2023 北京东直门中学高三（上）期中

数　　学

考试时间：120 分钟　总分：150 分

第一部分（选择题，共 40 分）

一、单选题（本大题共 10 小题，共 40.0 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知全集 $U=\{x|x>0\}$，集合 $A=\{x|x(x-1)<0\}$，则 $\complement_U A=$（　）

A. $\{x|x>1,或x<0\}$　　B. $\{x|x\geq 1,或x\leq 0\}$　　C. $\{x|x>1\}$　　D. $\{x|x\geq 1\}$

2. 若复数 z_1,z_2 在复平面内对应点的坐标分别为 $(2,1)$，$(0,-1)$，则 $z_1\cdot z_2=$（　）

A. $2+i$　　B. $1-2i$　　C. $-1-2i$　　D. $-i$

3. 已知函数 $f(x)=3\sin 2x$，将函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 的解析式为（　）

A. $g(x)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{8}\right)$　　B. $g(x)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

C. $g(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{8}\right)$　　D. $g(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

4. 已知向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$（　）

A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. 1

5. 已知直线 l、m、n 与平面 α、β，下列命题正确的是（　）

A. 若 $\alpha//\beta$，$l\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $l//n$　　B. 若 $\alpha\perp\beta$，$l\subset\alpha$，则 $l\perp\beta$

C. 若 $l\perp n$，$m\perp n$，则 $l//m$　　D. 若 $l\perp\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

6. 已知直线 $l_1:mx+(m+1)y+2=0$，$l_2:(m+1)x+(m+4)y-3=0$，则“$m=-2$”是“$l_1\perp l_2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知直线 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 和圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相交于 A,B 两点．若 $|AB|=6$，则 r 的值为（　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

8. 已知某种垃圾的分解率为 v，与时间 t（月）满足函数关系式 $v=ab^t$（其中 a，b 为非零常数），若经过 12 个月，这种垃圾的分解率为 10%，经过 24 个月，这种垃圾的分解率为 20%，那么这种垃圾完全分解，至少需要经过（　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

A. 48 个月　　B. 52 个月　　C. 64 个月　　D. 120 个月

9. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，若 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(-2)=1$，则下列命题中正确的是（　）

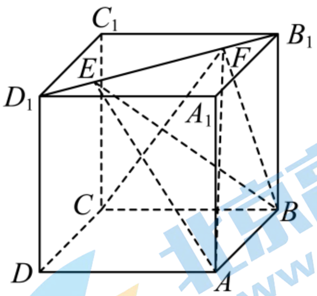
A. $f(x)$ 有两个零点

B. $f(-1)>-1$

C. $f(-3)<1$

D. $f\left(\frac{1}{2}\right)<f(2)$

10. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，线段 B_1D_1 上有两个动点 E,F （E 在 F 的左边），且 $EF=\sqrt{2}$．下列说法不正确的是（　）



A. 当 E 运动时，二面角 $E-AB-C$ 的最小值为 45°

B. 当 E,F 运动时，三棱锥体积 $B-AEF$ 不变

C. 当 E,F 运动时，存在点 E,F 使得 $AE//BF$

D. 当 E,F 运动时，二面角 $C-EF-B$ 为定值

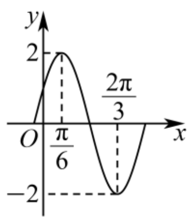
第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

11. 函数 $f(x)=\sqrt{1+x}+\ln(2-x)$ 的定义域为__________.

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=6$，$a_7=48$，则 $a_{11}=$______.

13. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{3}\right)$ 的部分图像如图所示，则函数 $f(x)$ 的解析式为______.



14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+\frac{\lambda}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则实数 λ 的取值范围是________.

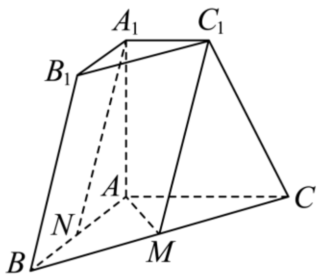
15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, x\le 0\\ x^2-3ax+a, x>0\end{cases}$.

①若 $a=0$，则函数 $f(x)$ 的值域为________；

②若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AA_1\perp$ 面 ABC，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=2$，$A_1C_1=1$，M，N 分别是 BC，BA 的中点.



