2021 北京西城高二（下）期末

数　　学

2021.7

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1） 2 与 8 的等差中项是

（A） -5　　（B） 5

（C） 4　　（D） ±4

（2）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则 $f'(x)=$

（A） $\dfrac{x-1}{e^x}$　　（B） $\dfrac{x+1}{e^x}$

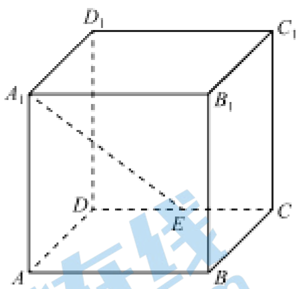
（C） $\dfrac{1-x}{e^x}$　　（D） $-\dfrac{x+1}{e^x}$

（3）在抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上，若横坐标为 3 的点到焦点的距离为 5，则 $p=$

（A） $\dfrac{1}{2}$　　（B） 1

（C） 2　　（D） 4

（4）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 CD 的中点，则直线 A_1E 与 BC 所成角的余弦值为



（A） $\dfrac{2}{5}$

（B） $\dfrac{3}{5}$

（C） $\dfrac{1}{3}$

（D） $\dfrac{2}{3}$

（5）圆 $C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 和圆 $C_2:x^2+y^2=16$ 的位置关系为

（A）内切　　（B）相交

（C）外切　　（D）外离

（6）设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，且$a_n<0\ (n=1,2,\cdots)$．若$\{a_n\}$为递增数列，则q的取值范围是

（A）$(-\infty,-1)$　　（B）$(-1,0)$

（C）$(0,1)$　　（D）$(1,+\infty)$

（7）将一枚质地均匀的硬币连续抛掷4次，记X为“正面朝上”出现的次数，则随机变量X的方差$D(X)=$

（A）2　　（B）1

（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

（8）在空间直角坐标系$O-xyz$中，已知$A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)\ (a>0,b>0,c>0)$，且$\triangle ABC$的面积为6．过$O$作$OH\perp$平面$ABC$于点$H$．若三棱锥$O-ABC$的体积为6，则点$H$的坐标可以为

（A）$(1,1,1)$　　（B）$(1,2,2)$

（C）$(1,2,1)$　　（D）$(1,2,3)$

（9）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_n=n(8-n)\ (n=1,2,\cdots)$，则

（A）$\{a_n\}$有最大项，$\{S_n\}$有最大项　　（B）$\{a_n\}$有最大项，$\{S_n\}$有最小项

（C）$\{a_n\}$有最小项，$\{S_n\}$有最大项　　（D）$\{a_n\}$有最小项，$\{S_n\}$有最小项

（10）已知函数$f(x)=ax^3-3x^2+1$．若$f(x)$有且只有一个零点x_0，且$x_0<0$，则实数a的取值范围是

（A）$(-\infty,-2)$　　（B）$(-2,0)$

（C）$(2,+\infty)$　　（D）$(0,2)$

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）已知函数$f(x)=\cos x$，则$f'(\frac{\pi}{6})=$_____.

（12）已知双曲线$C:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{m}=1$的焦距为6，则实数$m=$_____；$C$的渐近线方程为_____.

（13）甲、乙两地降雨的概率分别为60%和80%，两地同时降雨的概率为30%．则在甲地降雨的条件下，乙地也降雨的概率为_____.

（14）用铁皮围成一个容积为$4\,\text{m}^3$的无盖正四棱柱形水箱，需用铁皮的面积至少为_____ m^2．（注：铁皮厚度不计，接缝处损耗不计）

（15）已知点列$A_n(x_n,0)$ $(n=1,2,\cdots)$，其中$x_1=0,\ x_2=1$．A_3是线段A_1A_2的中点，A_4是线段A_2A_3的中点，…，A_n是线段$A_{n-2}A_{n-1}$的中点，…．记$a_n=x_{n+1}-x_n$．则$a_3=$_____；$x_n=$_____．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知$\{a_n\}$是等比数列，$a_1=1,\ a_4=8$．

（I）求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）若等差数列$\{b_n\}$满足$b_2=a_3$，$b_4=a_5$，求$\{b_n\}$的前n项和S_n．

（17）（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=(x^2-3x+1)\mathrm{e}^x$．

（I）求$f(x)$的单调区间；

（II）求$f(x)$在区间$[-2,0]$上的最大值和最小值．

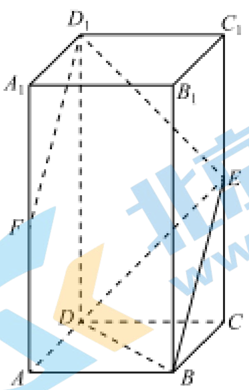
（18）（本小题 15 分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$是边长为1的正方形，$AA_1=2$，E,F分别为CC_1,AA_1的中点．

