2017 北京四中高一（下）期中

数　　学

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1．不等式 $x^2+x-2>0$ 的解集为（　　）.

A．$\{x\,|\,x<-2$ 或 $x>1\}$　　B．$\{x\,|\,-2<x<1\}$　　C．$\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>2\}$　　D．$\{x\,|\,-1<x<2\}$

2．在△ABC 中，$a^2=b^2+c^2-bc$ 则 A 等于（　　）.

A．$45°$　　B．$120°$　　C．$60°$　　D．$30°$

3．S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，如果 $S_{10}=120$，那么 a_1+a_{10} 的值是（　　）.

A．12　　B．36　　C．24　　D．48

4．对于任意实数 a、b、c、d，下列命题中，真命题为（　　）.

①若 $a>b$，$c\neq 0$，则 $ac>bc$；

②若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；

③若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

④若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

A．①　　B．②　　C．③　　D．④

5．在△ABC 中，若 $a=2$，$b=2\sqrt{3}$，$A=30°$，则 B 为（　　）.

A．$60°$　　B．$60°$ 或 $120°$　　C．$30°$　　D．$30°$ 或 $150°$

6．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，若 a_1，a_3 和 a_4 成等比数列，则 a_1 可以等于（　　）.

A．-4　　B．-6　　C．-8　　D．-10

7．已知实数 x、y 满足约束条件 $\begin{cases} x\geqslant 2 \\ y\geqslant 2 \\ x+y\leqslant 6 \end{cases}$，则 $z=2x+4y$ 的最大值为（　　）.

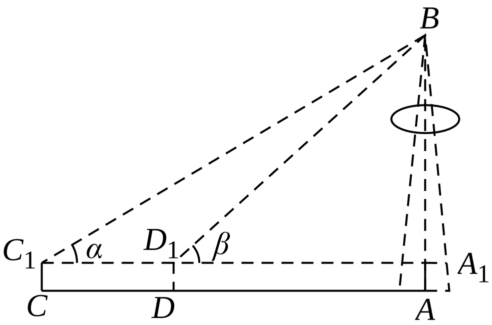
A．24　　B．20　　C．16　　D．12

8．在下列函数中，最小值是 2 的是（　　）.

A．$y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$　　B．$y=\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}(x>0)$

C．$y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　D．$y=7^x+7^{-x}$

9．如图所示，C、D、A三点在同一水平线上，AB是塔的中轴线，在C、D两处测得塔顶部B处的仰角分别是α和β，如果C、D间的距离是a，测角仪高为b，则塔高为（　　）.



A．$\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}-b$　　B．$\dfrac{a\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\beta-\alpha)}$

C．$\dfrac{a\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\beta-\alpha)}+b$　　D．$\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$

10．设$\{a_n\}$是等差数列，下列结论中正确的是（　　）.

A．若$a_1+a_2>0$，则$a_2+a_3>0$　　B．若$a_1+a_3<0$，则$a_1+a_2<0$

C．若$0<a_1<a_2$，则$a_2>\sqrt{a_1a_3}$　　D．若$a_1<0$，则$(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

二、填空题：（本大题共6小题，每小题4分，共24分）

11．在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=\sqrt{6}$，$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$，则$\angle B=$__________.

12．数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2a_n-3(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_5=$__________.

13．如果$c<b<a$，且$ac<0$，那么下列不等式中：①$ab>ac$；②$c(b-a)>0$；③$cb^2<ab^2$；④$ac(a-c)<0$，不一定成立的是__________（填序号）.

14．设x，$y\in\mathbf{R}^+$，且满足$4x+y=40$，则$\lg x+\lg y$的最大值是__________.

15．在$\triangle ABC$中，$a=4$，$b=5$，$c=6$，则$\dfrac{\sin 2A}{\sin C}=$__________.

16．两等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，前n项和分别为S_n，T_n，且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$，则$\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=$__________.