（1）求证：$A_1N//$ 平面 B_1BCC_1；

（2）求平面 B_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成夹角的余弦值；

（3）求点 A_1 到平面 C_1MA 的距离.

17. 在①$a+c=13$，②$b=7$，③$a+b+c=20$ 三个条件中选一个填在下面试题的横线上，并完成试题(如果多选，以选①评分).

已知△ABC 的角 A，B，C 的对边长分别为 a，b，c，$c\cos A-2b\cos B+a\cos C=0$.

（1）求角 B；

（2）若_____，$c>a$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=20$，求 $\sin A$.

18. “绿水青山就是金山银山”，某地区甲乙丙三个林场开展植树工程，2011-2020 年的植树成活率（%）统计如下：（表中“/”表示该年末植树）：

	2011 年	2012 年	2013 年	2014 年	2015 年	2016 年	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年
甲	95.5	92	96.5	91.6	96.3	94.6	/	/	/	/
乙	95.1	91.6	93.2	97.8	95.6	92.3	96.6	/	/	/
丙	97.0	95.4	98.2	93.5	94.8	95.5	94.5	93.5	98.0	92.5

规定：若当年植树成活率大于95%，则认定该年为优质工程.

（1）从乙林场植树的年份中任抽取两年，求这两年都是优质工程的概率；

（2）从甲、乙、丙三个林场植树的年份中各抽取一年，以 X 表示这 3 年中优质工程的个数，求 X 的分布列；

（3）若乙丙两个林场每年植树的棵数不变，能否根据两个林场优质工程概率的大小，推断出这两个林场植树成活率平均数的大小？

19. 已知函数 $f(x)=2a\ln x-x^2+1$.

（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

（2）若 $a>0$，求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值；

（3）若 $f(x)\le 0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的最大值.

20. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，长轴的右端点为 $A(2,0)$.

（1）求 C 的方程；

（2）直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 C 分别相交于 M,N 两点，且 $AM\perp AN$，点 A 不在直线 l 上.

①试证明直线 l 过一定点，并求出此定点；

②从点 A 作 $AD\perp MN$ 垂足为 D，点 $B\left(\dfrac{8}{5},2\right)$，写出 $|BD|$ 的最小值（结论不要求证明）.

21. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 x，y 中最大的数，$\min\{x,y\}$ 表示 x，y 中最小的数.

（1）当 $a_1=1$，$a_2=2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

（3）若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，是否存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\le M$？如果存在，写出一个满足条件的 M；如果不存在，说明理由.

参考答案

第一部分（选择题，共 40 分）

一、单选题（本大题共 10 小题，共 40.0 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1.【答案】D

【分析】先通过解一元二次不等式化简集合 A，再求其补集.

【详解】因为 $A=\{x\,|\,x(x-1)<0\}=\{x\,|\,0<x<1\}$，

且 $U=\left\{x\middle|x>0\right\}$，所以 $\complement_U A=\{x\,|\,x\geq 1\}$.

故选：D.

2.【答案】B

【分析】根据复数的几何意义可得 $z_1=2+i, z_2=-i$，再利用复数相乘，即可得到答案；

【详解】$\because z_1=2+i, z_2=-i$，

$\therefore z_1\cdot z_2=(2+i)\cdot(-i)=1-2i$，

故选：B.

【点睛】本题考查复数的几何意义及复数的乘法运算，考查运算求解能力，属于基础题.

3.【答案】B

【分析】根据平移变换的性质即可求解.

【详解】将函数 $f\left(x\right)$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度，得到

$f\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=3\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=3\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})$，

故 $g\left(x\right)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，

故选：B

4.【答案】B

【分析】根据模长公式即可求解.

【详解】$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{b}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+4+4\times1\times1\cos120^\circ}=\sqrt{3}$，

故选：B

5.【答案】D

【分析】利用线线，线面，面面的位置关系，以及垂直，平行的判断和性质判断选项即可.

【详解】对于 A，若 $\alpha//\beta$，$l\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 l 与 n 可能平行，也可能异面，故 A 错误；

对于 B，若 $\alpha\perp\beta$，$l\subset\alpha$，则 l 与 β 可能平行，也可能相交，故 B 错误；

对于 C，若 $l\perp n$，$m\perp n$，则 l 与 m 可能平行，也可能相交或异面，故 C 错误；

对于 D，若$l//\beta$，则由线面平行的性质定理可知，必有$l_1\subset\beta$，使得$l//l_1$，

又$l\perp\alpha$，则$l_1\perp\alpha$，因为$l_1\subset\beta$，所以$\alpha\perp\beta$，故 D 正确.

