绝密★启用前

天一大联考

安徽省2022—2023学年第二学期高三开学考

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{x}\}$，$B=\{x|y=\ln|x-1|\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|x\geqslant 0\}$　　B. $\{x|x>1\}$

C. $\{x|0\leqslant x<1$ 或 $x>1\}$　　D. $\{x|0\leqslant x<1\}$

2. 若 $\bar{z}(1+2i)=11+2i$，则 $z=$

A. $3+4i$　　B. $3-4i$　　C. $4+3i$　　D. $4-3i$

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$，则"$f'(x_0)=0$"是"x_0 是 $f(x)$ 的极值点"的

A. 充分必要条件　　B. 既不充分也不必要条件

C. 充分不必要条件　　D. 必要不充分条件

4. $\left(1+\dfrac{x}{y}\right)(x+2y)^6$ 的展开式中 x^2y^4 的系数为

A. 192　　B. 240　　C. 432　　D. 256

5. 若 $\dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}$，则 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=$

A. 3　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

6. 下表为某外来生物物种入侵某河流生态后的前3个月繁殖数量 y（单位：百只）的数据，通过相关理论进行分析，知可用回归模型 $y=e^{1+at}(a\in\mathbf{R})$ 对 y 与 t 的关系进行拟合，则根据该回归模型，预测从第（　　）个月开始该物种的繁殖数量超过5 000只（参考数据：$e^3\approx 20.09$，$e^4\approx 54.60$）

第 t 个月	1	2	3
繁殖数量 y	$e^{1.4}$	$e^{2.2}$	$e^{2.4}$

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

7. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点为$A$,点$B\left(0,\frac{b}{2}\right)$,直线$AB$与双曲线的两条渐近线分别交于$P,Q$两点,若线段$PQ$的垂直平分线经过双曲线的右顶点,则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 已知函数$f(x)=xe^x-a\ln x+x-x^{a+1}$,若$f(x)>0$在定义域上恒成立,则实数$a$的取值范围是

A. $(-\infty,e)$　　B. $[0,e)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $[0,1)$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知正六边形$ABCDEF$的边长为1,P为正六边形边上的动点,则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$的值可能为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

10. 已知$a>0,b>0,4a+b+ab=12$,则

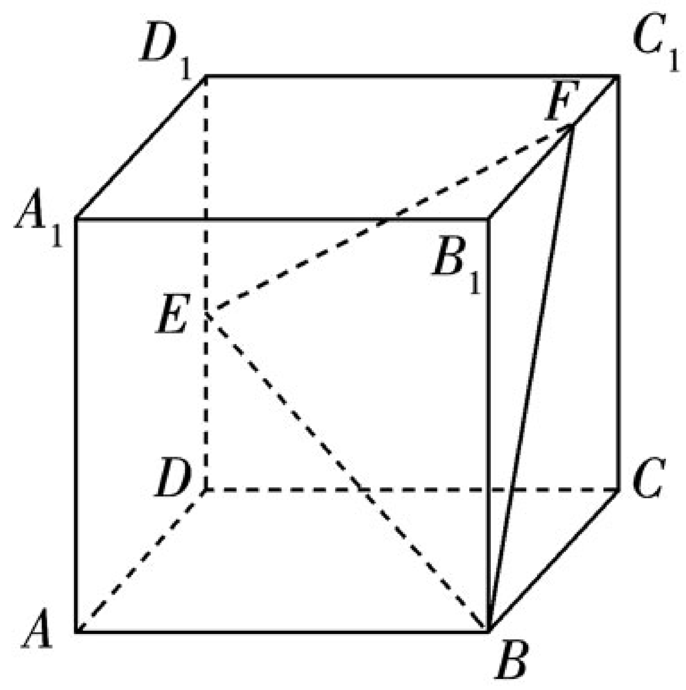
A. $b<3$　　B. $4a+b<8$　　C. $\log_2a+\log_2b\leqslant 2$　　D. $16^a+2^b\geqslant 32$

11. 已知抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F,直线l过点F且与抛物线C交于$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$两点,其中$y_1>0$,且$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$,则

A. 直线l的斜率为$-\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $x_1x_2=4$

C. $|MN|=9$　　D. $\triangle MON$(点O为坐标原点)的面积为6

12. 如图,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,E为棱DD_1上的一个动点,F为棱B_1C_1上的一个动点,则直线AA_1与平面EFB所成的角可能是