三、解答题（本大题共3小题，共26分）

17．$\triangle ABC$ 中，$BC=7$，$AB=3$，且 $\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{3}{5}$．

（1）求 AC 的长．

（2）求 $\angle A$ 的大小．

18．若不等式 $ax^2+5x-2>0$ 的解集是 $\left\{x\,|\,\dfrac{1}{2}<x<2\right\}$．

（1）求实数 a 的值．

（2）求不等式 $ax^2-5x+a^2-1>0$ 的解集．

19．设 $\{a_n\}$ 是一个公差为 $d(d\neq0)$ 的等差数列，它的前10项和 $S_{10}=110$ 且 a_1，a_2，a_4 成等比数列．

（1）证明 $a_1=d$．

（2）求公差 d 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．

一、卷（II）选填题：（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

20．在 **R** 上定义运算⊙：$a\odot b=ab+2a+b$，则满足 $x\odot(x-2)<0$ 的实数 x 的取值范围为__________．

21．设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $a_1=1$，$S_6=4S_3$，则 $a_4=$__________．

22．若锐角 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$，且 $AB=5$，$AC=8$，则 BC 等于__________．

23．在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c．已知 $8b=5c$，$C=2B$，则 $\cos C=$（　　）．

A．$\dfrac{7}{25}$　　B．$-\dfrac{7}{25}$　　C．$\pm\dfrac{7}{25}$　　D．$\dfrac{24}{25}$

24．已知 O 为直角坐标系原点，P，Q 的坐标满足不等式组 $\begin{cases}4x+3y-25\leqslant0\\x-2y+2\leqslant0\\x-1\geqslant0\end{cases}$，则 $\cos\angle POQ$ 的最小值为（　　）．

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．0

25．已知数列 $A:a_1$，a_2，$\cdots$，$a_n(0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geqslant3)$ 具有性质 P：对任意 i，$j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，$a_j+a_i$ 与 a_j-a_i 两数中至少有一个是该数列中的一项、现给出以下四个命题：

①数列 0，1，3 具有性质 P；

②数列 0，2，4，6 具有性质 P；

③若数列 A 具有性质 P，则 $a_1=0$；

④若数列 a_1，a_2，$a_3(0\leqslant a_1<a_2<a_3)$ 具有性质 P，则 $a_1+a_3=2a_2$，

其中真命题有（　　）.

A．4个　　　　B．3个　　　　C．2个　　　　D．1个

二、解答题：（本大题共 2 小题，共 20 分）

26．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n$，设$b_n=\dfrac{a_n}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）证明$\{b_n\}$是等比数列（指出首项和公比）.

（2）求数列$\{\log_2 b_n\}$的前n项和T_n.

27．已知向量$\vec{m}=\left(\sin A,\dfrac{1}{2}\right)$与$\vec{n}=(3,\sin A+\sqrt{3}\cos A)$共线，其中$A$是$\triangle ABC$的内角.

（1）求角A的大小.

（2）若$BC=2$，求$\triangle ABC$面积S的最大值，并判断S取得最大值时$\triangle ABC$的形状.

数学试题答案

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

1．

【考点】74：一元二次不等式的解法.

【分析】把不等式 $x^2+x-2>0$ 化为 $(x-1)(x+2)>0$，求出解集即可.

【解答】解：∵不等式 $x^2+x-2>0$ 化为 $(x-1)(x+2)>0$，

解得 $x<-2$ 或 $x>1$；

∴不等式 $x^2+x-2>0$ 的解集是 $\{x\mid x<-2$ 或 $x>1\}$.

故选：A.

2．【考点】HR：余弦定理.

【分析】利用余弦定理即可得出.

【解答】解：∵ $a^2=b^2+c^2-bc$，∴ $bc=b^2+c^2-a^2$，

∴ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

$A\in(0°,180°)$，

∴ $A=60°$.

故选：C.

3．【考点】85：等差数列的前 n 项和.

【分析】等差数列 $\{a_n\}$ 中，由 $S_{10}=120$，知 $\dfrac{10}{2}(a_1+a_{10})=120$，由此能求出 a_1+a_{10}.