故选：D.

6.【答案】A

【详解】若“$l_1\perp l_2$”，

则 $m(m+1)+(m+1)(m+4)=0$，解得：$m=-1$，或 $m=-2$

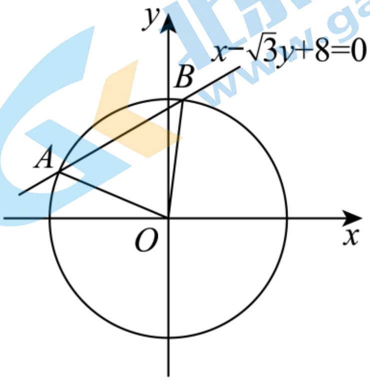
故“$m=-2$”是“$l_1\perp l_2$”的充分不必要条件，

故选 A

7.【答案】C

【分析】应用点线距离公式及几何法求圆的弦长公式列方程求半径即可.

【详解】由圆心为原点，则圆心到直线距离 $d=\dfrac{8}{\sqrt{1+3}}=4$，又$|AB|=6$，



所以$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=6\Rightarrow r^2=25\Rightarrow r=5$

故选：C

8.【答案】B

【分析】根据已知条件，利用待定系数法求出函数关系式，然后再代入数值计算即可.

【详解】由题意可得$\begin{cases}ab^{12}=0.1\\ ab^{24}=0.2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{20}\\ b=2^{\frac{1}{12}}\end{cases}$，

所以$v=\dfrac{1}{20}\cdot 2^{\frac{t}{12}}$，

这种垃圾完全分解，即当$v=1$时，有$1=\dfrac{1}{20}\cdot 2^{\frac{t}{12}}$，即$2^t=20^{12}$，

解得$t=\log_2 20^{12}=12\log_2 20=24+12\log_2 5=24+12\times\dfrac{1-\lg 2}{\lg 2}=52$.

故选：B

9.【答案】B

【分析】由奇函数性质及单调性可知$(-\infty,0)$上减函数，$f(0)=0$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(2)=-1$，依次判断各选项即可得出结果.

【详解】根据题意可得函数$f(x)$在$(0,+\infty)$为减函数，$(-\infty,0)$上减函数，$f(0)=0$，

由$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(-2)=1$可得$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(2)=-1$，

对于*A*，由$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，且$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$f(2)=-1$，所以存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},2\right)$，使

$f(x_0)=0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上有一个零点，

同理$f(x)$在$(-\infty,0)$上有一个零点，又因为$f(0)=0$，

所以$f(x)$有三个零点，故*A*错误；

对于*B*，因为函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上为减函数，所以$f(-1)>f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，故*B*正确；

对于*C*，因为函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上为减函数，所以$f(-3)>f(-2)=1$，故*C*错误；

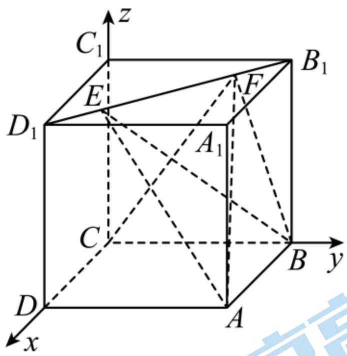
对于*D*，因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$f(2)=-1$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)>f(2)$，故*D*错误.

故选：B.

10.【答案】C

【分析】对A：建立空间直角坐标系，利用向量法求解二面角夹角的余弦值，根据其范围，即可判断；对B：利用棱锥体积公式，即可求得三棱锥的体积，即可判断. 对C：由反证法判断；对D：平面EFB即为平面BDD_1B_1，平面CEF即为平面CB_1D_1，从而得出二面角$C-EF-B$为定值.

【详解】对A：建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A(2,2,0),B(0,2,0),C(0,0,0),D(2,0,0),D_1(2,0,2)$.