（I）求证：D_1F // 平面BDE；

（II）求直线D_1E与平面BDE所成角的正弦值；

（III）求直线D_1F与平面BDE之间的距离．



（19）（本小题 14 分）

某超市销售 5 种不同品牌的牙膏，它们的包装规格均相同，销售价格（元/管）和市场份额（指该品牌牙膏的销售量在超市同类产品中所占比重）如下：

牙膏品牌	A	B	C	D	E
销售价格	15	25	5	20	35
市场份额	15%	10%	25%	20%	30%

（I）从这 5 种不同品牌的牙膏中随机抽取 1 管，估计其销售价格低于 25 元的概率；

（II）依市场份额进行分层抽样，随机抽取 20 管牙膏进行质检，其中 A 和 B 共抽取了 n 管.

（i）求 n 的值；

（ii）从这 n 管牙膏中随机抽取 3 管进行氟含量检测．记 X 为抽到品牌 B 的牙膏数量，求 X 的分布列和数学期望.

（III）品牌 F 的牙膏下月进入该超市销售，定价 25 元/管，并占有一定市场份额．原有 5 个品牌的牙膏销售价格不变，所占市场份额之比不变．设本月牙膏的平均销售价为每管 μ_1 元，下月牙膏的平均销售价为每管 μ_2 元，比较 μ_1, μ_2 的大小．（只需写出结论）

（20）（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）过点 $B(0,2)$ 作斜率为 k 的直线交椭圆 C 于点 M,N，直线 MA,NA 分别交直线 $y=2$ 于点 P,Q．求证：B 为 PQ 的中点.

（21）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\ln\dfrac{\mathrm{e}}{x}$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）证明：$f(x)>3$.

2021 北京西城高二（下）期末数学

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B　　（2）C　　（3）D　　（4）D　　（5）C

（6）C　　（7）B　　（8）B　　（9）A　　（10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$-\frac{1}{2}$　　（12）6　　$y=\pm\sqrt{2}x$

（13）50%　　（14）12

（15）$\frac{1}{4}$　　$\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}]$

注：（12）、（15）题第一空 2 分，第二空 3 分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（I）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q．

由题设，$a_4=a_1q^3=1\times q^3=8$，　…………2 分

解得$q=2$．　…………4 分

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$．　…………6 分

（II）设等差数列$\{b_n\}$的公差为d．

因为$b_2=a_3=4, b_4=a_5=16$，

所以$d=\frac{b_4-b_2}{4-2}=6$．　…………8 分

$b_1=b_2-d=-2$．　…………10 分

所以$\{b_n\}$的前n项和$S_n=nb_1+\frac{n(n-1)d}{2}=3n^2-5n$．　…………13 分

（17）（共 13 分）

解：（I）$f'(x)=(x^2-x-2)e^x=(x+1)(x-2)e^x$．　…………2 分

令$f'(x)=0$，得$x_1=-1, x_2=2$．　…………4 分

$f(x)$与$f'(x)$的变化情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,2)$，单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(2,+\infty)$． …………7 分

（II）由（I）知，$f(x)$ 在区间 $(-2,-1)$ 上单调递增，在区间 $(-1,0)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最大值为 $f(-1)=\dfrac{5}{e}$． …………9 分

$f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最小值为 $\min\{f(-2),f(0)\}$． …………11 分

因为 $f(-2)=\dfrac{11}{e^2}$，$f(0)=1$，且 $\dfrac{11}{e^2}>\dfrac{11}{3^2}>1$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上的最小值为 $f(0)=1$． …………13 分

（18）（共 15 分）

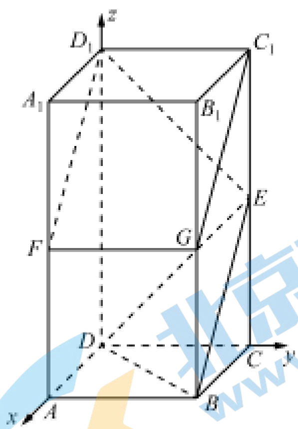
解：（I）取 BB_1 的中点 G，连接 FG,C_1G．

因为 $A_1B_1 // C_1D_1$，且 $A_1B_1=C_1D_1$；$A_1B_1 // FG$，且 $A_1B_1=FG$，

所以 $FG // C_1D_1$，且 $FG=C_1D_1$．

所以四边形 C_1D_1FG 为平行四边形.