【解答】解：等差数列 $\{a_n\}$ 中，

∵ $S_{10}=120$，

∴ $\dfrac{10}{2}(a_1+a_{10})=120$，

∴ $a_1+a_{10}=24$.

故选 C.

4．【考点】R3：不等式的基本性质.

【分析】通过举反例可以得出①、②、④不正确，从而排除，由不等式的性质可得只有③正确.

【解答】解：当 $c<0$ 时，①不成立；当 $c=0$ 时，②不成立；由不等式的性质知 ③成立，

当 $b=0$ 时，④不成立．综上，只有③成立，

故选 C.

5【考点】HP：正弦定理.

【分析】利用正弦定理和题设中两边和一个角的值求得 B.

【解答】解：由正弦定理可知$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

$\therefore \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because B\in(0,180^\circ)$，

$\therefore \angle B=60^\circ$ 或 120°．

故选 B．

6.【考点】8F：等差数列的性质.

【分析】依题意，$(a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+3d)$，可求得 a_1．

【解答】解：$\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=2$，a_1，a_3 和 a_4 成等比数列，

$\therefore (a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+3d)$，

$\therefore a_1d+4d^2=0$，$\therefore a_1=-8$，

故选：C．

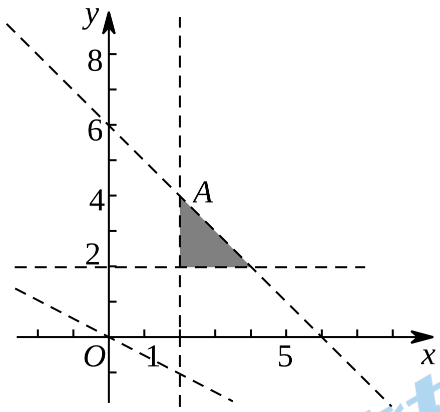
7.【考点】7C：简单线性规划.

【分析】①画可行域② z 为目标函数纵截距四倍③画直线 $0=2x+4y$，平移直线过 $(0,2)$ 时 z 有最大值

【解答】解：画可行域如图，z 为目标函数 $z=2x+4y$，可看成是直线 $z=2x+4y$ 的纵截距四倍，

画直线 $0=2x+4y$，平移直线过 $A(2,4)$ 点时 z 有最大值 20，

故选 B．



8.【考点】7F：基本不等式.

【分析】由基本不等式成立的条件，逐个选项验证可得.

【解答】解：选项 A，x 正负不定，不能满足最小值是 2，故错误；

选项 B，$y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x+1+1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\geqslant 2$，

当且仅当 $\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$，即 $x=0$ 时取等号，但 $x>0$，故错误；

选项C，$\because x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \sin x\in(0,1)$，

$\therefore y=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\geqslant 2$，当且仅当$\sin x=\dfrac{1}{\sin x}$，即$\sin x=1$时取等号，

但$\sin x\in(0,1)$，取不到1，故错误；

选项D，$y=7^{x}+7^{-x}=7^{x}+\dfrac{1}{7^{x}}\geqslant 2$，当且仅当$7^{x}=\dfrac{1}{7^{x}}$即$x=0$时取等号，故正确.

故选：D.

9.

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理.

【分析】分别在$\triangle BCD$、$\triangle ABD$这两个三角形中运用正弦定理，即可求解.

【解答】解：在$\triangle BCD$中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BD}{\sin\angle C}$，

$\therefore \dfrac{\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\dfrac{BD}{\sin\alpha}$，

即$BD=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$，

在$\triangle ABD$中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle A}$，

$\therefore \dfrac{AB}{\sin\beta}=\dfrac{BD}{\sin 90^\circ}$，

即$AB=BD\cdot\sin\beta=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$，

则塔高为$\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}-b$，

故选：A.

10.

【考点】8F：等差数列的性质.

【分析】对选项分别进行判断，即可得出结论.