因为E,F在B_1D_1上，且$B_1D_1=2\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{2}$，

可设$E(t,2-t,2)(1\le t\le 2)$，则$F(t-1,3-t,2)$，

则$\overrightarrow{AE}=(t-2,-t,2),\overrightarrow{BF}=(t-1,1-t,2)$，

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

又 $\overrightarrow{AB}=(-2,0,0)$，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2x=0\\ (t-2)x-ty+2z=0\end{cases}$，

取 $y=2$，则 $\vec{m}=(0,2,t)$，

平面 ABC 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}$.

设二面角 $E-AB-C$ 的平面角为 θ，则 θ 为锐角，故 $\cos\theta=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4}{t^2}}}$，

因为 $1\le t\le 2$，$y=\sqrt{1+\dfrac{4}{t^2}}$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，

所以 $\sqrt{2}\le\sqrt{1+\dfrac{4}{t^2}}\le\sqrt{5}$，故 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}\le\cos\theta\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

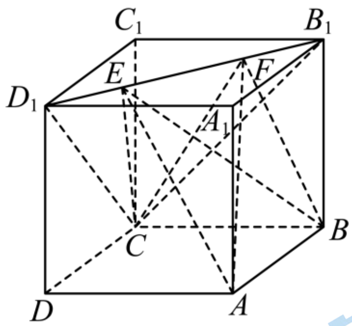
当且仅当 $t=2$ 时，$\cos\theta$ 取得最大值 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 θ 取最小值 45°，故 A 说法正确.

对 B：因为 $S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{2}\times EF\times BB_1=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$，点 A 到平面 BDD_1B_1 的距离为 $\sqrt{2}$，

所以体积为 $V_{B-AEF}=V_{A-BEF}=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\dfrac{2}{3}$，即体积为定值，故 B 说法正确.

对 C：若 $AE//BF$，则 A,B,B_1,D_1 四点共面，与 AB 和 B_1D_1 是异面直线矛盾，故 C 说法错误.

对 D：连接 CD_1,CB_1,CE，平面 EFB 即为平面 BDD_1B_1，而平面 CEF 即为平面 CB_1D_1，故当 E,F 运动时，二面角 $C-EF-B$ 的大小保持不变，故 D 说法正确.



故选：C

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，共 25.0 分）

11. 【答案】$[-1,2)$

【分析】根据函数解析式有意义可得出关于 x 的不等式组，由此可解得函数 $f(x)$ 的定义域.

【详解】对于函数 $f(x)=\sqrt{1+x}+\ln(2-x)$，有 $\begin{cases}x+1\geq 0\\2-x>0\end{cases}$，解得 $-1\leq x<2$.

故函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2)$.

故答案为：$[-1,2)$.

12.【答案】768

【分析】结合题干条件求出公比，进而可计算结果.

【详解】$q^3=\dfrac{a_7}{a_4}=\dfrac{48}{6}=8$，所以 $q=2$，

$a_{11}=a_7\cdot q^4=48\times 2^4=768$.

故答案为：768

13.【答案】$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

【分析】由 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象确定其解析式.

【详解】由图象可得，$A=2$，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，

$\because f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$，$\therefore\dfrac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

即 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$k\in Z$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

$\therefore$函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

故答案为：$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

14.【答案】$(-\infty,2)$

【分析】根据数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，可得到相应的不等式恒成立，即可求得答案.

【详解】$\because$数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+\dfrac{\lambda}{n}$，

数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，

$\therefore a_{n+1}-a_n=n+1+\dfrac{\lambda}{n+1}-n-\dfrac{\lambda}{n}=\dfrac{-\lambda}{n(n+1)}+1>0$，$n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立

即 $\lambda<n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，而 $n^2+n,n\in\mathrm{N}^*$ 随 n 的增大而增大，

即当 n=1 时，$n^2+n,n\in\mathrm{N}^*$ 取得最小值 2，则 $\lambda<2$，

所以实数 λ 的取值范围是 $(-\infty,2)$ ，

故答案为：$(-\infty,2)$．

15.【答案】①. $(0,+\infty)$ ②. $\left(\frac{4}{9},1\right]$

【分析】根据二次函数和指数函数的性质即可求出函数 $f(x)$ 的值域；根据零点和对应方程的解得关系可知，当 $x\le 0$ 时方程 $f(x)=0$ 有 1 个解，当 $x>0$ 时方程 $f(x)=0$ 有 2 个解，结合 $\Delta>0$ 即可求解.

