2024 年高考数学仿真模拟卷(一)（新高考专用）

解析

(时间：120 分钟　满分：150 分)

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．答案　C

解析　∵$A=\{x|x^2-4<0\}=\{x|-2<x<2\}$，又 $B=\{-2，-1,0,1,2\}$，∴$A\cap B=\{-1,0,1\}$.

2.答案　B

解析　∵$iz=1+5i$，∴$z=-i(1+5i)=5-i$，$\bar{z}=5+i$，∴$z+\bar{z}=10$.

3.答案　B

解析　由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，得 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$，则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，

由 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，整理得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2$，

因此 $\cos\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{a}^2}=\frac{1}{2}$，而 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，解得 $\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，

所以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

4.答案　B

解析　因为 $E_r=\frac{3}{S}E_P\times10^{-7}$，该激光器光脉冲在潜艇接收平面的光斑面积为 75 km²，

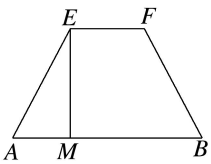
所以$\frac{E_r}{E_P}=\frac{3}{S}\times10^{-7}=\frac{3}{75}\times10^{-7}=4\times10^{-9}$，

则$\Gamma=10\lg(4\times10^{-9})=10\lg4-90\approx10\times0.602-90=-83.98$(dB).

5.答案　A

解析　由题意得，$S_{正方形EFHG}=EF^2$，$S_{正方形ABCD}=4EF^2$，则方亭的体积为$\frac{1}{3}\cdot EF\cdot(EF^2+4EF^2+\sqrt{EF^2\cdot4EF^2})=\frac{56}{3}$，

解得 $EF=2$，则 $S_{正方形EFHG}=4$，$S_{正方形ABCD}=16$，画出 $ABFE$ 的平面图，作 $EM\perp AB$ 于 M，如图，$AE=BF=\frac{\sqrt{6}}{2}EF=\sqrt{6}$，$AM=\frac{4-2}{2}=1$，



则 $EM=\sqrt{6-1}=\sqrt{5}$，$S_{梯形ABFE}=\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$，

则该方亭的表面积为 $S_{正方形EFHG}+S_{正方形ABCD}+4S_{梯形ABFE}=20+12\sqrt{5}$.

6.答案　D

解析　因为展开式中只有第 11 项的二项式系数最大，所以 $n=20$.

二项式展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{20}^k(\sqrt{3}x)^{20-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_{20}^k3^{\frac{20-k}{2}}x^{20-\frac{4}{3}k}$，由题得 $20-\frac{4}{3}k$ 为整数，

所以 $k=0,3,6,9,12,15,18$，故共 7 项符合要求.

7.答案　A

解析　函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=3$ 对称，则必有 $f(3-x)=f(x+3)$，

所以 $f(0)=f(6)$，$f(1)=f(5)$，$f(2)=f(4)$，

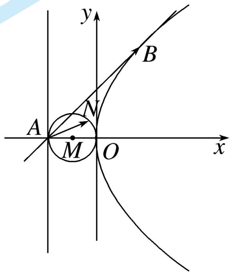
又因为 $f(x)$满足 $f(2-x)=2-f(x)$，取 $x=1$，

所以 $f(1)=2-f(1)$，即 $f(1)=1$，则 $f(1)=f(5)=1$，取 $x=5$，

则 $f(-3)=2-f(5)=1$，A 正确．

8.答案　C

解析　抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，



圆 M 的圆心为 $M(-1,0)$，半径为 1，直线 $x=-\frac{p}{2}$与圆 M 相切，

则 $\left|-1+\frac{p}{2}\right|=1$，

因为 $p\neq 0$，解得 $p=4$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$，

故抛物线 C：$y^2=8x$ 的准线与圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$ 相切于点 $A(-2,0)$，

若直线 AB 与 x 轴重合，则直线 AB 与抛物线 C 不相切，不符合题意，

设直线 AB 的方程为 $x=my-2$，联立$\begin{cases}x=my-2,\\y^2=8x\end{cases}$可得 $y^2-8my+16=0$，则$\Delta=64m^2-64=0$，解得 $m=\pm1$，

