中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 1 月测试

理科数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\left\{x\middle|x^2-2x-8<0\right\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{N}^*\middle|1<x<5\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 已知 $z=2+\mathrm{i}$，则 $\bar{z}(z+\mathrm{i})=$

A. $6-2\mathrm{i}$　　B. $4-2\mathrm{i}$　　C. $6+2\mathrm{i}$　　D. $4+2\mathrm{i}$

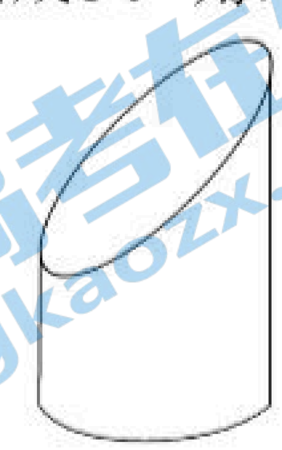
3. 已知圆锥的底面半径为 2，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的侧面积为

A. 4π　　B. $8\sqrt{2}\pi$　　C. $4\sqrt{2}\pi$　　D. 8π

4. 美学四大构件是：史诗、音乐、造型（绘画、建筑等）和数学. 素描是学习绘画的必要一步，它包括了明暗素描和结构素描，而学习几何体结构素描是学习素描最重要的一步. 某同学在画“切面圆柱体”（用与圆柱底面不平行的平面去截圆柱，底面与截面之间的部分叫做切面圆柱体）的过程中，发现“切面”是一个椭圆（如图所示），若“切面”所在平面与底面成 30° 角，则该椭圆的离心率为

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$



（第 4 题图）

5. 过点 $P(1,-2)$ 作圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则 AB 所在直线的方程为

A. $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $y=-\dfrac{1}{2}$　　C. $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $y=-\dfrac{1}{4}$

6. 椭圆 $C:mx^2+ny^2=1$ 与直线 $y=1-\sqrt{3}x$ 交于 M，N 两点，过原点与线段 MN 中点的直线的斜率为 $\dfrac{2}{3}$，则 $\dfrac{m}{n}$ 的值为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$　　C. $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 若 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$，则 $\dfrac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$

A. $-\frac{6}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{6}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

8. 下列命题中，假命题的是

A. 样本数据 $x_i\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ 与样本数据 $y_i=x_i+c\left(i=1,2,\ldots,n\right)$，$c$ 为非零常数，两组样本数据的样本平均数相同

B. 样本 98，99，100，101，102 的标准差为 $\sqrt{2}$

C. $\left(x-y\right)^n$ 的二项展开式中，第 r 项的二项式系数是 C_n^{r-1}

D. 命题“$\exists x\in\left[1,2\right]$，$x+\frac{1}{x}-a=0$”是真命题的充要条件为 $a\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$

9. 设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则下列结论正确的是

A. 函数 $y=f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ 为偶函数

B. 函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增

C. 函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,2\pi\right)$ 有且仅有 2 个极小值点

D. 把函数 $g\left(x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $f\left(x\right)$ 的图像

10. 已知奇函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，$g\left(x\right)=xf\left(x\right)$．若 $a=g\left(-2^{0.5}\right)$，$b=g\left(-\log_2 0.2\right)$，$c=g\left(3\right)$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

11. 已知 O 为坐标原点，点 $P\left(2\cos\alpha,\sin\alpha\right)$，$Q\left(\cos\beta,2\sin\beta\right)$，$A\left(\cos\left(\alpha+\beta\right),\sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$，$B\left(2,0\right)$，则下列结论正确的是

A. $\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}\right|$

B. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

C. 记 $\Omega=\left\{\left(P,Q\right)\middle|\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\text{取最大值}，0\le\alpha<2\pi，0\le\beta<2\pi\right\}$，则 Ω 中有且只有 4 个元素

