湖北省高中名校联盟 2023 届新高三第一次联合测评

数学试题参考答案与评分细则

一、选择题：

1.B 2.A 3.D 4.B 5.D 6.C 7.A 8.D

二、多项选择题：

9.ABD 10.ACD 11.ABD 12.ABC

三、填空题：

13.e^2 14.$\sqrt{5}$ 15.8 16.$b<a<c$

四、解答题：

17.（本小题满分 10 分）

（1）当 $n=1$ 时，$a_1=3$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3^2}a_2+\frac{1}{3^3}a_3+\cdots+\frac{1}{3^n}a_n=n$①

$\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3^2}a_2+\frac{1}{3^3}a_3+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}a_{n-1}=n-1$②

由①－②得 $\frac{1}{3^n}a_n=n-(n-1)=1$，即 $a_n=3^n\ (n\geqslant 2)$.

当 $n=1$ 时也成立，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^n\ (n\in N^*)$ ……5 分

（2）因为 $b_n=\log_3 a_n=\log_3 3^n=n$， ……6 分

所以 $\frac{1}{b_{n+1}b_{n+2}b_{n+3}}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$， ……8 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

……10 分

18.（本小题满分 12 分）（1）因为 D 为 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\therefore \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$.记角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，

因为 $\tan A=\frac{4}{3}$.所以 $\sin\angle CAB=\frac{4}{5}$，$\cos\angle CAB=\frac{3}{5}$，

则 $18=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cdot\frac{3}{5})$

又由余弦定理得：$18=c^2+b^2-2bc\cdot\frac{3}{5}$

两式联立解得：$bc=\frac{45}{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle CAB=\frac{1}{2}\times\frac{45}{2}\times\frac{4}{5}=9$. ……6 分

（2）$\because \angle DAB=45^\circ$，$\tan A=\frac{4}{3}$，

$\therefore \tan\angle CAD=\tan(\angle CAB-\angle DAB)=\dfrac{\dfrac{4}{3}-1}{1+\dfrac{4}{3}}=\dfrac{1}{7}$，$\sin\angle CAD=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CAD}+S_{\triangle BAD}=\dfrac{1}{2}b\cdot 3\sqrt{2}\sin\angle CAD+\dfrac{1}{2}c\cdot 3\sqrt{2}\sin\angle DAB$

$=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle CAB$

即 $\dfrac{3}{5}b+3c=\dfrac{4}{5}bc$ ……9 分

即 $\dfrac{3}{5}b+3c=\dfrac{4}{5}bc\geqslant 2\sqrt{\dfrac{3}{5}b\cdot 3c}$，$bc\geqslant\dfrac{45}{4}$(当且仅当 $\dfrac{b}{5}=c$ 时取得最小值)

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle CAB\geqslant\dfrac{1}{2}\times\dfrac{45}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{2}$ ……12 分

19.(本小题满分 12 分)(1)由题知：$X=1,2,3,4$，

$P(X=1)=\dfrac{C_1^1C_8^1}{C_9^2}=\dfrac{2}{9}$，$P(X=2)=\dfrac{C_8^2C_6^1C_1^1}{C_9^2C_7^2}=\dfrac{2}{9}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^1C_1^1}{C_9^2C_7^2C_5^2}=\dfrac{2}{9}$，$P(X=4)=\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2+C_8^2C_6^2C_4^2C_2^1C_1^1}{C_9^2C_7^2C_5^2C_3^2}=\dfrac{1}{3}$，

分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{3}$

……(8 分)

(2)由(1)知：$E(X)=1\times\dfrac{2}{9}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{2}{9}+4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{24}{9}$，

设方案二的称量次数为随机变量为 Y，则 $Y=1,3$，

$P(Y=1)=\dfrac{C_8^8}{C_9^8}=\dfrac{1}{9}$，$P(Y=3)=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$，

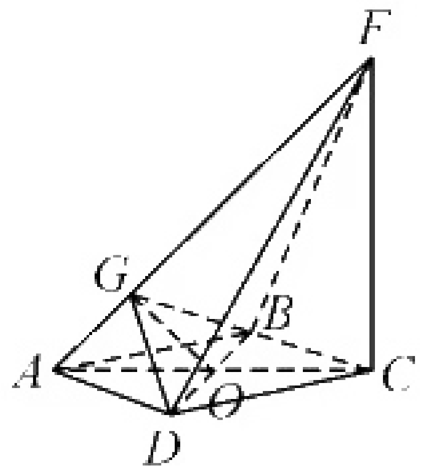
$E(Y)=1\times\dfrac{1}{9}+3\times\dfrac{8}{9}=\dfrac{25}{9}>E(X)$.