不妨设点 B 在第一象限，则 $m=1$，则有 $y^2-8y+16=0$，解得 $y=4$，

此时 $x=y-2=2$，即点 $B(2,4)$，所以$\overrightarrow{AB}=(4,4)$，

因为点 N 在圆 M 上，设点 $N(-1+\cos\theta，\sin\theta)$，则$\overrightarrow{AN}=(1+\cos\theta，\sin\theta)$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}=4+4\cos\theta+4\sin\theta=4\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4\in[4-4\sqrt{2}，4+4\sqrt{2}]$．

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分)

9．答案　ACD

解析　对于 A，中位数是把数据从小到大依次排列后，排在中间位置的数或中间位置的两个数的平均数，因为是对称的，同时去掉最小值和最大值，故中间位置的数相对位置保持不变，故新数据的中位数保持不变，故 A 正确；
对于 B，平均数受样本中每个数据的影响，故去掉最小值和最大值后，余下数据的平均数可能会改变，故 B 不一定正确；
对于 C，方差反映数据的离散程度，当去掉数据中的最小值和最大值后，数据的离散程度减小，故方差减小，故 C 正确；
对于 D，极差为最大值与最小值之差，是原来数据里面任意两个数据差值的最大值，故去掉最小值和最大值后，新数据的极差必然小于原数据的极差，故 D 正确．

10.答案　ABD

解析　因为 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$为偶函数，所以$\varphi=\frac{\pi}{2}$，

因为函数 $f(x)$的图象与直线 $y=2$ 的其中两个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，$|x_1-x_2|$的最小值为π，

所以 $f(x)$的最小正周期为 $T=\pi$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

即 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$，所以 $g(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故 A 正确；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}\right)$时，$t=2x-\frac{\pi}{3}\in(0,\ \pi)$，此时函数 $y=2\cos t$ 单调递减，故函数 $g(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}\right)$上单调递减，故 B 正确；

当 $x=\frac{5\pi}{6}$时，$t=2x-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，此时$\left(\frac{4\pi}{3},\ 0\right)$不是函数 $y=2\cos t$ 的对称中心，故 C 错误；

当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$时，$t=2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right]$，此时函数 $y=2\cos t$ 在$\left[-\frac{\pi}{3},\ 0\right]$上单调递增，在$\left[0,\ \frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减，

所以函数 $g(x)$在$\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，$g(0)=1$，$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$，

所以当方程 $g(x)=m$ 在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上有两个不相等的实根时，$g(0)\leq m<g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，即 $1\leq m<2$，故 D 正确.

11.答案　AC

解析　对于 A，因为 $f(x)$为奇函数且在定义域 $\mathbf{R}$ 上可导，即 $f(-x)=-f(x)$，

所以两边对 x 求导可得$(-x)'\ f'(-x)=-f'(x)$，即 $f'(-x)=f'(x)$，所以 $f'(x)$为偶函数，故 A 正确；

对于 B，令 $f(x)=\sin \pi x$，显然 $f(x)$为奇函数，且最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$，即满足 $f(x+2)=f(x)$，则 $f'(x)=\pi\cos \pi x$，

则 $f'(0)=\pi$，故 B 错误；

对于 C，因为 $f(x+2)=f(x)$且 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

即 $f(x+2)=-f(-x)$，所以 $f(x-1+2)=f(x+1)=-f(1-x)$，即 $f(x+1)+f(1-x)=0$，

所以 $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，故 C 正确；

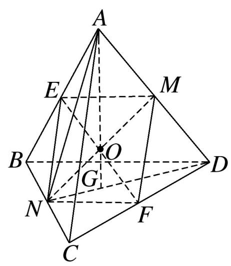
对于 D，易知函数 $F(x)$定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $F(x)=f(x)+xf'(x)$，则 $F(-x)=f(-x)-xf'(-x)=-f(x)-xf'(x)=-F(x)$，

即 $F(x)$为奇函数，由 A 可知 $F'(x)$为偶函数，故 D 错误.