【详解】若 $a=0$，$f(x)=\begin{cases}2^x,x\le 0\\ x^2,x>0\end{cases}$，

当 $x\le 0$ 时，$f(x)=2^x\in(0,1]$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2\in(0,+\infty)$，

所以 $f(x)\in(0,+\infty)$，即函数 $f(x)$ 的值域为 $(0,+\infty)$；

若函数 $f(x)$ 有三个零点，

当 $x\le 0$ 时，令 $f(x)=2^x-a=0\Rightarrow a=2^x\in(0,1]$，

当 $x>0$ 时，方程 $f(x)=0$ 有 2 个解，则 $\Delta>0$，

即 $9a^2-4a>0$，由 $a>0$ 解得 $a>\frac{4}{9}$，

综上，$\frac{4}{9}<a\le 1$，即实数 a 的取值范围为 $(\frac{4}{9},1]$．

故答案为：$(0,+\infty)$；$(\frac{4}{9},1]$．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{2}{3}$

（3）$\frac{2}{3}$

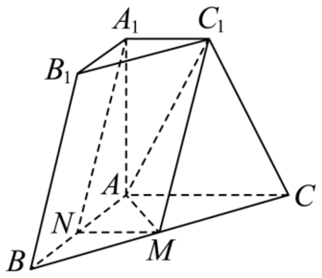
【分析】（1）通过证明 $A_1N//MC_1$，得证 $A_1N//$ 平面 B_1BCC_1；

（2）建立空间直角坐标系，利用向量法求两个平面夹角的余弦值；

（3）向量法求点到平面的距离.

【小问 1 详解】

连接 MN，C_1A.



由 M，N 分别是 BC， BA 的中点，根据中位线性质，$MN//AC$，且 $MN=\frac{AC}{2}=1$，

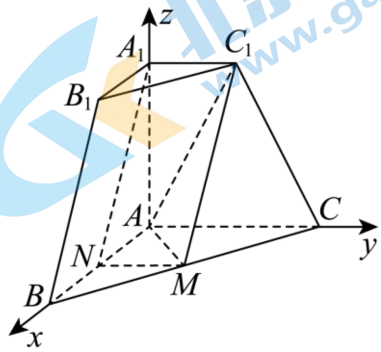
由棱台性质，$A_1C_1//AC$，于是 $MN//A_1C_1$，

由 $MN=A_1C_1=1$ 可知，四边形 MNA_1C_1 是平行四边形，则 $A_1N//MC_1$，

又 $A_1N\not\subset$ 平面 B_1BCC_1，$MC_1\subset$ 平面 B_1BCC_1，于是 $A_1N//$ 平面 B_1BCC_1.

【小问 2 详解】

以 A 为原点，AB，AC，AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B_1(1,0,2)$，$M(1,1,0)$，$C_1(0,1,2)$，$A_1(0,0,2)$，

$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,2)$，$\overrightarrow{AM}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,1,2)$，

设平面 B_1MA 的一个法向量为 $\overrightarrow{e_1}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=x+2z=0\\ \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{AM}=x+y=0\end{cases}$，

令 $z=1$，$x=-2,y=2$，解得 $\overrightarrow{e_1}=(-2,2,1)$，

平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{e_2}=(1,0,0)$，

设平面 B_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成夹角为 θ，

$$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}}{\left|\overrightarrow{e_1}\right|\left|\overrightarrow{e_2}\right|}\right|=\left|\frac{2}{\sqrt{4+4+1}\times1}\right|=\frac{2}{3}$$，所以 $\cos\theta=\frac{2}{3}$，

所以平面 B_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

【小问 3 详解】

设平面 C_1MA 的一个法向量为 $\overrightarrow{e_3}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{AC_1}=y_1+2z_1=0\\ \overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{AM}=x_1+y_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=-1$，则 $x_1=-2, y_1=2$，解得 $\overrightarrow{e_3}=(-2,2,-1)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，

所以距离 $d=\left|\dfrac{\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{\left|\overrightarrow{e_3}\right|}\right|=\left|\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{2}{3}$，点 A_1 到平面 C_1MA 的距离为 $\dfrac{2}{3}$.

17.【答案】(1) $B=\dfrac{\pi}{3}$；(2) 条件性选择见解析，$\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

【分析】(1) 根据正弦定理结合正弦和差公式即可求解；

(2) 选择①根据 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=20$ 解得 $c=8$，$a=5$，结合正余弦定理即可求解；选择②由余弦定理得 $a+c=13$，结合数量积即可求解；选择③由余弦定理得 $a+c=13$，解法同②.