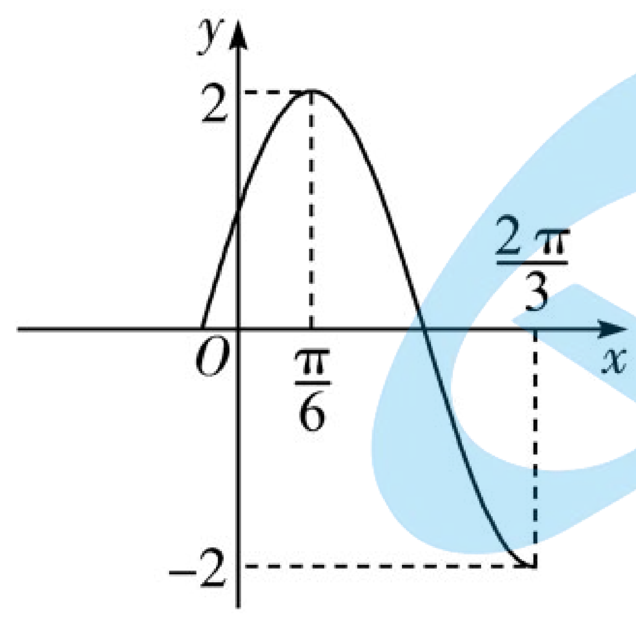
A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知随机变量$X\sim N(1,\sigma^2)$,且$P\left(X\leqslant\frac{3}{2}\right)=2P\left(X>\frac{3}{2}\right)$,则$P\left(1\leqslant X<\frac{3}{2}\right)=$________.

14. 已知函数$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\left(A,\omega>0,|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示,将$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{T}{4}$($T$为$f(x)$的最小正周期)个单位长度得到$g(x)$的图象,则$g(0)=$__________.



15. 已知圆锥内有一个内接圆柱,圆柱的底面在圆锥的底面内,当圆柱与圆锥体积之比最大时,圆柱与圆锥的底面半径之比为__________.

16. 已知函数$f(x),g(x),h(x)$在区间I上均有定义,若对任意$x_0\in I$,$f(x_0),g(x_0),h(x_0)$成等差数列,则称函数$f(x),g(x),h(x)$在区间I上成“等差函数列”. 若$f(x)=\sqrt{4-x^2}$,$g(x)=x+b$,$h(x)$在区间$[-2,2]$上成等差函数列,且$h(x)\geqslant f(x)$恒成立,则实数b的取值范围是__________.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

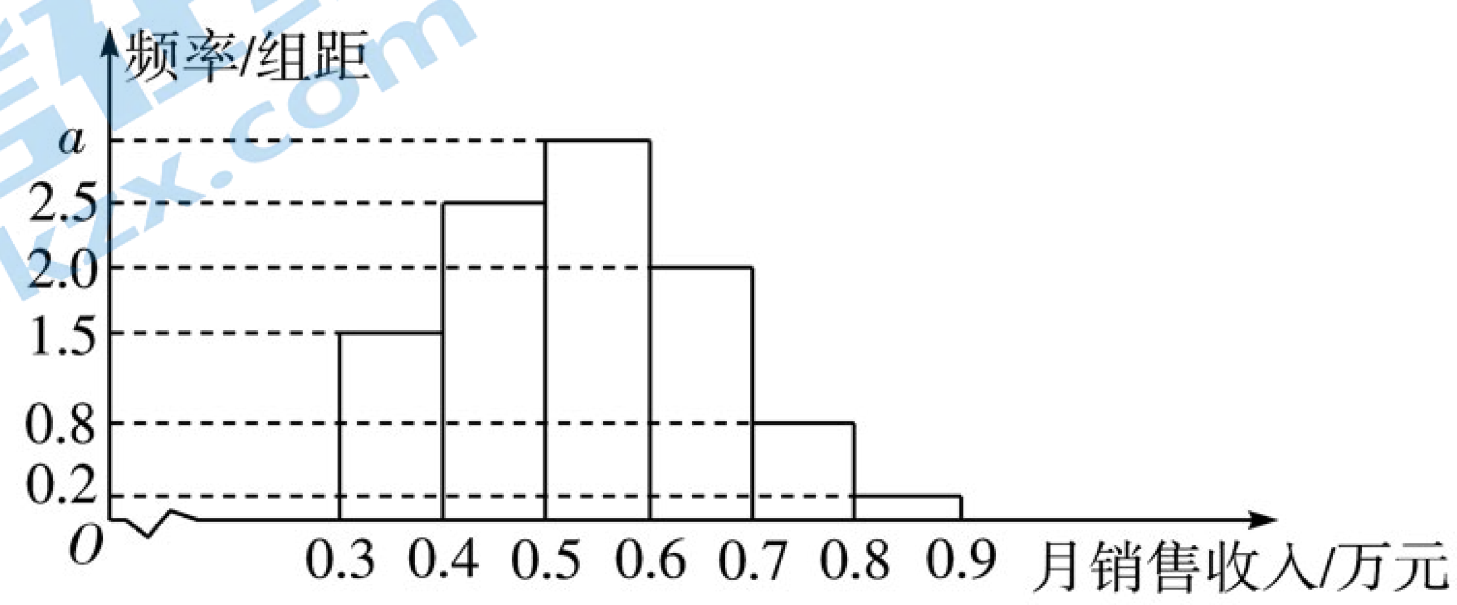
已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n^2-5n}{2}$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)设$b_n=\begin{cases}a_n, n\leqslant 10,\\ 2b_{n-10}, n>10,\end{cases}$求数列$\{b_n\}$的前 30 项和.

