2019~2020学年度高三年级四月份测试题

数学A　参考答案　　　　　　2020. 4

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

（1）A　（2）C　（3）C　（4）B　（5）D

（6）D　（7）D　（8）B　（9）C　（10）A

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

（11）-80　　（12）-4，$\dfrac{3}{25}-\dfrac{4}{25}\mathrm{i}$

（13）$a_n=-2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$（答案不唯一）

（14）$\sqrt{2}+1$　　（15）①④

三、解答题（共6小题，共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

（16）（本小题13分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos(x+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{2})\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

$=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x)$

$=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$，　……………3分

（另解：$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{4})(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4})$

$=\sqrt{3}\sin 2x-2(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x)(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x)$

$=\sqrt{3}\sin 2x-(\cos^2 x-\sin^2 x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，　……………3 分

所以$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$．　……………4 分

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$．

故$f(x)$的单调递增区间为：$[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$．　……………6 分

（Ⅱ）令$2\sin(2x-\frac{\pi}{6})=1$，有$\sin(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

即$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$或$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

也即$x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$或$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$．

因为$x\in[0,\pi]$，

所以$x=\frac{\pi}{6}$或$x=\frac{\pi}{2}$．　…………………9 分

令$2\sin(2x-\frac{\pi}{6})=-1$，得$\sin(2x-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$．

即$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$或$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

也即$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$或$x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$．

因为$x\in[0,\pi]$，所以$x=\pi$或$x=\frac{2\pi}{3}$．　…………………………11 分

又因为$f(x)$的单调递增区间为：$[0,\frac{\pi}{3}]$和$[\frac{5\pi}{6},\pi]$，

$f(x)$的单调递减区间为：$(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6})$，　…………………12 分

所以当$f(x)\in(-1,1]$时，x的取值范围为$(0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{\pi}{2},\frac{2}{3}\pi)$．　…………13 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由表可知，该患者共 6 天的体温不低于 39 C，记平均体温为 $\bar{x}$， ……1 分

$\bar{x}=\frac{1}{6}(39.4+39.7+40.1+39.9+39.2+39.0)=39.55$ C． ………4 分

所以，患者体温不低于 39℃ 的各天体温平均值为 39.55 C．

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 0，1，2． ……………………5 分

$P(X=0)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$， ……………………6 分

$P(X=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$， ……………………7 分

$P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$． ……………………8 分

则 X 的分布列为： ……………………9 分

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$． ……………………11 分

（Ⅲ）“抗生素 C”治疗效果最佳可使用理由：

① “抗生素 B”使用期间先连续两天降温 1.0 C 又回升 0.1 C，“抗生素 C”使用期间持续降温共计 1.2 C，说明“抗生素 C”降温效果最好，故“抗生素 C”治疗效果最佳．

② 抗生素 B”治疗期间平均体温 39.03 C，方差约为 0.0156；“抗生素 C”平均体温 38 C，方差约为 0.1067，“抗生素 C”治疗期间体温离散程度大，说明存在某个时间节点降温效果明显，故“抗生素 C”治疗效果最佳． ……………………14 分

“抗生素 B”治疗效果最佳可使用理由：

（不说使用“抗生素 B”治疗才开始持续降温扣 1 分）

自使用“抗生素 B”开始治疗后，体温才开始稳定下降，且使用“抗生素 B”治疗当天共降温 0.7 C，是单日降温效果最好的一天，故“抗生素 B”治疗效果最佳． …………14 分

（开放型问题，答案不唯一，但答“抗生素 A”效果最好不得分，理由与结果不匹配不得分，不用数据不得分）

（18）（本小题15分）

解：（Ⅰ）因为平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD， ……………………………1分

平面 $ABCD\cap$ 平面 $PCD=CD$， ……………………………2分

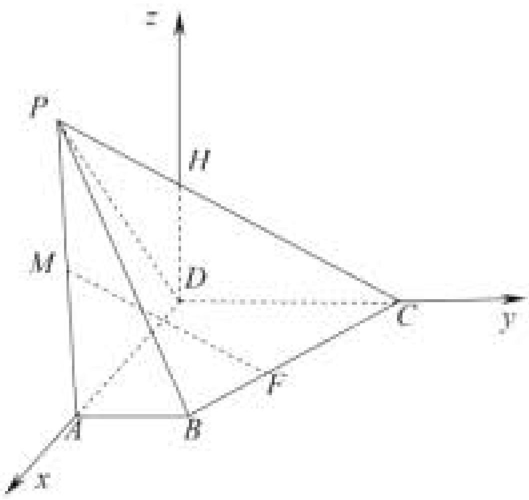
$AD\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\perp DC$ ……………………………3分