D. 记 w 是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值，则 $w=2$

12. 若双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，$F_1$，$F_2$ 分别为左、右焦点，设点 P 是在双曲线上且在第一象限的动点，点 I 为 ΔPF_1F_2 的内心，$A\left(0,4\right)$，则下列说法正确的是

A. 双曲线 C 的渐近线方程为 $\frac{x}{4}\pm\frac{y}{5}=0$

B. 点 I 的运动轨迹为双曲线的一部分

C. 若 $|PF_1|=2|PF_2|$，$\overrightarrow{PI}=x\overrightarrow{PF_1}+y\overrightarrow{PF_2}$，则 $y-x=\dfrac{2}{9}$

D. 不存在点 P，使得 $PA+PF_1$ 取得最小值

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知球的体积为 36π，则该球主视图的面积等于________.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=2a_n+2$，则 $S_6=$________.

15. 已知四个函数：① $y=-x$，② $y=x^2$，③ $y=2^x$，④ $y=\ln x$，从中任选 2 个，则事件“所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点”的概率为________.

16. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的所有棱长都为 2，且球 O 为三棱锥的外接球，点 M 是线段 BD 上靠近 D 点的三等分点，过点 M 作平面 α 截球 O 得到的截面面积为 S，则 S 的取值范围为________.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. （12 分）记 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos^2 A-\sin^2 A+\dfrac{1}{2}=0$.

（1）求角 A 的值；

（2）若 ΔABC 为锐角三角形，设 $a=\sqrt{19}$，$b=5$，求 ΔABC 的面积.

18. （12 分）已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 32，24，24．现采用分层抽样的方法从中抽取 10 人进行睡眠时间的调查.

（1）应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人？

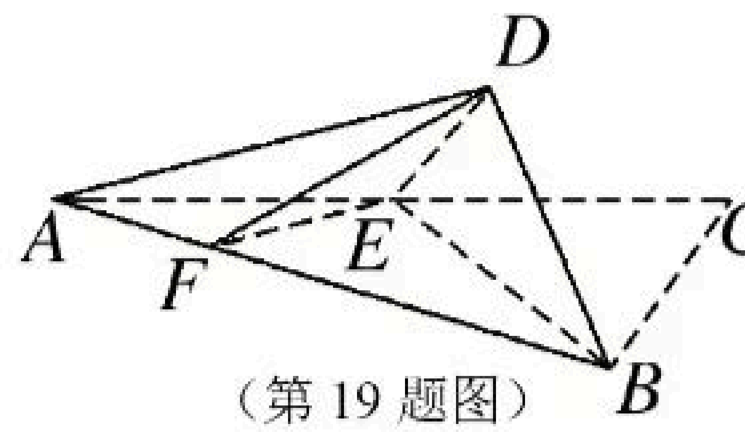
（2）若抽出的 10 人中有 6 人睡眠不足，4 人睡眠充足，现从这 10 人中随机抽取 3 人做进一步的身体检查.

①用 X 表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数，求随机变量 X 的分布列与数学期望；

②设 A 为事件“抽取的 3 人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工”，求事件 A 发生的概率.

19. （12 分）在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=2$，E 是 AC 的中点，F 是线段 AB 上一个动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}\,(0<\lambda<1)$，如图所示，沿 BE 将 ΔCEB 翻折至 ΔDEB 的位置，使得平面 $DEB\perp$ 平面 ABE.

（1）当 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时，证明：$BD\perp$ 平面 DEF；



（第 19 题图）

（2）是否存在实数 λ，使三棱锥 $B-DEF$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$？若不存在，请说明理由；若存在，求出 λ 的值，并求出 DF 与平面 ADE 所成角的正弦值.

20. （12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知动圆 P 与圆 $O_1: x^2-2x+y^2=0$ 内切，且与直线 $x=-2$ 相切，设动圆圆心 P 的轨迹为曲线 C.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）曲线 C 上存在一点 $S(4, y_0)(y_0>0)$，不经过点 S 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，若直线 AS，BS 的斜率之和为 2，证明：直线 l 过定点.