【解答】解：若$a_1+a_2>0$，则$2a_1+d>0$，$a_2+a_3=2a_1+3d>2d$，$d>0$时，结论成立，即A不正确；

若$a_1+a_3<0$，则$a_1+a_2=2a_1+d<0$，$a_2+a_3=2a_1+3d<2d$，$d<0$时，结论成立，即B不正确；

$\{a_n\}$是等差数列，$0<a_1<a_2$，$2a_2=a_1+a_3>2\sqrt{a_1a_3}$，$\therefore a_2>\sqrt{a_1a_3}$，即C正确；

若$a_1<0$，则$(a_2-a_1)(a_2-a_3)=-d^2\leqslant 0$，即D不正确.

故选：C.

二、填空题：（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

11.【考点】HP：正弦定理.

【分析】由正弦定理可得 $\sin B$，再由三角形的边角关系，即可得到角 B .

【解答】解：由正弦定理可得，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

即有 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由 $b<a$，则 $B<A$，

可得 $B=\dfrac{\pi}{4}$.

故答案为：$\dfrac{\pi}{4}$.

12.

【考点】8E：数列的求和；8H：数列递推式.

【分析】把 $a_n=s_n-s_{n-1}$ 代入 $s_n=2a_n-3$ 化简整理得 $2(s_{n-1}+3)=s_n+3$ 进而可知数列 $\{s_n+3\}$ 是等比数列，求得 s_1+3，根据等比数列的通项公式求得数列 $\{s_n+3\}$ 的通项公式，进而根据 $a_5=\dfrac{s_5+3}{2}$ 求得答案.

【解答】解：$\because a_n=s_n-s_{n-1}$，

$\therefore s_n=2a_n-3=2(s_n-s_{n-1})-3$

整理得 $2(s_{n-1}+3)=s_n+3$

$\because s_1=2s_1-3$，

$\therefore s_1=3$，

$\therefore$ 数列 $\{s_n+3\}$ 是以 6 为首项，2 为公比的等比数列，

$\therefore s_n+3=6\cdot 2^{n-1}$，

$\therefore s_n=6\cdot 2^{n-1}-3$，

$\therefore s_5=6\cdot 2^4-3$，

$\therefore a_5=\dfrac{s_5+3}{2}=48$，

故答案为 48 .

13.

【考点】71：不等关系与不等式.

【分析】由题意可得 $a>0$，$c<0$，应用不等式的基本性质判断即可.

【解答】解：由 $c<b<a$，且 $ac<0$，可得 $a>0$，$c<0$，

故①、②、④一定成立，但③不一定成立，

如当 $b=0$ 时，不等式不成立，

故答案为：③.

14.【考点】7F：基本不等式.

【分析】利用对数的运算法则转化成真数为乘积形式，然后利用基本不等式求最值即可.

【解答】解：$4x\cdot y\leqslant\left(\dfrac{4x+y}{2}\right)^2=400$，

当且仅当 $4x=y=20$ 时取“=”，

$\therefore xy\leqslant 100$，

$\therefore \lg x+\lg y=\lg xy\leqslant \lg 100=2$.

故答案为：2.

15.【考点】HR：余弦定理；GS：二倍角的正弦；HP：正弦定理.

【分析】利用余弦定理求出 $\cos C$，$\cos A$，即可得出结论.

【解答】解：$\because \triangle ABC$ 中，$a=4$，$b=5$，$c=6$，

$\therefore \cos C=\dfrac{16+25-36}{2\times4\times5}=\dfrac{1}{8}$，$\cos A=\dfrac{25+36-16}{2\times5\times6}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore \sin C=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

$$\therefore \frac{\sin 2A}{\sin C}=\frac{2\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=1.$$

故答案为：1.

16.【考点】8F：等差数列的性质；85：等差数列的前 n 项和.

【分析】在 $\{a_n\}$ 为等差数列中，当 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}_+)$ 时，$a_m+a_n=a_p+a_q$. 所以结合此性质可得：

$$\frac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\frac{21\times(a_1+a_{21})\times\frac{1}{2}}{21\times(b_1+b_{21})\times\frac{1}{2}}=\frac{S_{21}}{T_{21}}$$，再根据题意得到答案.