所以小明应选择方案一可使称量次数的期望较小. ……(12 分)

20.(本小题满分 12 分)试题解析：(1)方法一：如图(1)连结 AC、BD 交于菱形的中心 O，过 O 作 $OG\perp AF$，G 为垂足. 连结 BG、DG.

由 $BD\perp AC$，$BD\perp CF$，得 $BD\perp$ 平面 ACF，故 $BD\perp AF$. 于是 $AF\perp$ 平面 BGD，

所以 $BG\perp AF$，$DG\perp AF$，$\angle BGD$ 为二面角 $B-AF-D$ 的平面角. ……3 分



由 $FC\perp AC$，$FC=AC=2$，得 $\angle FAC=\dfrac{\pi}{4}$，$OG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $OB\perp OG$，$OB=OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\angle BGD=2\angle BGO=\dfrac{\pi}{2}$.

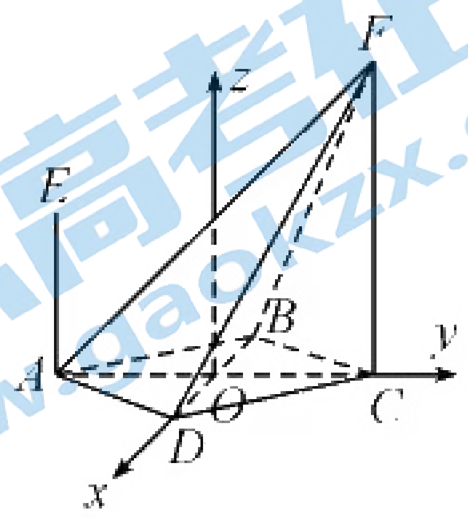
即二面角 $B-AF-D$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{2}$. ……6 分

方法二：设 AC 与 BD 交点为 O，以 O 为坐标原点，分别以 BD、AC 所在直线为 x 轴，

y 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,-1,0), B(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,0), D(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0), F(0,1,2)$，

$\overrightarrow{AF}=(0,2,2), \overrightarrow{AB}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0), \overrightarrow{AD}=(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$ ……2 分



设平面 ABF，平面 ADF 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$，

设 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AF}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y+z=0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x+y=0\end{cases}$

令 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{2},1,-1)$ ……4 分

同理可得 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{2},-1,1)$ $\therefore \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2-1-1=0$，$\therefore \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

$\therefore$ 二面角 $B-AF-D$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$． ……6 分

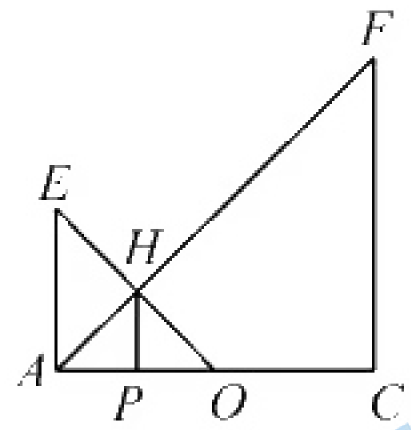
(2)连 EB、ED，设直线 AF 与平面 EBD 相交于点 H，

则三棱锥 $E-ABD$ 与四棱锥 $F-ABCD$ 的公共部分为三棱锥 $H-ABD$．

H 即为直线 EO 与 FA 的交点，作 $HP\perp$ 平面 $ABCD$，因为平面 $ACFE\perp$ 平面 $ABCD$，

从而 $P\in AC$，$HP\perp AC$． ……7 分

由平面几何知识，得 $HP=\frac{1}{2}$． ……9 分



又因为 $S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故三棱锥 $H-ABD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$．……12 分

21.(本小题满分 12 分)(1)若直线 l 斜率存在，设其方程为 $y=kx+b$．

因为点 P 在直线 l 上，所以 $-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}k+b \Rightarrow b=-\frac{1}{3}(\sqrt{2}k+1)$．

联立直线 l 和椭圆 C 的方程消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4kbx+2b^2-4=0$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．则

$x_1+x_2=-\frac{4kb}{2k^2+1}, x_1x_2=\frac{2b^2-4}{2k^2+1}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=-\frac{4k^2b}{2k^2+1}+2b=\frac{2b}{2k^2+1}$，

$y_1y_2=(kx_1+b)(kx_2+b)=k^2x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2=k^2\cdot\frac{2b^2-4}{2k^2+1}+kb\left(-\frac{4kb}{2k^2+1}\right)+b^2=$