21. （12 分）已知函数 $f(x)=\ln x-ax+\frac{a}{x}(a>0)$.

（1）当 $a=\frac{1}{2}$ 时：①解关于 x 的不等式 $f(x)>0$；

②证明：$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<e^{\frac{3}{4}}\left(n\in \mathbf{N}^*, n\geq 2\right)$；

（2）若函数 $g(x)=f(x)-\ln 2+\frac{3a}{x}$ 恰有三个不同的零点，求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号.

22. （10 分）[选修：坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\varphi \\ y=\sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

（1）写出曲线 C 的极坐标方程及直线 l 的直角坐标方程；

（2）设直线 l 与曲线 C 的交点分别为 A，B，点 P（异于 A，B 两点）在曲线 C 上运动，求 ΔPAB 面积的最大值.

23. （10 分）[选修：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}|x-a|(a\in \mathbf{R})$.

（1）当 $a=2$ 时，解不等式 $\left|x-\frac{1}{3}\right|+f(x)\geq 1$；

（2）设不等式 $\left|x-\frac{1}{3}\right|+f(x)\leq x$ 的解集为 M，若 $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\subseteq M$，求实数 a 的取值范围.

中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 1 月测试

理科数学 参考答案

一、选择题：本题共 **12** 小题，每小题 **5** 分，共 **60** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	D	A	B	D	C	A	C	A	D	C

二、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．

13．9π　　14．-126　　15．$\frac{1}{3}$　　16．$\left[\frac{8\pi}{9},\frac{3\pi}{2}\right]$

三、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 **17~21** 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 **22**、**23** 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 **60** 分．

17．（12 分）

（1）$\cos^2 A-\sin^2 A+\frac{1}{2}=\cos 2A+\frac{1}{2}=0$，$A\in(0,\pi)$

解得 $2A=\frac{2}{3}\pi$ 或 $\frac{4}{3}\pi$，即 $A=\frac{1}{3}\pi$ 或 $\frac{2}{3}\pi$ ……………………………………………5 分

（2）由 ΔABC 为锐角三角形得 $A=\frac{1}{3}\pi$，

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，化为 $c^2-5c+6=0$，解得 $c=2$ 或 3 ………………9 分

若 $c=2$，则 $\cos B=\frac{19+4-25}{2\times\sqrt{19}\times 2}<0$，即 B 为钝角，$\therefore$ $c=2$ 不成立，

则 $c=3$，经检验符合条件，

ΔABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ ………………………………………12 分

18．（12 分）

（1）由已知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为 4：3：3，采用分层抽样的方法从中抽取 10 人，因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取 4 人，3 人，3 人 ……………………………2 分

（2）①随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3

$P(X=k)=\frac{C_6^k C_4^{3-k}}{C_{10}^3}(k=0,1,2,3)$

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{9}{5}$ ……………………………7 分

（2）②设事件 B 为“抽取的 3 人中，睡眠充足的员工有 1 人，睡眠不足的员工有 2 人”