12.答案　ABD

解析　如图，设 E，F 分别为 AB，CD 的中点，连接 ME，EN，NF，MF，EF，AN，DN，

则 $EM\parallel BD$，$NF\parallel BD$，$EM=\frac{1}{2}BD$，$NF=\frac{1}{2}BD$，故 $EM\parallel NF$，$EM=NF$，则四边形 $MENF$ 为平行四边形.



故 EF，MN 交于一点，且互相平分，即 O 点也为 EF 的中点，

又由题意知 $AB=AC$，$DB=DC$，故 $AN\perp BC$，$DN\perp BC$.

又 $AN\cap DN=N$，AN，$DN\subset$平面 AND，故 $BC\perp$平面 AND，

由于 $O\in MN$，$MN\subset$平面 AND，则 $AO\subset$平面 AND，故 $BC\perp AO$，

结合 O 点也为 EF 的中点，同理可证 $DC\perp AO$，$BC\cap DC=C$，BC，$DC\subset$平面 BCD，

故 $AO\perp$平面 BCD，A 正确；

由球 O 的表面正好经过点 M，得球 O 的半径为 OM，在棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 中，

$AN=DN=\sqrt{3}$，M 为 AD 的中点，则 $MN\perp AD$，故 $MN=\sqrt{DN^2-MD^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，

又 O 为线段 MN 中点，则 $OM=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以球 O 的体积为$\frac{4\pi}{3}\times OM^3=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$，B 正确；

由 $BC\perp$平面 AND，$BC\subset$平面 BCD，得平面 $AND\perp$平面 BCD，平面 $AND\cap$平面 $BCD=DN$，由于 $AO\perp$平面 BCD，

延长 AO 交平面 BCD 于 G 点，

则 $OG\perp$平面 BCD，垂足 G 落在 DN 上，且 G 为正$\triangle BCD$ 的中心，

故 $NG=\frac{1}{3}ND=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $OG=\sqrt{ON^2-NG^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，即球心 O 到平面 BCD 的距离为 $OG=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

故球 O 被平面 BCD 截得的截面圆的半径为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则球 O 被平面 BCD 截得的截面圆的面积为 $\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{\pi}{3}$，C 错误；

由 A 的分析可知，O 也为棱 AC，BD 中点连线的中点，则球 O 与每条棱都交于棱的中点，

结合 C 的分析可知，球 O 被正四面体 $ABCD$ 的每个面截得的截面都为圆，且圆的半径都为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故球 O 被正四面体 $ABCD$ 表面截得的截面周长为 $4\times2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$，D 正确.

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．答案　$\frac{1}{5}$

解析　因为 $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1=2\times\frac{3}{5}-1=\frac{1}{5}$.

14.答案　502

解析　由题意可得 $a_n=n-1$，$b_n=2^{n-1}$，$ab_n=b_n-1=2^{n-1}-1$.

所以 $ab_1+ab_2+\cdots+ab_9=(1+2+\cdots+2^8)-9=\frac{1\times(1-2^9)}{1-2}-9=502$.

15.答案　$\frac{5}{9}$

解析　$p(n)=\frac{C_n^1\cdot C_5^1}{C_{n+5}^2}=\frac{5n}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}}=\frac{10n}{n^2+9n+20}=\frac{10}{n+\frac{20}{n}+9}$，

对勾函数 $y=x+\frac{20}{x}$在$(0,\sqrt{20})$上单调递减，在$(\sqrt{20},+\infty)$上单调递增，

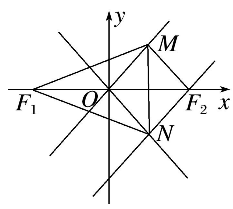
故当 $n=4$ 或 $n=5$ 时，$n+\frac{20}{n}$有最小值为 9，故 $p(n)=\frac{10}{n+\frac{20}{n}+9}\leqslant\frac{10}{9+9}=\frac{5}{9}$，最大值为$\frac{5}{9}$.

