\frac{4k^2-6}{3+4k^2}-x_1}{\frac{12k^2-18}{3+4k^2}-3x_1}\right|=\frac{1}{9}$. 故 $\frac{S_1}{S_2}$ 为定值,且该定值为 $\frac{1}{9}$.

…………………………………………………………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第(1)问学生也可由 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \frac{c^2}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\\ 4a=8,\end{cases}$ 得出 C 的方程;

【2】第(2)问学生若设直线 MN 的方程为 $x=ty+1$,按步骤给分.

22.(1)解：因为 $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{\ln x}{e}-1$，所以 $f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{ex}=\frac{x-ae}{ex^2}$. ………………………… 1 分

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立；若 $a>0$，则当 $x\in(0,ae)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(ae,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. ………………………… 3 分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(ae,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,ae)$. ………………………… 5 分

(2)证明：由 $f(x)=0$，得 $a=x-\frac{x\ln x}{e}$，令 $\varphi(x)=x-\frac{x\ln x}{e}$，则 $\varphi'(x)=\frac{e-1-\ln x}{e}$. 当 $x\in(0,e^{e-1})$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，当 $x\in(e^{e-1},+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，且当 $x\in(0,e^e)$ 时，$\varphi(x)>0$，当 $x\in(e^e,+\infty)$ 时，$\varphi(x)<0$，则 $x_1\in(0,e^{e-1})$，$x_2\in(e^{e-1},e^e)$，$\frac{x_2}{x_1}\in(1,+\infty)$. ………………………… 6 分

由 $f(x_1)=\frac{a}{x_1}+\frac{\ln x_1}{e}-1=0$，$f(x_2)=\frac{a}{x_2}+\frac{\ln x_2}{e}-1=0$，得 $\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{e}$.

令 $b_1=\frac{1}{x_1}$，$b_2=\frac{1}{x_2}$，则 $\ln x_1=-\ln b_1$，$\ln x_2=-\ln b_2$，则 $a(b_1-b_2)=\frac{\ln b_1-\ln b_2}{e}$，即 $a=\frac{\ln b_1-\ln b_2}{e(b_1-b_2)}$，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{k}{x_2}\geqslant\frac{1}{a}$ 恒成立等价于 $b_1+kb_2\geqslant\frac{e(b_1-b_2)}{\ln b_1-\ln b_2}$ 恒成立.

因为 $\frac{b_1}{b_2}=\frac{x_2}{x_1}\in(1,+\infty)$，所以 $b_1+kb_2\geqslant\frac{e(b_1-b_2)}{\ln b_1-\ln b_2}$ 恒成立等价于 $k+\frac{b_1}{b_2}\geqslant\frac{e(\frac{b_1}{b_2}-1)}{\ln\frac{b_1}{b_2}}$ 恒成立. ………………………… 8 分

令 $t=\frac{b_1}{b_2}(t>1)$，则不等式转化为 $k\geqslant\frac{e(t-1)}{\ln t}-t$ 恒成立.

令 $g(t)=\frac{e(t-1)}{\ln t}-t$，$t>1$，则 $g'(t)=\frac{et\ln t-et+e-t(\ln t)^2}{t(\ln t)^2}$. ………………………… 9 分

令 $h(t)=et\ln t-et+e-t(\ln t)^2$，$t>1$，

则 $h'(t)=e\ln t+e-e-(\ln t)^2-2\ln t=\ln t(e-2-\ln t)$.

当 $t\in(1,e^{e-2})$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增；当 $t\in(e^{e-2},+\infty)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减. ………………………… 10 分

因为 $h(1)=h(e)=0$，所以当 $t\in(1,e)$ 时，$h(t)>0$，则 $g'(t)>0$，当 $t\in(e,+\infty)$ 时，$h(t)<0$，则 $g'(t)<0$，则 $g(t)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 11 分

故 $g(t)_{\max}=g(e)=e^2-2e$，从而 $k\geqslant e^2-2e$. ………………………… 12 分

评分细则：

【1】第(1)问学生单调区间若未写成区间的形式，扣 1 分；

【2】第(2)问学生用其他的方法证明，按步骤给分.