18.(12 分)

某超市为改善某产品的销售状况并制订销售策略,统计了过去 100 天该产品的日销售收入(单位:万元)并分成六组制成如图所示的频率分布直方图.



(Ⅰ)求a的值并估计过去 100 天该产品的日销售收入的平均值$\bar{x}$;(同一区间数据以中点值作代表)

(Ⅱ)该超市过去100天中有30天将该商品降价销售，在该商品降价的30天中有18天该产品的日销售收入不低于0.6万元，判断能否有97.5%的把握认为该商品的日销售收入不低于0.6万元与该日是否降价有关.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.050	0.025	0.010
k_0	3.841	5.024	6.635

19.（12分）

在△ABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$a=c-2a\cos B$.

(Ⅰ)证明：$B=2A$；

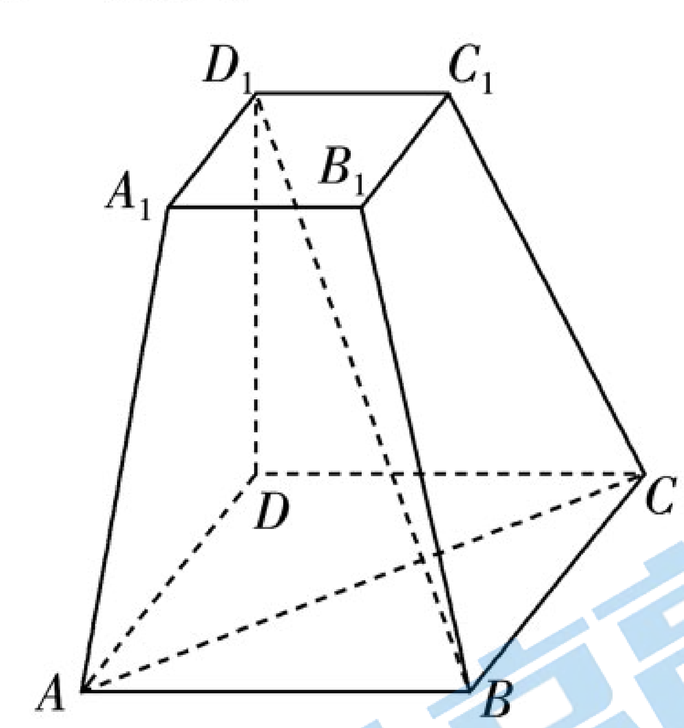
(Ⅱ)若$4a=\sqrt{6}b$，$c=5$，求△ABC的面积.

20.（12分）

如图所示，四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的上、下底面均为正方形，且$DD_1\perp$底面$ABCD$.