【详解】(1) $\because c\cos A-2b\cos B+a\cos C=0$，

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$\sin C\cos A-2\sin B\cos B+\sin A\cos C=0$，

$\therefore \sin(A+C)=2\sin B\cos B$.

$\because$ A，B，C 是 $\triangle ABC$ 的内角，$\therefore \sin(A+C)=\sin B\neq 0$，

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{2}$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 选择① $a+c=13$.

$\because \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=20$，$\therefore ac\cos B=20$，即 $\dfrac{1}{2}ac=20$，$\therefore ac=40$.

$\because c>a$，$\therefore c=8$，$a=5$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$b=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos B}=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\dfrac{1}{2}}=7$.

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

(2) 选择② $b=7$.

$\because \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=20$，$\therefore ac\cos B=20$，即 $\dfrac{1}{2}ac=20$，$\therefore ac=40$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-3ac=(a+c)^2-120$，

$\therefore a+c=13$.

$\because c>a$，$\therefore a=5$.

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

（2）选择③ $a+b+c=20$.

$\because \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=20$ ，$\therefore ac\cos B=20$，即 $\frac{1}{2}ac=20$ ，$\therefore ac=40$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，

$[20-(a+c)]^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-3ac=(a+c)^2-120$ ，

$\therefore a+c=13$.

$\because c>a$ ，$\therefore a=5$.

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

18. 【答案】（1） $\frac{2}{7}$

（2）分布列见解析　（3）不能，理由见解析

【分析】（1）由古典概率的计算公式代入即可得出答案；

（2）求出 X 的可能取值，分别计算出其概率，即可得出分布列；

（3）分别求出两个林场植树成活率平均数即可判断.

【小问 1 详解】

乙林场植树共 7 年，其中优质工程有 4 年，

从乙林场植树的年份中任抽取两年，这两年都是优质工程为事件 A ，

所以 $P(A)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{7\times6}{2\times1}}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$.

【小问 2 详解】

甲林场植树共 6 年，其中优质工程有 3 年，

乙林场植树共 7 年，其中优质工程有 4 年，

丙林场植树共 10 年，其中优质工程有 5 年，

则 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，

$$P(X=0)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1}{C_6^1\cdot C_7^1\cdot C_{10}^1}=\frac{3}{28},$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1}{C_6^1\cdot C_7^1\cdot C_{10}^1}=\frac{5}{14},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1}{C_6^1\cdot C_7^1\cdot C_{10}^1}=\frac{11}{28},$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_5^1}{C_6^1\cdot C_7^1\cdot C_{10}^1}=\frac{1}{7}.$$

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{1}{7}$

【小问 3 详解】不能根据两个林场优质工程概率的大小，推断出这两个林场植树成活率平均数的大小.

因为乙、丙两个林场优质工程概率分别为$\frac{4}{7},\frac{1}{2}$，且$\frac{4}{7}>\frac{1}{2}$.

则设乙、丙林场植树成活率平均数分别为$\overline{x_1},\overline{x_2}$，

$$\overline{x_1}=\frac{95.1+91.6+93.2+97.8+95.6+92.3+96.6}{7}=94.6,$$

$$\overline{x_2}=\frac{97.0+95.4+98.2+93.5+94.8+95.5+94.5+93.5+98.0+92.5}{10}=95.29$$

所以乙、丙这两个林场植树成活率平均数分别为：94.6，95.29，且丙林场植树成活率大于乙林场植树成活率.

所以不能根据两个林场优质工程概率的大小，推断出这两个林场植树成活率平均数的大小.

19.【答案】（1）$(1,+\infty)$

（2）答案见详解　（3）1

【分析】（1）求导，利用导数求原函数单调递减区间；（2）分类讨论判断导函数符号，进而确定原函数的单调性及最大值；（3）根据恒成立理解可得$\left[f(x)\right]_{\max}\le 0$，分类讨论，结合（2）运算求解.