所以 $D_1F // C_1G$． …………1 分



在矩形 BCC_1B_1 中，因为 E,G 分别为 CC_1,BB_1 的中点，

所以 $BE // C_1G$．所以 $D_1F // BE$． …………2 分

又 $D_1F\not\subset$ 平面 BDE， …………3 分

所以 $D_1F //$ 平面 BDE． …………4 分

（II）如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$． …………5 分

则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$E(0,1,1)$，$D_1(0,0,2)$．

所以 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{D_1E}=(0,1,-1)$．

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}\quad 即 \begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$$ …………7 分

令 $y=-1$，则 $x=1$，$z=1$，于是 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$． …………8 分

设直线 D_1E 与平面 BDE 所成角为 α ，则

$$\sin\alpha = |\cos\langle \boldsymbol{m}, \overrightarrow{D_1E}\rangle| = \frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1E}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{D_1E}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$ …………11 分

（III）由（I）知 D_1F // 平面 BDE，

所以直线 D_1F 与平面 BDE 之间的距离为点 D_1 到平面 BDE 的距离. …………13 分

所以直线 D_1F 与平面 BDE 之间的距离为

$$d = \frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1E}|}{|\boldsymbol{m}|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$ …………15 分

（19）（共 14 分）

解：（I）记“从该超市销售的牙膏中随机抽取 1 管，其销售价格低于 25 元”为事件 K .

由题设， $P(K) = 0.15 + 0.25 + 0.2 = 0.6$. …………3 分

（II）（i）由题设，品牌 A 的牙膏抽取了 $20\times 15\% = 3$ 管，

品牌 B 的牙膏抽取了 $20\times 10\% = 2$ 管，

所以 $n = 3 + 2 = 5$. …………5 分

（ii）随机变量 X 的可能取值为 $0,1,2$.

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10};$$ …………6 分

$$P(X=1) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5};$$ …………7 分

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}.$$ …………8 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

…………9 分

X 的数学期望为 $E(X) = 0\times\frac{1}{10} + 1\times\frac{3}{5} + 2\times\frac{3}{10} = \frac{6}{5}$. …………11 分

（III） $\mu_1 < \mu_2$. …………14 分

（20）（共 15 分）

解：（I）由题设，得 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \dfrac{2^2}{a^2}+\dfrac{1^2}{b^2}=1.\end{cases}$ …………2 分

解得 $a^2=8$，$b^2=2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$. …………4 分

（II）由题意，设直线 MN 的方程为 $y=kx+2$.

由 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+16kx+8=0$. …………5 分

由 $\varDelta=256k^2-4(4k^2+1)\times 8>0$，得 $k^2>\dfrac{1}{4}$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=\dfrac{-16k}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{8}{4k^2+1}$. …………7 分

①当 $x_1\neq 2$ 时，直线 MA 的方程为 $y=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)+1$.

令 $y=2$，得点 P 的横坐标 $x_P=\dfrac{x_1-2}{y_1-1}+2$. …………8 分

同理可得点 Q 的横坐标 $x_Q=\dfrac{x_2-2}{y_2-1}+2$. …………9 分

$x_P+x_Q=\dfrac{x_1-2}{y_1-1}+\dfrac{x_2-2}{y_2-1}+4$

$=\dfrac{x_1-2}{kx_1+1}+\dfrac{x_2-2}{kx_2+1}+4$ …………10 分

$=\dfrac{(2k+1)[2kx_1x_2+(x_1+x_2)]}{(kx_1+1)(kx_2+1)}$. …………12 分

因为 $2kx_1x_2+(x_1+x_2)=\dfrac{2k\times 8}{4k^2+1}-\dfrac{16k}{4k^2+1}=0$，所以 $x_P+x_Q=0=2x_B$.

所以 B 为 PQ 的中点. …………13 分

②当 $x_1=2$ 时，$M(2,-1)$，$P(2,2)$.

直线 MB 的方程为 $3x+2y-4=0$，可求得 $N(\dfrac{2}{5},\dfrac{7}{5})$.

所以直线 NA 的方程为 $x+4y-6=0$，从而 $Q(-2,2)$.

此时依然有 $x_P + x_Q = 0 = 2x_B$. …………15 分

综上， B 为 PQ 的中点.

（21）（共 15 分）

解：（I）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. …………1 分

且 $f(x) = e^x - \ln x + 1$， $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$. …………3 分

因为 $f(1) = e + 1$， $f'(1) = e - 1$， …………5 分

故所求的切线方程为 $y - (e+1) = (e-1)(x-1)$，即 $y = (e-1)x + 2$. …………6 分

（II）由（I）可知 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增函数. …………7 分

因为 $f'(1) = e - 1 > 0$， $f'(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2 < 0$，

所以存在唯一的 $x_0 \in (\frac{1}{2},1)$，使 $f'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$. …………9 分

从而有 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$， $x_0 = \ln\frac{1}{x_0} = -\ln x_0$. …………11 分

因为 $x \in (0, x_0)$ 时， $f'(x) < 0$； $x \in (x_0,+\infty)$ 时， $f'(x) > 0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. …………13 分

所以 $f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 + 1 = \frac{1}{x_0} + x_0 + 1 > 3$.

所以 $f(x) > 3$. …………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。