(Ⅰ)证明：$AC\perp BD_1$；

(Ⅱ)若$AD=DD_1=2A_1D_1=2$，求二面角$A-BB_1-C$的正弦值.



21.（12分）

已知函数$f(x)=\ln x\cdot\cos x$.

(Ⅰ)设x_0是$f(x)$的最小零点，求曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程；

(Ⅱ)证明：当$x\in(0,\pi]$时，$f(x)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

22.（12分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{2}{3}$，且$\left(\sqrt{7},\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)$为$C$上一点.

(Ⅰ)求C的标准方程；

(Ⅱ)点A,B分别为C的左、右顶点，M,N为C上异于A,B的两点，直线MN不与坐标轴平行且不过坐标原点O，点M关于原点O的对称点为M'，若直线AM'与直线BN相交于点P，直线OP与直线MN相交于点Q，证明：点Q位于定直线上.

天一大联考

安徽省2022—2023学年第二学期高三开学考

数学·答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

1. 答案　C

命题意图　本题考查集合的交运算.

解析　由题意，$A=\{x|x\geqslant 0\}$，$B=\{x|x\neq 1\}$，所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<1$ 或 $x>1\}$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查复数的四则运算.

解析　$\bar{z}=\frac{11+2i}{1+2i}=\frac{(11+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{15-20i}{5}=3-4i$，则 $z=3+4i$.

3. 答案　D

命题意图　本题考查极值点的概念以及充分必要条件的判断.

解析　由极值点的定义，若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则有 $f'(x_0)=0$，而由 $f'(x_0)=0$ 不一定推得 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，例如 $f(x)=x^3$，故“$f'(x_0)=0$”是“x_0 是 $f(x)$ 的极值点”的必要不充分条件.

4. 答案　C

命题意图　本题考查二项式定理.

解析　原式即 $(1+xy^{-1})(x+2y)^6$，$\therefore\left(1+\frac{x}{y}\right)(x+2y)^6$ 的展开式中 x^2y^4 项为 $C_6^5\cdot(xy^{-1})\cdot x\cdot(2y)^5+C_6^4x^2\cdot(2y)^4=432x^2y^4$，系数为432.

5. 答案　A

命题意图　本题考查三角恒等变换.

解析　由题意 $\frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}=1-\tan\theta$，即 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$.

6. 答案　C

命题意图　本题考查回归分析和数值的估算.

解析　由题意，$y=e^{1+at}$ 两边取自然对数得 $\ln y=1+at$，令 $u=\ln y$，则 $u=1+at$. $\bar{u}=(\ln y_1+\ln y_2+\ln y_3)\times\frac{1}{3}=2$，$\bar{t}=(t_1+t_2+t_3)\times\frac{1}{3}=2$，$\because$ 回归直线必过样本点的中心，$\therefore 2=2a+1$，得 $a=\frac{1}{2}$，$\therefore u=1+\frac{t}{2}$，则 $y=e^{1+\frac{t}{2}}$. 当 $t=4$ 时，$y=e^3\approx 20.09<50$；当 $t=5$ 时，$y=e^{3.5}=\sqrt{e^3\cdot e^4}<50$；当 $t=6$ 时，$y=e^4\approx 54.60>50$，$\therefore$ 从第6个月开始，该物种的繁殖数量超过5 000只.

7. 答案　B

命题意图　本题考查双曲线的性质和离心率的求法.

解析　不妨设点 P 在直线 $y=\frac{b}{a}x$ 上，由题可知 $A(-a,0)$，$\therefore k_{AB}=\frac{b}{2a}$，$\therefore l_{AB}:y=\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2}$，由 $\begin{cases}y=\frac{b}{2a}x+\frac{b}{2},\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得

$\begin{cases}x_P=a,\\ y_P=b,\end{cases}\therefore P(a,b)$，同理 $Q\left(-\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$，$\therefore$ PQ 的中点为 $\left(\frac{a}{3},\frac{2b}{3}\right)$，$PQ$ 的垂直平分线方程为 $y-\frac{2b}{3}=-\frac{2a}{b}\left(x-\frac{a}{3}\right)$，将 $\begin{cases}y=0,\\ x=a\end{cases}$ 代入整理得 $\frac{b^2}{a^2}=2$，则 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$.

8. 答案 B

命题意图 本题考查构造函数求参数范围.