所以 $AD\perp$ 平面 PCD， ……………………………4分

又因为 $PC\subset$ 平面 PCD，

所以 $AD\perp PC$． ……………………………5分

（Ⅱ）选择①评分细则：



在平面 PCD 内过点 D 作 $DH\perp DC$，交 PC 于 H．

由（Ⅰ）可知，$AD\perp$ 平面 PDC，

所以 $AD\perp DH$．

故 AD,CD,DH 两两垂直．

如图，以 D 为原点，DA,DC,DH 所在直线分别

为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$．

则 $D(0,0,0)$，$P(0,-1,\sqrt{3})$，$A(2,0,0)$，$B(2,1,0)$，$C(0,2,0)$． ……………………………6分

因为 $DH\perp$ 平面 $ABCD$，所以平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$．

而 $\overrightarrow{PA}=(2,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PB}=(2,2,-\sqrt{3})$，

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$．

则由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x+y-\sqrt{3}z=0,\\ 2x+2y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

取 $z=2$，有 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,2)$． ……………………8分

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2}{7}\sqrt{7}$． ……………………………10分

由题知，二面角 $P-AB-C$ 为锐角，

故二面角 $P-AB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{2}{7}\sqrt{7}$． ………11分

选择②得分要点（评分细则同①）：（下面给出关键点供参考，若与上面建系相同，则）

平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$．：平面 PBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},2\sqrt{3},2)$；

二面角 $P-BD-C$ 为钝角：二面角 $P-AB-C$ 的余弦值为 $-\frac{2}{19}\sqrt{19}$．

选择③得分要点（评分细则同①）：（下面给出关键点供参考，若与上面建系相同，则）

平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$；平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,2,2\sqrt{3})$；

二面角 $P-BC-D$ 为锐角：二面角 $P-BC-D$ 的余弦值为 $\frac{2}{17}\sqrt{51}$．

（Ⅲ）假设棱 BC 上存在点 F，$MF\parallel PC$．设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC},\lambda\in[0,1]$．　　　　……………………12 分

依题意，可知 $M(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-2,1,0)$，

$\overrightarrow{BF}=(-2\lambda,\lambda,0)$，$F=(2-2\lambda,1+\lambda,0)$，　　　　……………………13 分

$\overrightarrow{MF}=(1-2\lambda,\frac{3}{2}+\lambda,-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{PC}=(0,3,-\sqrt{3})$，　　　　……………………14 分

则 $\begin{cases}1-2\lambda=0,\\ \frac{3}{2}+\lambda=3\mu,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\mu,\end{cases}$ 而此方程组无解，故假设不成立，所以结论成立．　　　　……15 分

（19）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得：$\begin{cases}\frac{2b^2}{a}=3,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$　　　　……………………1 分

解得: $a=2,b=\sqrt{3},c=1$．　　　　……………………2 分

所以椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．　　　　……………………3 分

（Ⅱ） 依题意，若直线l的斜率不为零，可设直线$l: x=my+1(m\neq 0)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

假设存在点P，设$P(x_0,0)$，由题设，$x_0\neq 1$，且$x_0\neq x_1$，$x_0\neq x_2$．

设直线PA,PB的斜率分别为k_1,k_2，

则$k_1=\dfrac{y_1}{x_1-x_0},k_2=\dfrac{y_2}{x_2-x_0}$． ……………4 分

因为$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$在$x=my+1$上，

故$x_1=my_1+1,x_2=my_2+1$． ……………………………………………………5 分

而x轴上任意点到直线PA,PB距离均相等等价于“PF平分$\angle APB$”，

所以等价于$k_1+k_2=0$． ……6 分

$$\text{则}k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1-x_0}+\frac{y_2}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{x_1y_2+x_2y_1-x_0(y_1+y_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$$

$$=\frac{2my_1y_2+(1-x_0)(y_1+y_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=0.$$ ………………………8 分

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，消去$x$，得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

有$y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$． ……………10 分

则$k_1+k_2=0=\dfrac{-18m-6m+6mx_0}{(3m^2+4)(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=\dfrac{-24m+6mx_0}{(3m^2+4)(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$，