$\frac{b^2-4k^2}{2k^2+1}$．

注意到 $\overrightarrow{QA}=(x_1-\sqrt{2},y_1-1)$，

$\overrightarrow{QB}=(x_2-\sqrt{2},y_2-1)$．

则 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})+(y_1-1)(y_2-1)$

$=x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1$

$=\dfrac{2b^2-4}{2k^2+1}+\sqrt{2}\times\dfrac{4kb}{2k^2+1}+\dfrac{b^2-4k^2}{2k^2+1}-\dfrac{2b}{2k^2+1}+3$

$=\dfrac{1}{2k^2+1}[3b^2+2k^2+2b(2\sqrt{2}k-1)-1]$

$=\dfrac{1}{2k^2+1}(3b+\sqrt{2}k+1)(b+\sqrt{2}k-1)$

$=0.$

故 $\overrightarrow{QA}\perp\overrightarrow{QB}$. ……5 分

显然，A、Q、B 三点互不相同.所以，$\angle AQB=90°$.

若直线 l 斜率不存在，则 A、B 两点的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}\right)$.

容易验证 $\angle AQB=90°$ 也成立.因此，$\angle AQB=90°$. ……6 分

(2)由(1)知 $\angle AQB=90°$.所以 $k_{QA}\cdot k_{QB}=-1$.

又因为 $k_{QA}+k_{QB}=0$，则不妨设 $k_{QA}=1$

则直线 QA 方程为：$y=x-\sqrt{2}+1$

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=x-\sqrt{2}+1\end{cases}$ 解得点 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}-4}{3},-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{1}{3}\right)$

又 $k_{AB}=k_{PA}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

则直线 AB 方程为：$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)-\dfrac{1}{3}$，即 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{2}{3}$

∴点 Q 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{\left|1-1-\dfrac{2}{3}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+1}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{2}{3}\end{cases}$，解得弦长 $|AB|=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

$S_{\triangle QAB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8}{9}$ ……12 分

22.(本小题满分 12 分)解：因为 $f'(x)=e^x+x-a$，$f'(x)$ 在 R 上单调递增，

又 $a\in R$，所以存在唯一 x_0，使 $f'(x_0)=e^{x_0}+x_0-a=0$，即 $a=e^{x_0}+x_0$，

当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(x_0)=e^{x_0}+\dfrac{1}{2}x_0^2-ax_0+1=e^{x_0}+\dfrac{1}{2}x_0^2-(e^{x_0}+x_0)x_0+1$，

所以 $h(a)=(1-x_0)e^{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0^2+1$，

令 $g(x_0)=(1-x_0)e^{x_0}-\dfrac{1}{2}x_0^2+1$，

$g'(x)=-x(x^2+2)$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(a)_{max}=g(0)=2$，即 $h(a)$ 的最大值为 2；　　……6 分

(2)解：不妨设 $x_1=\frac{1}{2}-t,x_2=\frac{1}{2}+t(t>0)$，所以关于 t 的方程 $f(1-t)=f(1+t)$ 有正实数解，

所以 $e^{\frac{1}{2}\ \ t}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right)^2-a\left(\frac{1}{2}-t\right)+1=e^{\frac{1}{2}+t}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+t\right)^2-a\left(\frac{1}{2}+t\right)+1$，即 $e^{\frac{1}{2}+t}-e^{\frac{1}{2}\ \ t}+(1-2a)t=0$ 有正实数解，设 $F(t)=e^{\frac{1}{2}+t}-e^{\frac{1}{2}-t}+(1-2a)t,(t>0)$，

则 $F'(t)=e^{\frac{1}{2}+t}+e^{\frac{1}{2}-t}+1-2a$，，所以 $F'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $F'(t)>F'(0)=2e^{\frac{1}{2}}+1-2a$，

①当 $a\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{e}$ 时，$F'(t)>0$，所以 $F(t)$ 单调递增，所以 $F(t)>F(0)=0$，不合题意；

②当 $a>\frac{1}{2}+\sqrt{e}$ 时，存在 $t_1>0$，使得 $F'(t_1)=0$，

当 $t\in(0,t_1)$ 时，$F'(t)<0$，当 $t\in(t_1,+\infty)$ 时，$F'(t)>0$，

所以 $F(t)$ 在 $(0,t_1)$ 上单调递减，在 $(t_1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(t_1)<F(0)=0$，

所以存在 $t_2>t_1$，使得 $F(t_2)=0$，符合题意.综上，a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}+\sqrt{e},+\infty)$.　　……12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。