解析 由 $f(x)>0$ 得 $xe^x+x>a\ln x+x^{a+1}$，所以 $xe^x+x+\ln x>a\ln x+\ln x+x^{a+1}$，构造函数 $g(x)=x+e^x$，则不等式转化为 $g(x+\ln x)>g(a\ln x+\ln x)$，又易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故不等式等价于 $x+\ln x>a\ln x+\ln x$，即 $x-a\ln x>0$. 设 $h(x)=x-a\ln x$，若 $a<0$，则当 $x>0$ 且 $x\to0$ 时，$h(x)\to-\infty$，不符合题意；若 $a=0$，则当 $x>0$ 时，$h(x)>0$，符合题意；若 $a>0$，则 $h'(x)=1-\frac{a}{x}$，$h(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(a)$，要使 $h(x)>0$ 恒成立，只需 $h(a)=a(1-\ln a)>0$，所以 $0<a<e$. 综上可知 a 的取值范围是 $[0,e)$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 答案 BCD

命题意图 本题考查平面向量的运算.

解析 由题意知 $|\overrightarrow{AD}|=2$，当 P 点与 D 重合时，向量 $\overrightarrow{BP}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的投影的数量最大，为 $\frac{3}{2}$，当 P 点与 A 重合时，向量 $\overrightarrow{BP}$ 在 $\overrightarrow{AD}$ 方向上的投影的数量最小，为 $-\frac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最大值为 $2\times\frac{3}{2}=3$，最小值为 $-\frac{1}{2}\times2=-1$. 可知 $-2\notin[-1,3]$，故 A 不满足，BCD 都满足.

10. 答案 CD

命题意图 本题考查基本不等式.

解析 A 项，原等式等价于 $a=\frac{12-b}{4+b}>0$，得 $0<b<12$，错误；B 项若成立，则 $4a+b=12-ab<8$，$ab>4$，又 $12=4a+b+ab\geqslant4\sqrt{ab}+ab$，解得 $0<ab\leqslant4$，矛盾，故错误；C 项，由 $ab\leqslant4$，可得 $\log_2a+\log_2b=\log_2ab\leqslant\log_24=2$，正确；D 项，由 B 得 $4a+b\geqslant8$，$\therefore 2\sqrt{2^{4a+b}}\geqslant2\sqrt{2^8}=2^5=32$，$\therefore 16^a+2^b=2^{4a}+2^b\geqslant2\sqrt{2^{4a+b}}\geqslant32$，正确.

11. 答案 BC

命题意图 本题考查抛物线的方程与性质、直线与抛物线的综合性问题.

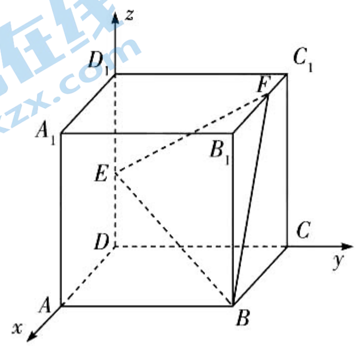
解析 因为 $y_1>0$，所以点 M 在第一象限. 显然直线 l 不与 x 轴垂直，设直线 $l:x=my+2(m\neq0)$，联立 $\begin{cases}y^2=8x,\\ x=my+2,\end{cases}$ 可得 $y^2-8my-16=0$，则 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$. 而 $\frac{y_1}{-y_2}=\frac{1}{2}$，则 $y_1=2\sqrt{2}$，$y_2=-4\sqrt{2}$，则 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{8}\cdot\frac{y_2^2}{8}=4$，故 B 正确；$y_1+y_2=8m=-2\sqrt{2}$，解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，则直线 l 的斜率为 $-2\sqrt{2}$，故 A 错误；$|MN|=x_1+x_2+p=-\frac{\sqrt{2}}{4}(y_1+y_2)+4+4=9$，故 C 正确；$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\cdot2=|2\sqrt{2}-(-4\sqrt{2})|=6\sqrt{2}$，故 D 错误.

12. 答案 AB

命题意图 本题考查空间向量在立体几何中的应用.