16.答案　$\sqrt{5}$

解析　易知 MN 关于 x 轴对称，如图，令$\angle MF_1F_2=\alpha$，则 $\cos 2\alpha=\frac{5}{13}$，

$\therefore\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{13}\right)=\frac{9}{13}$，$\sin^2\alpha=\frac{4}{13}$，$\therefore\tan^2\alpha=\frac{4}{9}$，

又$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\tan\alpha=\frac{2}{3}$.



∵OM 与 MF_2 交于点 $M(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases} y_0=\dfrac{b}{a}x_0, \\ y_0=-\dfrac{b}{a}(x_0-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{c}{2}, \\ y_0=\dfrac{bc}{2a}, \end{cases}$

即 $M\left(\dfrac{c}{2},\ \dfrac{bc}{2a}\right)$，$\tan\alpha=\dfrac{\frac{bc}{2a}}{\frac{3}{2}c}=\dfrac{2}{3}$，∴$\dfrac{b}{a}=2$，∴$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．**解**　(1)因为 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C=a+c$，所以 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0$，

所以 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin A-\sin C=0$，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin(B+C)-\sin C=0$，

所以 $\sqrt{3}\sin B\sin C-\cos B\sin C-\sin C=0$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，所以 $\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以外接圆直径 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=2$.

所以 $R=1$.

(2)因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=6$，又由(1)可知 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $ac=12$，

又由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$a+c=4\sqrt{3}$，可得 $b=2\sqrt{3}$，

因为△ABC 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=3\sqrt{3}$.

设△ABC 内切圆的半径为 r，

由△ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，得 $r=1$.

18.**解**　(1)由 $\dfrac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\dfrac{1}{n}$ 得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=3\times\dfrac{a_n}{n}$.又 $\dfrac{a_1}{1}=1$，

∴$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，∴$\dfrac{a_n}{n}=3^{n-1}$，$a_n=n\times3^{n-1}$，则 $b_n=\dfrac{n^2-7n}{a_n}=\dfrac{n-7}{3^{n-1}}$.

当 $n\leqslant7$ 时，$b_n<0$；当 $n>7$ 时，设 b_n 是最大项，则 $b_{n+1}\leqslant b_n$，且 $b_{n-1}\leqslant b_n$，

即 $\dfrac{n-6}{3^n}\leqslant\dfrac{n-7}{3^{n-1}}$，且 $\dfrac{n-8}{3^{n-2}}\leqslant\dfrac{n-7}{3^{n-1}}$，即 $n-6\leqslant3(n-7)$ 且 $3(n-8)\leqslant n-7$，解得 $\dfrac{15}{2}\leqslant n\leqslant\dfrac{17}{2}$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$，∴$n=8$，

∴$\{b_n\}$的最大项是 $b_8=\dfrac{1}{3^7}=\dfrac{1}{2\,187}$.

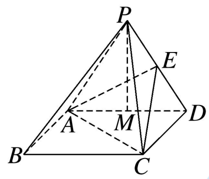
(2)$S_n=1\times3^0+2\times3^1+\cdots+n\times3^{n-1}$，①

①×3 得 $3S_n=1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$，②

①－②得 $-2S_n=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n=\dfrac{1-3^n}{1-3}-n\times3^n=\dfrac{3^n-1}{2}-n\times3^n$,

$\therefore S_n=\dfrac{(2n-1)3^n+1}{4}$.

19.(1)**证明** 取 AD 的中点 M，连接 PM，由于△PAD 为正三角形，则 $PM\perp AD$，

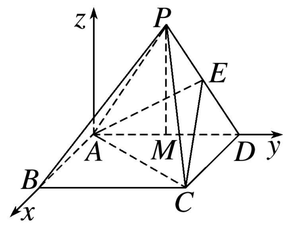


因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PM\subset$ 平面 PAD，则 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，故 $PM\perp AB$，又 $AB\perp PD$，PM，$PD\subset$ 平面 PAD，$PM\cap PD=P$，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，故 $AB\perp AD$，则平行四边形 $ABCD$ 为矩形.