即$-4m+mx_0=0$，又$m\neq 0$，故$x_0=4$． ……………………………………13 分

当直线l的斜率为零时，$P(4,0)$也符合题意．

故存在点$P(4,0)$，使得x轴上任意点到直线PA,PB距离均相等． ………14 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ） 因为$f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2(a\in\mathbf{R})$，

故$f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$． …………1 分

依题意$f'(1)=\mathrm{e}-2a=0$，即$a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$． …………2 分

当$a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$时，$f(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}\neq 0$，此时切线不与$x$轴重合，符合题意，因此$a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$． …………3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，

当$a\le 0$时，因为$x\in[0,1]$，$\mathrm{e}^x>0$，$-2ax\ge 0$，

故$f'(x)>0$，即$f(x)$单调递增，

因此$f(x)_{\max}=f(1)=\mathrm{e}-a$.

依题意，当$a\le 0$时，$f(x)_{\max}=\mathrm{e}-a\ge \mathrm{e}>2$，所以$a\le 0$符合题意. …………5分

当$a>0$时，$f''(x)=\mathrm{e}^x-2a$，令$f''(x)=0$，有$x=\ln 2a$. ……………………………6分

$f''(x)$，$f'(x)$变化如下：

x	$(-\infty,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,+\infty)$
$f''(x)$	—	0	+
$f'(x)$	↘	极小值	↗

故$f'(x)_{\min}=2a-2a\ln 2a=2a(1-\ln 2a)$. ……………………………………7分

当$1-\ln 2a\ge 0$时，即$0<a\le\dfrac{\mathrm{e}}{2}$时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$单调递增，

因此$f(x)_{\max}=f(1)=\mathrm{e}-a$.

依题意，令$\mathrm{e}-a\ge 2$，有$0<a\le \mathrm{e}-2$. ……………………………8分

当$1-\ln 2a<0$时，即$a>\dfrac{\mathrm{e}}{2}$时，$f'(1)=\mathrm{e}-2a<0$，$f'(0)=1>0$，

故存在唯一$x_0\in(0,1)$使$f'(x_0)=0$. ……9分

此时有$\mathrm{e}^{x_0}-2ax_0=0$，即$\mathrm{e}^{x_0}=2ax_0$，$f'(x)$，$f(x)$变化如下：…………………………10分

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以$f(x)_{\max}=f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-ax_0^2=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{x_0\mathrm{e}^{x_0}}{2}$，$x_0\in(0,1)$. ……………………………11分

依题意，令$g(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2}$，$x\in(0,1)$，则$g'(x)=\dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{2}>0$，$g(x)$在$(0,1)$单调递增，

所以$g(x)<g(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{2}<2$，所以$f(x)_{\max}<2$，此时不存在符合题意的$a$.

综上所述，当$a\in(-\infty,\mathrm{e}-2]$，$f(x)$在$[0,1]$上的最大值不小于2，

若 $a \notin (-\infty, e-2]$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值小于 2，

所以 a 的取值范围为 $(-\infty, e-2]$. ……………………12 分

解法二：

（Ⅱ）当 $x \in [0,1]$ 时，$f(x)$ 最大值不小于 2，等价于

$f(x) = e^x - ax^2 \geq 2$ 在 $x \in [0,1]$ 上有解，显然 $x = 0$ 不是解，

即 $a \leq \dfrac{e^x - 2}{x^2}$ 在 $x \in (0,1]$ 上有解， ……………………4 分

设 $g(x) = \dfrac{e^x - 2}{x^2}$，$x \in (0,1]$，

则 $g'(x) = \dfrac{xe^x - 2e^x + 4}{x^3}$. ……………………5 分

设 $h(x) = xe^x - 2e^x + 4$，$x \in (0,1]$，

则 $h'(x) = e^x(x-1) \leq 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递减，$h(x) \geq h(1) = 4 - e > 0$， …………7 分

所以 $g'(x) > 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递增， ……………………9 分

所以 $g(x)_{\max} = g(1) = e - 2$. ……………………10 分

依题意需 $a \leq e - 2$.