解析 以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，设 $AD=1$，$DE=m$，$C_1F=n$，其中 $m,n\in[0,1]$，则 $A(1,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$B(1,1,0)$，$E(0,0,m)$，$F(n,1,1)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，

$\overrightarrow{BE}=(-1,-1,m)$，$\overrightarrow{BF}=(n-1,0,1)$. 设平面 EFB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x-y+mz=0,\\ (n-1)x+z=0,\end{cases}$ 取 $x=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(-1,m(n-1)+1,n-1)$. 设直线 AA_1 与平面 EFB 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AA_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|n-1|}{\sqrt{1+[m(n-1)+1]^2+(n-1)^2}}$，当 $n=1$ 时，$\sin\theta=0$，当 $n\neq1$ 时，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{(1-n)^2}-\dfrac{2m}{1-n}+m^2+1}}$，该式随着 m 的增大而增大，随着 n 的增大而减小，当 $n=0,m=1$ 时，$\sin\theta$ 取得最大值 $\dfrac{\sqrt2}{2}$，所以 $\sin\theta\in\left(0,\dfrac{\sqrt2}{2}\right]$. 综上，$\sin\theta$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\sqrt2}{2}\right]$，$\theta$ 的可能取值为 $\dfrac{\pi}{6}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案 $\dfrac{1}{6}$

命题意图 本题考查正态分布.

解析 由题意可知 $P\left(X>\dfrac{3}{2}\right)+P\left(X\leqslant\dfrac{3}{2}\right)=3P\left(X>\dfrac{3}{2}\right)=1$，所以 $P\left(X>\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$，所以 $P\left(1\leqslant X<\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

14. 答案 $-\sqrt3$

命题意图 本题考查三角函数的图象和性质.

解析 由图可知 $A=2$，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi$，$\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$. 由 $2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，及 $|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore g(x)=2\cos\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]=2\cos\left(2x-\dfrac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore g(0)=2\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\sqrt3$.

15. 答案 $\dfrac{2}{3}$

命题意图 本题考查导数的应用.

解析 设圆锥的底面半径为 R，圆锥的轴截面为等腰三角形，底边长为 $2R$，设其底角为 α，则圆锥的高为 $R\tan\alpha$，圆锥的体积为 $\dfrac{\pi}{3}R^3\tan\alpha$. 设圆锥内接圆柱的底面半径为 r，高为 h，则 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{R\tan\alpha-h}{R\tan\alpha}$，即 $h=(R-r)\tan\alpha$，则圆柱的体积为 $\pi r^2h=\pi r^2(R-r)\tan\alpha=\pi(Rr^2-r^3)\tan\alpha$，$r\in(0,R)$. 圆柱与圆锥体积之比为 $3\left(\dfrac{r^2}{R^2}-\dfrac{r^3}{R^3}\right)$，设

$t=\frac{r}{R}(0<t<1)$，$f(t)=t^2-t^3$，则 $f'(t)=2t-3t^2=t(2-3t)$. 由 $f'(t)=0$，得 $t=\frac{2}{3}$，当 $0<t<\frac{2}{3}$ 时，$f'(t)>0$，当 $\frac{2}{3}<t<1$ 时，$f'(t)<0$，所以当 $t=\frac{2}{3}$ 时，$f(t)$ 取得最大值，即圆柱与圆锥体积之比最大，此时 $\frac{r}{R}=\frac{2}{3}$.

16. **答案** $[2\sqrt{2},+\infty)$

命题意图 本题考查新定义，以及函数的图象的应用.

解析 根据“等差函数列”的定义，$g(x)=\frac{f(x)+h(x)}{2}$，则 $h(x)=2g(x)-f(x)$，由 $h(x)\geqslant f(x)$，可得 $g(x)\geqslant f(x)$，则直线 $y=x+b$ 恒在半圆 $x^2+y^2=4(y\geqslant 0)$ 的上方，所以 $\frac{|b|}{\sqrt{2}}\geqslant 2$，作图可知 $b>0$，所以 $b\geqslant 2\sqrt{2}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查数列求通项和数列求和.