事件C为“抽取的3人中，睡眠充足的员工有2人，睡眠不足的员工有1人”，

则$A=B\cup C$且B与C互斥，

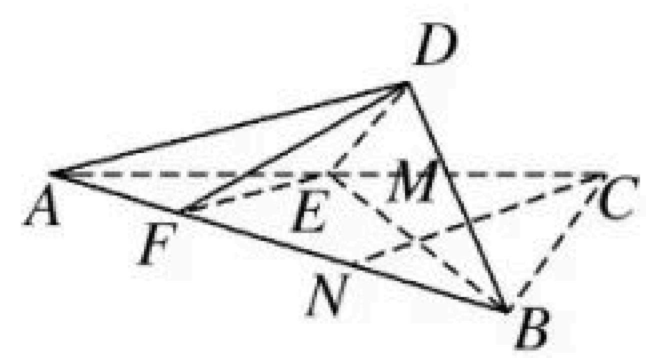
由（1）知，$P(B)=P(X=2)$，$P(C)=P(X=1)$

故$P(A)=P(B\cup C)=P(X=2)+P(X=1)=\frac{4}{5}$

所以，事件A发生的概率为$\frac{4}{5}$ ……………………………………………………12分

19.（12分）

（1）在ΔABC中，$\angle C=90^{\circ}$，即$AC\perp BC$，则$BD\perp DE$，



取BF的中点N，连接CN交BE于点M，

当$\lambda=\frac{1}{3}$时，F是AN的中点，而E是AC的中点，

$\therefore EF$是ΔANC的中位线，$\therefore EF\,//\,CN$

在ΔBEF中，N是BF的中点，$\therefore M$是BE的中点，

在$Rt\Delta BCE$中，$EC=BC=2$，$\therefore CM\perp BE$，则$EF\perp BE$，

又平面$DEB\perp$平面ABE，平面$DEB\cap$平面$ABE=BE$，$EF\subset$平面ABE，

$\therefore EF\perp$平面DEB，又$BD\subset$平面DEB

$\therefore EF\perp BD$，而$EF\cap DE=E$，$EF,DE\subset$平面DEF

$\therefore BD\perp$平面DEF ……………………………………………………5分

（2）取BE的中点G，连接DG，则$DG\perp BE$，而平面$DEB\perp$平面ABC，

$\therefore DG\perp$平面ABC，且$DG=\sqrt{2}$，$V_{B-DEF}=\frac{1}{3}DG\cdot S_{\Delta BEF}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times S_{\Delta BEF}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

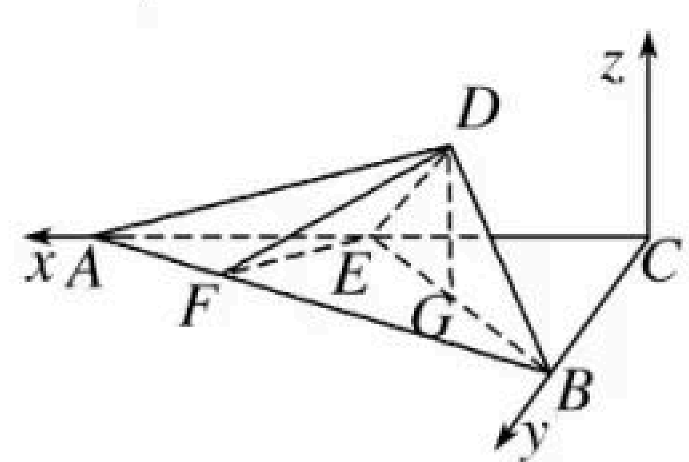
$\therefore S_{\Delta BEF}=1=S_{\Delta BEA}-S_{\Delta AEF}$，$\therefore F$到$AE$的距离为1，

$\therefore F$为AB的中点，此时$\lambda=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………7分

以C为坐标原点，CA所在直线为x轴，CB所在直线为y轴，建立如图所示的空间直角坐标系．则$C(0,0,0)$，$A(4,0,0)$，$B(0,2,0)$，$E(2,0,0)$，$F(2,1,0)$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-4,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-2,0,0)$，$D(1,1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AD}=(-3,1,\sqrt{2})$，

设平面ADE的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，



则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2x=0\\ -3x+y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令$z=-1$，则$x=0$，$y=\sqrt{2}$，

$\therefore \vec{n}=(0,\sqrt{2},-1)$，$\overrightarrow{DF}=(1,0,-\sqrt{2})$

设DF与平面ADE所成的角为θ，则$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{DF},\vec{n}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{DF}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore DF$与平面ADE所成的角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$ ……………………………………………………12分