【小问 1 详解】

当$a=1$时，$f(x)=2\ln x-x^2+1$，则$f'(x)=\frac{2}{x}-2x=\frac{-2(x^2-1)}{x}$，$x>0$

令$f'(x)=\frac{-2(x^2-1)}{x}<0$．因为$x>0$，则$x>1$

所以函数$f(x)$的单调递减区间是$(1,+\infty)$

【小问 2 详解】

$$f'(x)=\frac{2\left(a-x^2\right)}{x}.$$

令$f'(x)=0$，由$a>0$，解得$x_1=\sqrt{a}$，$x_2=-\sqrt{a}$（舍去）.

当$\sqrt{a}\le 1$，即$0<a\le 1$时，在区间$[1,+\infty)$上$f'(x)\le 0$，函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上是减函数.

所以函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的最大值为$f(1)=0$；

当$\sqrt{a}>1$，即$a>1$时，x在$[1,+\infty)$上变化时，$f'(x),f(x)$的变化情况如下表

x	1	$(1,\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},+\infty)$

$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	0	↗	$a\ln a-a+1$	↘

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值为 $f(\sqrt{a})=a\ln a-a+1$.

综上所述：

当 $0<a\le 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值为 $f(1)=0$；

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值为 $f(\sqrt{a})=a\ln a-a+1$.

【小问 3 详解】

当 $a\le 0$ 时，则 $f'(x)\le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立

∴函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数，则 $f(x)\le f(1)=0$

∴ $a\le 0$ 成立

当 $a>0$ 时，由（2）可知：

①当 $0<a\le 1$ 时，$f(x)\le f(1)=0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立，则 $0<a\le 1$ 成立；

②当 $a>1$ 时，由于 $f(x)$ 在区间 $[1,\sqrt{a}]$ 上是增函数，

所以 $f(\sqrt{a})>f(1)=0$，即在区间 $[1,+\infty)$ 上存在 $x=\sqrt{a}$ 使得 $f(x)>0$，$a>1$ 不成立

综上所述：a 的取值范围为 $a\le 1$，即 a 的最大值为 1.

20.【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（2）①证明见解析，$\left(\dfrac{6}{5},0\right)$；②$\dfrac{8}{5}$.

【分析】（1）根据题意得出关于 a,b,c 的方程组，求得 $a=2,b=1$，解得求解；

（2）①联立方程组得出 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1},x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$，根据 $AM\perp AN$，得到 $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AN}$，结合 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，列出方程求得 $m=-\dfrac{6}{5}k$，即可求解；

②根据 $AD\perp MN$，得到点 D 落在以 AP 为直角的圆上，求得圆心坐标和半径，结合点与圆的最值，即可求解.

【小问 1 详解】

解：椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，长轴的右端点为 $A(2,0)$，

可得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ a=2\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$，解得$a=2,b=1,c=\sqrt{3}$，

所以椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

①联立方程组$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，整理得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

可得$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+1},x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$，

设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，所以$\overrightarrow{AM}=(x_1-2,y_1),\overrightarrow{AN}=(x_2-2,y_2)$，

因为$AM\perp AN$，即$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AN}$，

可得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2$

$=x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+(kx_1+m)(kx_2+m)=(k^2+1)x_1x_2+(km-2)(x_1+x_2)+m^2+4$

$=(k^2+1)\cdot\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}+(km-2)\times\dfrac{-8km}{4k^2+1}+m^2+4=\dfrac{5m^2+16km+12k^2}{4k^2+1}=0$，

所以$5m^2+16km+12k^2=0$，解得$m=-2k$或$m=-\dfrac{6}{5}k$，

当$m=-2k$时，直线方程为$y=kx-2k=k(x-2)$，此时过$A(2,0)$，不符合题意（舍去）；

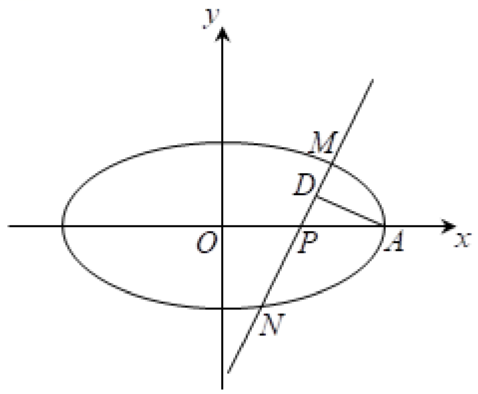
当$m=-\dfrac{6}{5}k$时，直线方程为$y=kx-\dfrac{6k}{5}=k(x-\dfrac{6}{5})$，此时过$P(\dfrac{6}{5},0)$，符合题意，

综上可得，直线过定点$P(\dfrac{6}{5},0)$.