【解答】解：在 $\{a_n\}$ 为等差数列中，当 $m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}_+)$ 时，$a_m+a_n=a_p+a_q$.

所以 $\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\dfrac{21\times(a_1+a_{21})\times\frac{1}{2}}{21\times(b_1+b_{21})\times\frac{1}{2}}=\dfrac{S_{21}}{T_{21}}$，

又因为 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+2}{n+3}$，

所以 $\dfrac{a_2+a_{20}}{b_7+b_{15}}=\dfrac{149}{24}$.

故答案为：$\frac{149}{24}$．

三、解答题（本大题共 3 小题，共 26 分）

17．

【考点】HP：正弦定理；HR：余弦定理．

【分析】（1）由已知利用正弦定理即可得解 AC 的值．

（2）由已知利用余弦定理可求 $\cos A$ 的值，结合 A 的范围，根据特殊角的三角函数值即可得解．

【解答】解：（1）由正弦定理 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$，可得：$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin C}{\sin B}$，可得：$AC=\frac{5\times 3}{3}=5$．

（2）由余弦定理可得：$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9+25-49}{2\times 3\times 5}=-\frac{1}{2}$，

由于 $A\in(0°,180°)$，

可得：$A=120°$．

18．

【考点】77：一元二次不等式与一元二次方程；74：一元二次不等式的解法．

【分析】（1）由二次不等式的解集形式，判断出 $\frac{1}{2}$，2 是相应方程的两个根，利用韦达定理求出 a 的值．

（2）由（1）我们易得 a 的值，代入不等式 $ax^2-5x+a^2-1>0$ 易解出其解集．

【解答】解：（1）$\because$ $ax^2+5x-2>0$ 的解集是 $\left\{x|\frac{1}{2}<x<2\right\}$，

$\therefore a<0$，$\frac{1}{2}$，2 是 $ax^2+5x-2=0$ 的两根

解得 $a=-2$；

（2）则不等式 $ax^2-5x+a^2-1>0$ 可化为 $-2x^2-5x+3>0$，

解得 $\left\{x|-3<x<\frac{1}{2}\right\}$，

故不等式 $ax^2-5x+a^2-1>0$ 的解集 $\left\{x|-3<x<\frac{1}{2}\right\}$．

19．

【考点】8M：等差数列与等比数列的综合；85：等差数列的前 n 项和．

【分析】（1）由已知可得 $a_2{}^2=a_1\cdot a_4$，代入等差数列的通项可转化为 $(a_1+d)^2=a_1\cdot(a_1+3d)$，整理可得

（2）结合（1）且有 $s_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d$，联立方程可求 a_1，d 及 a_n．

【解答】（1）证明：因 a_1，a_2，a_4 成等比数列，故 $a^2{}_2=a_1a_4$．

而 $\{a_n\}$ 是等差数列，有 $a_2=a_1+d$，$a_4=a_1+3d$，

于是 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$，

即 $a^2{}_1+2a_1d+d^2=a^2{}_1+3a_1d$，

化简得 $a_1=d$．

（2）解：由条件 $S_{10}=110$ 和 $s_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d$，得到 $10a_1+45d=110$，

由（1），$a_1=d$，代入上式得 $55d=110$，

故 $d=2$，$a_n=a_1+(n-1)d=2n$，

因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$．

一、卷（II）选填题：（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

20.【考点】74：一元二次不等式的解法．

【分析】根据题中已知得新定义，列出关于 x 的不等式，求出不等式的解集即可得到 x 的取值范围．

【解答】解：由 $a\odot b=ab+2a+b$，得到 $x\odot(x-2)=x(x-2)+2x+x-2<0$，即 $x^2+x-2<0$．

分解因式得 $(x+2)(x-1)<0$，可化为 $\begin{cases}x+2>0\\x-1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2<0\\x-1>0\end{cases}$，解得 $-2<x<1$．