20.（12 分）

（1）由题意可知，动圆圆心 P 到点 $(1,0)$ 的距离与到直线 $x=-1$ 的距离相等，

所以点 P 的轨迹是以 $(1,0)$ 为焦点，直线 $x=-1$ 为准线的抛物线，

所以曲线 C 的方程为 $y^2=4x$ ……………………………………………………4 分

（2）将 $x=4$ 代入 $y^2=4x$ 可得 $y_0=4$ 或 $y_0=-4$（舍），所以点 S 坐标为 $(4,4)$，

因为直线 l 的斜率不等于 0，设直线 l 的方程是 $x=my+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+n \end{cases}$，得 $y^2-4my-4n=0$，

因为直线 l 与 C 有两个交点，$\Delta=16m^2+16n>0$，即 $m^2+n>0$

由韦达定理得 $\begin{cases} y_1+y_2=4m \\ y_1y_2=-4n \end{cases}$ ……………………………………………………8 分

因为直线 AS，BS 的斜率之和为 2，

$$\therefore \frac{y_1-4}{x_1-4}+\frac{y_2-4}{x_2-4}=\frac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{4}-4}+\frac{y_2-4}{\frac{y_2^2}{4}-4}=4\left(\frac{1}{y_1+4}+\frac{1}{y_2+4}\right)=\frac{4(y_1+y_2+8)}{y_1y_2+4(y_1+y_2)+16}=2$$

$\therefore 2y_1y_2+4(y_1+y_2)=0$

将 $\begin{cases} y_1+y_2=4m \\ y_1y_2=-4n \end{cases}$ 代入上式可得：$-8n+16m=0$，即 $n=2m$

此时 $\Delta>0$ 即 $m<-2$ 或 $m>0$，直线 l 与抛物线有两个交点

所以直线 l 的方程是 $x=my+n=m(y+2)$，它过定点 $(0,-2)$ ……………………………12 分

21.（12 分）

（1）①当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=-\frac{(x-1)^2}{2x^2}\le 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数

又 $f(1)=0$，$f(x)>0$ 解集为 $x\in(0,1)$ ……………………………………………4 分

②证明：由①知当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)<0$，即 $\ln x<\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$

令 $x=1+\frac{1}{n^2}(n\in\mathbf{N}^*,n\ge 2)$，

$$\text{则}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1+2n^2}{2n^2(n^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}\right)$$

$$<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\text{……………………………………6 分}$$

从而 $\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$$<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

$\therefore\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<e^{\frac{3}{4}}\left(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2\right)$……………………………7 分

（2）$g(x)=\ln\frac{x}{2}-ax+\frac{4a}{x}(x>0)$

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{4a}{x^2}=\frac{-ax^2+x-4a}{x^2}(x>0)$

设 $k(x)=-ax^2+x-4a$，则 $\Delta=1-16a^2$，

①当 $\begin{cases}\Delta\leq 0\\ a>0\end{cases}$，即 $a\geq\frac{1}{4}$ 时，$g'(x)\leq 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减

$\therefore g(x)$ 不可能有三个不同的零点；

②当 $\begin{cases}\Delta>0\\ a>0\end{cases}$，即 $0<a<\frac{1}{4}$ 时，$k(x)$ 有两个零点：$x_1=\frac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a}$

$\therefore x_2>x_1>0$

又 $\because k(x)=-ax^2+x-4a$ 开口向下

所以当 $0<x<x_1$ 时，$k(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$k(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递增；

当 $x>x_2$ 时，$k(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减.