解析 （Ⅰ）$a_1=S_1=\frac{1-5}{2}=-2$，……（1 分）

当 $n\geqslant 2$ 时，有 $S_n=\frac{n^2-5n}{2}$，$S_{n-1}=\frac{(n-1)^2-5(n-1)}{2}$，……（2 分）

两式相减得 $a_n=\frac{1}{2}[n^2-5n-(n-1)^2+5(n-1)]=n-3(n\geqslant 2)$，……（3 分）

当 $n=1$ 时，$a_1=-2$ 符合上式，

故 $a_n=n-3$. ……（5 分）

（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，

则 $T_{30}=(b_1+b_2+\cdots+b_{10})+(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20})+(b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{30})$.

由题意得 $b_1+b_2+\cdots+b_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=S_{10}$，……（7 分）

$b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20}=2(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=2S_{10}$，……（8 分）

$b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{30}=2(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{20})=2\times 2S_{10}=4S_{10}$，……（9 分）

$\therefore T_{30}=7S_{10}=\frac{7}{2}(10^2-50)=175$. ……（10 分）

18. **命题意图** 本题考查频率分布直方图和独立性检验.

解析 （Ⅰ）依题意有 $(1.5+2.5+a+2.0+0.8+0.2)\times 0.1=1$，得 $a=3.0$. ……（2 分）

$\bar{x}=0.35\times 0.15+0.45\times 0.25+0.55\times 0.30+0.65\times 0.20+0.75\times 0.08+0.85\times 0.02=0.537$. ……（5 分）

（Ⅱ）依题意作 2×2 列联表：

	降价	非降价	总计
不低于 0.6 万元	18	12	30
低于 0.6 万元	12	58	70
总计	30	70	100

……（8 分）

$K^2=\frac{100\times(18\times 58-12\times 12)^2}{30\times 70\times 70\times 30}\approx 18.367$. ……（10 分）

因为 $18.367>5.024$，所以有 97.5% 的把握认为该商品的日销售收入不低于 0.6 万元与该日是否降价有关.

……（12 分）

19. **命题意图** 本题考查解三角形.

解析 （Ⅰ）由 $a=c-2a\cos B$ 及正弦定理得 $\sin A=\sin C-2\sin A\cos B$， ………………………………（1 分）

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，………………………………（2 分）

所以 $\sin A=\cos A\sin B-\sin A\cos B=\sin(B-A)$. ………………………………（4 分）

因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以 $-\pi<B-A<\pi$，

所以 $B-A=A$，或 $B-A+A=\pi$，

即 $B=2A$ 或 $B=\pi$（舍去）. ………………………………（6 分）

（Ⅱ）由 $4a=\sqrt{6}b$ 及正弦定理得 $4\sin A=\sqrt{6}\sin B$，

由 $B=2A$，得 $4\sin A=\sqrt{6}\sin 2A=2\sqrt{6}\sin A\cos A$，

所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin A=\sqrt{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………（8 分）

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $\dfrac{3}{8}b^2=b^2+25-10b\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

整理得 $3b^2-16\sqrt{6}b+120=0$，解得 $b=2\sqrt{6}$ 或 $b=\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$. ………………………………（10 分）

当 $b=2\sqrt{6}$ 时，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{2}$，

当 $b=\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$ 时，可得 $a=c=5$，此时不满足 $B=2A$，故舍去.

综上所述，$\triangle ABC$ 的面积为 $5\sqrt{2}$. ………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明，以及利用空间向量求空间角.

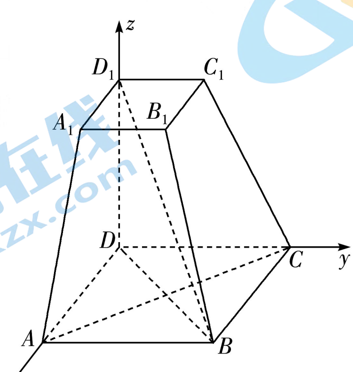
解析 （Ⅰ）$\because DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp DD_1$， ………………………………（1 分）

如图，连接 BD，$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AC\perp BD$， ………………………………（2 分）

又 $\because DD_1\cap BD=D$，$\therefore AC\perp$ 平面 D_1DB， ………………………………（4 分）

$\because BD_1\subset$ 平面 D_1DB，$\therefore AC\perp BD_1$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题意知直线 DA，DC，DD_1 两两互相垂直，故以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系.



由已知可得 $A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(1,1,2)$， ………………………………（6 分）

$\overrightarrow{B_1B}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{BA}=(0,-2,0)$.