所以实数 x 的取值范围为 $(-2,1)$．

故答案为：$(-2,1)$．

21．

【考点】89：等比数列的前 n 项和；8G：等比数列的性质．

【分析】根据 $S_6=4S_3$ 可求得 q^3，进而根据等比数列的通项公式，得到答案．

【解答】解：设等比数列的公比为 q，则由 $S_6=4S_3$ 知 $q\neq 1$，

$\therefore S_6=\frac{1-q^6}{1-q}=\frac{4(1-q^3)}{1-q}$．

$\therefore q^3=3$．$\therefore a_1q^3=3$．

故答案为：3．

22.【考点】HS：余弦定理的应用．

【分析】利用三角形的面积公式求出 A，再利用余弦定理求出 BC．

【解答】解：因为锐角 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$，且 $AB=5$，$AC=8$，

所以 $\frac{1}{2}\times 5\times 8\times\sin A=10\sqrt{3}$，

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $A=60°$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

所以 $BC=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\frac{1}{2}}=7$.

故答案为：7.

23.

【考点】HQ：正弦定理的应用；GL：三角函数中的恒等变换应用.

【分析】直接利用正弦定理以及二倍角公式，求出 $\sin B$，$\cos B$，然后利用平方关系式求出 $\cos C$ 的值即可.

【解答】解：因为在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c. 已知 $8b=5c$，$C=2B$，

所以 $8\sin B=5\sin C=5\sin 2B=10\sin B\cos B$，所以 $\cos B=\frac{4}{5}$，B 为三角形内角，所以 $B\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. $C<\frac{\pi}{2}$.

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin C=\sin 2B=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$，

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{7}{25}$.

故选：A.

24.

【考点】7C：简单线性规划.

【分析】先画出不等式组 $\begin{cases}4x+3y-25\leqslant 0\\ x-2y+2\leqslant 0\\ x-1\geqslant 0\end{cases}$，对应的平面区域，利用余弦函数在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数，再找到 $\angle POQ$ 最大时对应的点的坐标，就可求出 $\cos\angle POQ$ 的最小值.

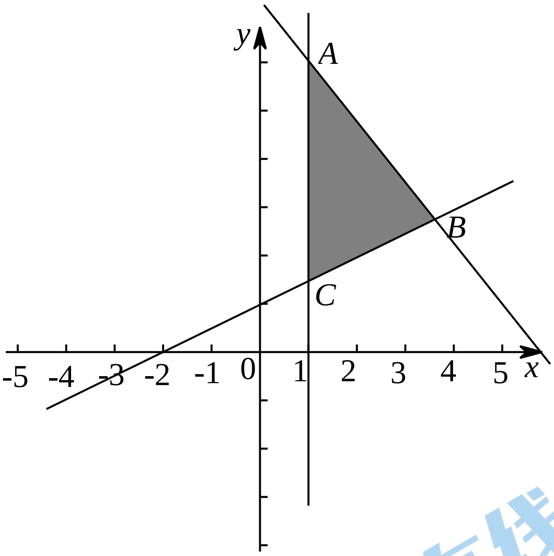
【解答】解：满足不等式组 $\begin{cases}4x+3y-25\leqslant 0\\ x-2y+2\leqslant 0\\ x-1\geqslant 0\end{cases}$，的平面区域如下图示：

因为余弦函数在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数，所以角最大时对应的余弦值最小，

由图得，当 P 与 $A(1,7)$ 重合，Q 与 $B(4,3)$ 重合时，$\angle POQ$ 最大.

此时 $k_{OB}=\frac{3}{4}$，$k_{OA}=7$. 由 $\tan\angle POQ=\frac{7-\frac{3}{4}}{1+7\times\frac{3}{4}}=1\Rightarrow\angle POQ=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos\angle POQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：A.