②由题意，从点 A 作$AD\perp MN$垂足为D，点$B\left(\dfrac{8}{5},2\right)$，

如图所示，点D落在以AP为直径的圆上，且圆心坐标为$O_1(\dfrac{8}{5},0)$，半径为$r=\dfrac{2}{5}$，

则$|O_1B|=2$，所以$|BD|$的最小值为$|O_1B|-r=2-\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{5}$.



21.【答案】（1）$\{1,3,5\}$

（2）证明见解析　（3）不存在，理由见解析

【分析】（1）根据定义知 $a_n \geq 0$，讨论 $a_3>2$、$a_3<2$ 及 a_3,a_4 大小求所有 a_4 可能值；

（2）由 $a_n \geq 0$，假设存在 $n_0 \in N^*$ 使 $a_n \leq a_{n_0}$，进而有 $a_{n_0} \leq \max\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\} \leq a_{n_0}$，可得 $\min\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}=0$，即可证结论；

（3）由题设 $a_n \neq a_{n+1}\,(n=2,3,\cdots)$，令 $S=\{n \mid a_n>a_{n+1}, n\geq 1\}$，讨论 $S=\varnothing$、$S\neq\varnothing$ 求证 $a_n>M$ 即可判断存在性.

【小问 1 详解】

由 $a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}\geq 0$，$a_1=\max\{2,a_3\}-\min\{2,a_3\}=1$，

若 $a_3>2$，则 $a_3-2=1$，即 $a_3=3$，此时 $a_2=\max\{3,a_4\}-\min\{3,a_4\}=2$，

当 $a_4>3$，则 $a_4-3=2$，即 $a_4=5$；

当 $a_4<3$，则 $3-a_4=2$，即 $a_4=1$；

若 $a_3<2$，则 $2-a_3=1$，即 $a_3=1$，此时 $a_2=\max\{1,a_4\}-\min\{1,a_4\}=2$，

当 $a_4>1$，则 $a_4-1=2$，即 $a_4=3$；

当 $a_4<1$，则 $1-a_4=2$，即 $a_4=-1$（舍）；

综上，a_4 的所有可能值为 $\{1,3,5\}$.

【小问 2 详解】

由（1）知：$a_n \geq 0$，则 $\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}\geq 0$，

数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，故存在 $n_0 \in N^*$ 使 $a_n \leq a_{n_0}$，$(n=1,2,3,\cdots)$，

由 $a_{n_0}=\max\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}-\min\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}\leq \max\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}\leq a_{n_0}$，

所以 $\min\{a_{n_0+1},a_{n_0+2}\}=0$，故存在 $k\in\{n_0+1,n_0+2\}$ 使 $a_k=0$，

所以 0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

【小问 3 详解】

不存在，理由如下：由 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，则 $a_n\neq a_{n+1}\,(n=2,3,\cdots)$，

设 $S=\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geq 1\}$，

若 $S=\varnothing$，则 $a_1\leqslant a_2$， $a_i<a_{i+1}\,(i=2,3,\cdots)$，

对任意 $M>0$，取 $n_1=[\dfrac{M}{a_1}]+2$（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），

当 $n>n_1$ 时， $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_3-a_2)+a_2$

$=a_{n-2}+a_{n-3}+\ldots+a_1+a_2\geq(n-1)a_1>M$；

若 $S\neq\varnothing$，则 S 为有限集，

设 $m=\max\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geq 1\}$， $a_{m+i}<a_{m+i+1}\,(i=1,2,3,\cdots)$，

对任意 $M>0$，取 $n_2=[\dfrac{M}{a_{m+1}}]+m+1$（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），

当 $n>n_2$ 时， $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_{m+2}-a_{m+1})+a_{m+1}$

$=a_{n-2}+a_{n-3}+\ldots+a_m+a_{m+1}\geq(n-m)a_{m+1}>M$；

综上，不存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\leq M$.

【点睛】关键点点睛：第三问，首选确定 $a_n\neq a_{n+1}\,(n=2,3,\cdots)$，并构造集合 $S=\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\geq 1\}$，讨论 $S=\varnothing$ 、 $S\neq\varnothing$ 研究存在性.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！