(2)**解** 以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AB=t>0$，



则 $A(0,0,0)$，$B(t,0,0)$，$C(t,2,0)$，$P(0,1,\sqrt{3})$，$E\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(t,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(t,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$，

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=tx_1+2y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=2$，则 $\boldsymbol{n}=(2,-t,\sqrt{3}t)$，

设平面 ABP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=tx_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=y_2+\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$，则 $\boldsymbol{m}=(0,-\sqrt{3},1)$，

由 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|2\sqrt{3}t|}{2\cdot\sqrt{4+4t^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，解得 $t=1$，

则平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，

所以点 B 到平面 ACE 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20.(1)**解** 由函数 $f(x)=ae^x-\dfrac{1}{2}x^2-x$，可得 $f'(x)=ae^x-x-1$，

因为 $f(x)$ 是 **R** 上的增函数，可得 $f'(x)\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立，

即 $ae^x-x-1\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立，即 $a\geqslant\dfrac{x+1}{e^x}$ 在 **R** 上恒成立，

令 $h(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$，可得 $h'(x)=\dfrac{1-(x+1)}{e^x}=-\dfrac{x}{e^x}$，

当 $x>0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x<0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以当 $x=0$ 时，函数 $h(x)$ 取得极大值，即为最大值 $h(0)=1$，

所以 $a\geqslant 1$，即实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

(2)**证明** 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x$，可得 $f(0)=1$，

当 $x>0$ 时，可得 $f'(x)=e^x-x-1$，

要使得 $f(x)>\sin x$，只需 $f(x)>1$，

令 $g(x)=f'(x)=e^x-x-1$，可得 $g'(x)=e^x-1\geq 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又由 $g(0)=0$，所以 $g(x)>g(0)=0$，所以 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)>f(0)=1$，即 $f(x)>\sin x$；

当 $x=0$ 时，$\sin 0=0$，所以 $f(0)>\sin 0$，满足 $f(x)>\sin x$；

当 $-2<x<0$ 时，可得 $\sin x<0$，因为 $e^x>0$ 且 $-\frac{1}{2}x^2-x=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}>0$，

所以 $f(x)>0$，所以 $f(x)>\sin x$，

综上可得，对于 $\forall x\in(-2,+\infty)$，都有 $f(x)>\sin x$.

21.**解** (1)X 的所有可能取值为 3,4,5,6，

$P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P(X=4)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$，

$P(X=5)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{12}{27}$，$P(X=6)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

故 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

$E(X)=3\times\frac{1}{27}+4\times\frac{6}{27}+5\times\frac{12}{27}+6\times\frac{8}{27}=5$.

(2)总分恰为 m 的概率 $A_m=\left(\frac{1}{3}\right)^m$，故 $S_6=\dfrac{\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3^6}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{364}{729}$.

(3)已调查过的累计得分恰为 n 分的概率为 B_n，得不到 n 分的情况只有先得 $n-1$ 分，再得 2 分，概率为 $\frac{2}{3}B_{n-1}$，

而 $B_1=\frac{1}{3}$，故 $1-B_n=\frac{2}{3}B_{n-1}$，即 $B_n=-\frac{2}{3}B_{n-1}+1$，可得 $B_n-\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}\left(B_{n-1}-\frac{3}{5}\right)$，又 $B_1-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}$，

所以 $\left\{B_n-\frac{3}{5}\right\}$ 是以 $-\frac{4}{15}$ 为首项，$-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列，

所以 $B_n-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，可得 $B_n=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

22.(1)**证明** 设 $P(x_1,x_1^2)$，$Q(x_2,x_2^2)$，因为 $y'=2x$，所以 l 斜率 $k_l=2x_1$，

所以直线 OQ 斜率 $k_{OQ}=-\frac{1}{x_1}$，即 $\frac{x_2^2-0}{x_2-0}=x_2=-\frac{1}{x_1}$，所以 $k_{PQ}=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=x_1-\frac{1}{x_1}$，

所以 PQ 的方程为 $y-x_1^2=\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)(x-x_1)$，即 $y=\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)x+1$，

所以直线 PQ 过定点 $D(0,1)$.