25．

【考点】8B：数列的应用．

【分析】根据数列 $A:a_1$，a_2，$\cdots$，$a_n(0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geqslant 3)$ 具有性质 P：对任意 i，$j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，$a_j+a_i$ 与 a_j-a_i 两数中至少有一个是该数列中的一项，逐一验证，可知①错误，其余都正确．

【解答】解：$\because$ 对任意 i，$j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，$a_j+a_i$ 与 a_j-a_i 两数中至少有一个是该数列中的项，

①数列 0，1，3 中，$a_2+a_3=1+3=4$ 和 $a_3-a_2=3-1=2$ 都不是该数列中的数，故①不正确；

②数列 0，2，4，6，a_j+a_i 与 $a_j-a_i(1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3)$ 两数中都是该数列中的项，并且 $a_4-a_3=2$ 是该数列中的项，故②正确；

③若数列 A 具有性质 P，则 $a_n+a_n=2a_n$ 与 $a_n-a_n=0$ 两数中至少有一个是该数列中的一项，

$\because 0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$，$n\geqslant 3$，

而 $2a_n$ 不是该数列中的项，$\therefore 0$ 是该数列中的项，

$\therefore a_1=0$；故③正确；

④$\because$ 数列 a_1，a_2，a_3 具有性质 P，$0\leqslant a_1<a_2<a_3$，

$\therefore a_1+a_3$ 与 a_3-a_1 至少有一个是该数列中的一项，且 $a_1=0$，

1° 若 a_1+a_3 是该数列中的一项，则 $a_1+a_3=a_3$，

$\therefore a_1=0$，易知 a_2+a_3 不是该数列的项

$\therefore a_3-a_2=a_2$，$\therefore a_1+a_3=2a_2$，

2° 若 a_3-a_1 是该数列中的一项，则 $a_3-a_1=a_1$ 或 a_2 或 a_3，

①若 $a_3-a_1=a_3$ 同 1°，

②若 $a_3-a_1=a_2$，则 $a_3=a_2$，与 $a_2<a_3$ 矛盾，

③ $a_3-a_1=a_1$，则 $a_3=2a_1$，

综上 $a_1+a_3=2a_2$，

故选 B .

二、解答题：（本大题共 2 小题，共 20 分）

26.

【考点】8E：数列的求和；8H：数列递推式.

【分析】（1）由 $a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{a_n}{n}$. 可得 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，即可证明.

（2）由（1）可知 $b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$，可得 $\log_2 b_n=\log_2 2^{n-1}=n-1$. 利用等差数列的求和公式即可得出.

【解答】解：（1）证明：由 $a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n$，得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=2\cdot\dfrac{a_n}{n}$. 所以 $b_{n+1}=2b_n$，即 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$.

又因为 $b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$，所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，公比为 2 的等比数列.

（2）由（1）可知 $b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$，所以 $\log_2 b_n=\log_2 2^{n-1}=n-1$.

则数列 $\{\log_2 b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=1+2+3+L+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

27.

【考点】9C：向量的共线定理；7F：基本不等式；GQ：两角和与差的正弦函数；HP：正弦定理.

【分析】（1）根据向量平行得出角 $2A$ 的等式，然后根据两角和差的正弦公式和 A 为三角形内角这个条件得到 A .

（2）根据余弦定理代入三角形的面积公式，判断等号成立的条件.

【解答】解：（1）因为 $\overset{1}{\pi}/\!/\overset{1}{n}$，所以 $\sin A\cdot(\sin A+\sqrt{3}\cos A)-\dfrac{3}{2}=0$；

所以 $\dfrac{1-\cos 2A}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\dfrac{3}{2}=0$，

即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A-\dfrac{1}{2}\cos 2A=1$，

即 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$.

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $2A-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

故 $2A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$， $A=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）由余弦定理，得 $4=b^2+c^2-bc$.

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，

而 $b^2+c^2\geqslant 2bc\Rightarrow bc+4\geqslant 2bc\Rightarrow bc\leqslant 4$，（当且仅当 $b=c$ 时等号成立）

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\sqrt{3}$；

当 $\triangle ABC$ 的面积取最大值时， $b=c$. 又 $A=\dfrac{\pi}{3}$；

故此时 $\triangle ABC$ 为等边三角形.