$\because g(2)=\ln 1-2a+\frac{4a}{2}=0$，且 $x_1x_2=4$，$\therefore x_1<2<x_2$

$\therefore g(x_1)<g(2)=0<g(x_2)$

$\because g\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{2a^2}-a\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{4a}{\frac{1}{a^2}}=-\ln 2-2\ln a-\frac{1}{a}+4a^3$

所以令 $m(a)=-\ln 2-2\ln a-\frac{1}{a}+4a^3$

则 $m'(a)=-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+12a^2=\frac{12a^4-2a+1}{a^2}>\frac{1-2a}{a^2}>0$

$\therefore m(a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 单调递增

$\therefore m(a)<m\left(\frac{1}{4}\right)=-\ln 2-2\ln\left(\frac{1}{4}\right)-4+4\left(\frac{1}{4}\right)^3=3\ln 2-4+\frac{1}{16}<0$，即 $g\left(\frac{1}{a^2}\right)<0$

又 $x_2-\frac{1}{a^2}<\frac{2}{2a}-\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}<0$，$\therefore x_2<\frac{1}{a^2}$

所以由零点存在性定理知，$g(x)$ 在区间 $\left(x_2,\frac{1}{a^2}\right)$ 上有唯一的一个零点 x_0

$\because g\left(x_0\right)+g\left(\dfrac{4}{x_0}\right)=\ln\dfrac{x_0}{2}-ax_0+\dfrac{4a}{x_0}+\ln\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{x_0}\right)-a\cdot\dfrac{4}{x_0}+\dfrac{4a}{\frac{4}{x_0}}=0$

且 $g\left(x_0\right)=0$，$\therefore\ g\left(\dfrac{4}{x_0}\right)=0$

又 $\dfrac{4}{x_0}<\dfrac{4}{\frac{1+\sqrt{1-16a^2}}{2a}}=\dfrac{1-\sqrt{1-16a^2}}{2a}=x_1$，$\therefore\ 0<\dfrac{4}{x_0}<x_1$

$\therefore\ g(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上有唯一的一个零点 $\dfrac{4}{x_0}$，

故当 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x)$ 存在三个不同的零点 $\dfrac{4}{x_0},2,x_0$

故实数 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ ……………………………………………………12 分

22.（10 分）

（1）曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\varphi\\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），

两式平方并相加得 $x^2+y^2=2$，即 $\rho^2=2$，$\therefore\ \rho=\sqrt{2}$ ……………………………………3 分

直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，即 $\sqrt{2}\rho\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)=1$，

即 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=1$，即 $x+y-1=0$ ……………………………………………………6 分

（2）圆 $x^2+y^2=2$ 的圆心为 $(0,0)$，半径为 $r=\sqrt{2}$，

圆心到直线 $x+y-1=0$ 的距离为 $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<r$，

因为直线和圆相交 $\therefore\ |AB|=2\times\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{2-\dfrac{1}{2}}=\sqrt{6}$，

根据圆的几何性质可知 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $d+r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

所以三角形 PAB 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ……………………………10 分

23.　（10 分）

（1）当 $a=2$ 时，原不等式可化为 $|3x-1|+|x-2|\geq 3$ ……………………………………………1 分

①当 $x\leq\dfrac{1}{3}$ 时，$1-3x+2-x\geq 3$，解得 $x\leq 0$，$\therefore\ x\leq 0$ ……………………………2 分

②当 $\dfrac{1}{3}<x<2$ 时，$3x-1+2-x\geq 3$，解得 $x\geq 1$，$\therefore\ 1\leq x<2$ ……………………3 分

③当 $x\ge 2$ 时，$3x-1+x-2\ge 3$，解得 $x\ge\frac{3}{2}$，$\therefore x\ge 2$ ……………………4 分

综上所述，当 $a=2$ 时，不等式的解集为 $\{x|x\le 0或x\ge 1\}$ ……………………5 分

（2）不等式 $\left|x-\frac{1}{3}\right|+f(x)\le x$ 可化为 $|3x-1|+|x-a|\le 3x$，

依题意不等式 $|3x-1|+|x-a|\le 3x$ 在 $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ 上恒成立……………………6 分

$\therefore 3x-1+|x-a|\le 3x$，即 $|x-a|\le 1$，即 $a-1\le x\le a+1$ ……………………8 分

$\therefore\begin{cases}a-1\le\frac{1}{3}\\ a+1\ge\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{4}{3}$，

故所求实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$ ……………………10 分