所以 a 的取值范围为 $(-\infty, e-2]$. ……………………12 分

解法三：

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f'(x) = e^x - 2ax$，

（1）当 $a \leq \dfrac{e}{2}$ 时，$f'(x) = e^x - 2ax \geq e^x - ex$，

设 $h(x) = e^x - ex \;\; x \in [0,1]$，$h'(x) = e^x - e \leq 0$，

所以 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，故 $h(x) \geq h(1) = 0$. …………5 分

所以 $f'(x) \geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，

因此 $f(x)_{\max} = f(1) = e - a$. …………7 分

依题意，令 $e - a \geq 2$，得 $a \leq e - 2$. …………8 分

（2）当$a>\dfrac{e}{2}$时，$f(x)=e^x-ax^2\le e^x-\dfrac{e}{2}x^2$，

设$\varphi(x)=e^x-\dfrac{e}{2}x^2$, $x\in[0,1]$，

则$\varphi'(x)=e^x-ex=h(x)\ge 0$，

所以$\varphi(x)$在$[0,1]$单调递增，…………10分

故$\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=e-\dfrac{e}{2}=\dfrac{e}{2}<2$，即$f(x)<2$，不符合题意．…………11分

综上所述，a的取值范围为$(-\infty,e-2]$．…………12分

（III）当$a\le 0$时，$y=f(x)$有0个零点；当$0<a<\dfrac{e^2}{4}$时，$y=f(x)$有1个零点

当$a=\dfrac{e^2}{4}$时，$y=f(x)$有2个零点；当$a>\dfrac{e^2}{4}$时，$y=f(x)$有3个零点．…………15分

（写对一个给1分，写对三个给2分，全对给3分）．

（21）（本小题14分）

解：（I）$A=(0,0)$, $B=(0,1)$；

$A=(0,1)$, $B=(0,0)$；…………1分

$A=(1,0)$, $B=(1,1)$；…………2分

$A=(1,1)$, $B=(1,0)$．…………3分

（II）令$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n),B=(b_1,b_2,\cdots,b_n),C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，

（i）对$i=1,2,\cdots,n$，

当$c_i=0$时，有$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|a_i-b_i|$；…………4分

当$c_i=1$时，有$||a_i-c_i|-|b_i-c_i||=|1-a_i-(1-b_i)|=|a_i-b_i|$．…………5分

所以

$$d(A-C,B-C)=||a_1-c_1|-|b_2-c_2||+||a_2-c_2|-|b_2-c_2||+\cdots+||a_n-c_n|-|b_n-c_n||$$

$$=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|=d(A,B)．$$ …………6分

（ii）证法1：设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in S_n$，

$d(A,B)=k$，$d(A,C)=l$，$d(B,C)=h$.

记 $O=(0,0,\cdots,0)\in S_n$，由（I）可知，

$d(A,B)=d(A-A,B-A)=d(O,B-A)=k$，

$d(A,C)=d(A-A,C-A)=d(O,C-A)=l$，

$d(B,C)=d(B-A,C-A)=h$，

所以 $|b_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 中1的个数为 k，$|c_i-a_i|(i=1,2,\cdots,n)$ 的1的个数为 l.

设 t 是使 $|b_i-a_i|=|c_i-a_i|=1$ 成立的 i 的个数，则 $h=l+k-2t$.

由此可知，k,l,h 三个数不可能都是奇数，

即 $d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数.

证法2：因为 $(a_i-b_i)+(b_i-c_i)+(c_i-a_i)=0$，

且 $(a_i-b_i)+(b_i-c_i)+(c_i-a_i)$ 与 $|a_i-b_i|+|b_i-c_i|+|c_i-a_i|$ 奇偶性相同，

所以 $|a_i-b_i|+|b_i-c_i|+|c_i-a_i|$ 为偶数，故 $d(A,B)+d(B,C)+d(A,C)$ 为偶数．…8分

所以 $d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数．……………………………9分

（III）记 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)$ 为 P 中所有两个元素间距离的总和，

设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个1，$m-t_i$ 个0，……………………10分

则 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i(m-t_i)$．……………………………………………………………11分

因为 m 为奇数，所以 $t_i(m-t_i)\le\dfrac{m^2-1}{4}(i=1,2,\cdots,n)$，且 $t_i=\dfrac{m-1}{2}$ 或 $\dfrac{m+1}{2}$ 时，取等号．

所以 $\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\le\dfrac{n(m^2-1)}{4}$．……………………………………………………13分

所以 $\overline{d}_P=\dfrac{1}{C_m^2}\sum\limits_{A,B\in P}d(A,B)\le\dfrac{n(m^2-1)}{4C_m^2}=\dfrac{(m+1)n}{2m}$．……………………………14分