(2)①**解**　$S=\frac{1}{2}|OD||x_1-x_2|=\frac{1}{2}|OD|\left|x_1+\frac{1}{x_1}\right|=\frac{1}{2}\left|x_1+\frac{1}{x_1}\right|$，

l 的方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，令 $y=0$，得 $M\left(\frac{x_1}{2},\ 0\right)$，

所以直线 AB 的方程为 $y=-\frac{1}{2x_1}\left(x-\frac{x_1}{2}\right)$，即 $y=-\frac{x}{2x_1}+\frac{1}{4}$，所以直线 AB 过定点 $N\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$.

将 $y=-\frac{x}{2x_1}+\frac{1}{4}$ 与 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立，得 $\left(1+\frac{1}{x_1^2}\right)x^2-\frac{x}{x_1}-\frac{15}{4}=0$.

显然 $\Delta>0$，设 $A(x_3,\ y_3)$，$B(x_4,\ y_4)$，

则 $x_3+x_4=\frac{x_1}{x_1^2+1}$，$x_3x_4=-\frac{15x_1^2}{4(x_1^2+1)}$.

所以 $|x_3-x_4|=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\sqrt{\left(\frac{x_1}{x_1^2+1}\right)^2+\frac{15x_1^2}{x_1^2+1}}=\frac{\sqrt{15x_1^4+16x_1^2}}{x_1^2+1}$，

$T=\frac{1}{2}|ND|\cdot|x_3-x_4|=\frac{3\sqrt{15x_1^4+16x_1^2}}{8(x_1^2+1)}$，

所以 $\frac{T}{S^2}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{15x_1^4+16x_1^2}}{4(x_1^2+1)}}{\frac{1}{4}\left|x_1+\frac{1}{x_1}\right|^2}=\frac{3\sqrt{15x_1^8+16x_1^6}}{2(x_1^2+1)^3}$，

令 $t=x_1^2$，则 $t>0$，$\frac{T}{S^2}=\frac{3\sqrt{15t^4+16t^3}}{2(t+1)^3}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{15t^4+16t^3}{(t+1)^6}}$，

设 $f(t)=\frac{15t^4+16t^3}{(t+1)^6}$，$t>0$，则 $f'(t)=\frac{-6t^2(5t^2-2t-8)}{(t+1)^7}$.

令 $f'(t)=0$，得 $t=\frac{1+\sqrt{41}}{5}$(负根舍去)，

当 $t\in\left(0,\ \frac{1+\sqrt{41}}{5}\right)$时，$f'(t)>0$，$f(t)$单调递增；当 $t\in\left(\frac{1+\sqrt{41}}{5},\ +\infty\right)$时，$f'(t)<0$，$f(t)$单调递减，

所以当 $t=\frac{1+\sqrt{41}}{5}$时，$f(t)$取得最大值，

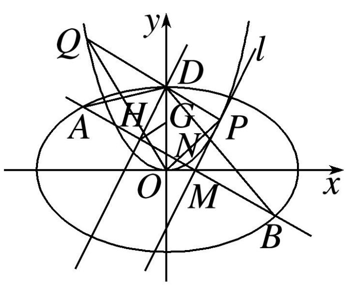
即$\frac{T}{S^2}$取得最大值，此时 P 的纵坐标为 $y_P=x_1^2=\frac{1+\sqrt{41}}{5}$.

②**证明**　因为直线 AB 过定点 $M\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$，$DH$ 平行于 l，如图，

因为 $l\perp AB$，

所以 $DH\perp NH$，

所以点 H 在以 DN 为直径的圆上.



设 G 为 DN 中点，则 $G\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$，

且$|GH|=\frac{1}{2}|DN|=\frac{3}{8}$，

所以存在定点$G\left(0, \frac{5}{8}\right)$，使得$|GH|$为定值.