设平面 AB_1B 与平面 BB_1C 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1B}=x_1+y_1-2z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BA}=-2y_1=0,\end{cases}$令 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(2,0,1)$，…………（8 分）

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{B_1B}=x_2+y_2-2z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=-2x_2=0,\end{cases}$令 $z_2=1$，则 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$，…………（9 分）

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{1}{5}$，…………（11 分）

故二面角 $A-BB_1-C$ 的正弦值为$\sqrt{1-\dfrac{1}{5^2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. …………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查利用导数证明不等式.

解析 （Ⅰ）令 $f(x)=0$，得 $x=1$，或 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,1,2,\cdots$，

$\therefore x_0=1$. …………（2 分）

$f'(x)=\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\cdot\ln x$，$\therefore f'(1)=\cos 1$，…………（3 分）

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=(x-1)\cos 1$. …………（5 分）

（Ⅱ）$\because\ln x$ 在 $(0,1)$ 上为负，在 $(1,\pi]$ 上为正，$\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为正，在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上为负，

又 $f(1)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$f(x)<0$，

故只需证 $x\in\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. …………（6 分）

令 $h(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\ln x$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{x}$，易知 $h'(x)$ 单调递增，

且 $h'(\mathrm{e})=0$，故当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $x\in\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$h(x)>h(\mathrm{e})=0$，即 $\dfrac{x}{\mathrm{e}}>\ln x$. …………（7 分）

$\therefore\ln x\cdot\cos x<\dfrac{x}{\mathrm{e}}\cos x$，要证 $f(x)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，只需证 $x\cos x<1\left(1<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$. …………（8 分）

令 $g(x)=x\cos x$，则 $g'(x)=\cos x-x\sin x$，易知 $g'(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，…………（9 分）

$\therefore g'(x)<g'(1)=\cos 1-\sin 1<0$，$\therefore g(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，…………（10 分）

$\therefore g(x)<g(1)=\cos 1<1$，故 $x\cos x<1$ 在 $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立. …………（11 分）

综上可得原命题成立. …………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查椭圆方程和定直线的证明.

解析 （Ⅰ）设椭圆 C 的焦距为 $2c(c>0)$，

由题意得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{7}{a^2}+\dfrac{10}{9b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=9,\\ b^2=5,\end{cases}$…………（4 分）

$\therefore$ C 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. …………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由题可知 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $M'(-x_1,-y_1)$，设 $l_{MN}:x=my+n$.

联立$\begin{cases}x=my+n,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\end{cases}$ 消去 x 得$(5m^2+9)y^2+10mny+5(n^2-9)=0$,

$\therefore y_1+y_2=\frac{-10mn}{5m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{5(n^2-9)}{5m^2+9}$, ……………………………………………（6 分）

$\begin{cases}k_{AM'}=\frac{y_1}{x_1-3},\\ k_{BN}=\frac{y_2}{x_2-3},\end{cases}$ $\therefore l_{AM'}:y=\frac{y_1}{x_1-3}(x+3)$，$l_{BN}:y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$, ……………………（7 分）

又$\because$ 点 P 为直线 AM' 和 BN 的交点，$\therefore$ $\begin{cases}\frac{x_1-3}{y_1}\cdot y_P=x_P+3,\\ \frac{x_2-3}{y_2}\cdot y_P=x_P-3,\end{cases}$ ……………………（8 分）

故可得 $2x_P=\left(\frac{x_1-3}{y_1}+\frac{x_2-3}{y_2}\right)y_P$

$=\left(\frac{my_1+n-3}{y_1}+\frac{my_2+n-3}{y_2}\right)y_P$

$=\left[2m+(n-3)\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}\right]y_P$

$=\left[2m+(n-3)\cdot\frac{-10mn}{5(n^2-9)}\right]y_P$,

$\therefore x_P=\frac{3m}{n+3}y_P$，故 $l_{OP}:x=\frac{3m}{n+3}y$. ……………………………………………（10 分）

联立$\begin{cases}l_{OP}:x=\frac{3m}{n+3}y,\\ l_{MN}:x=my+n,\end{cases}$ 消去 y 得 $x_Q=-3$, ……………………………………（11 分）

因此，点 Q 位于定直线 $x=-3$ 上. ……………………………………………………………（12 分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。