

# 2021 北京 57 中高一（上）期中

## 数 学

班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

### 一、单选题(共 40 分)

1. 设集合  $A = \{1, 2, 6\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ ,  $C = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 5\}$ , 则  $(A \cup B) \cap C = ( \quad )$

- A.  $\{2\}$       B.  $\{1, 2, 4\}$       C.  $\{1, 2, 4, 5\}$       D.  $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 5\}$

2. 下列每组函数是同一函数的是 ( )

- A.  $f(x) = 1, g(x) = x^0$       B.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, g(x) = x + 2$

- C.  $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-3)}, g(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-3}$       D.  $f(x) = |x-3|, g(x) = \sqrt{(x-3)^2}$

3. 若  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ , 则下列不等式: ①  $a+b < ab$ ; ②  $|a| > |b|$ ; ③  $a < b$ ; ④  $a > b$  中, 正确的不等式有 ( )

- A. ① ②      B. ① ④      C. ③ ④      D. ① ③ ④

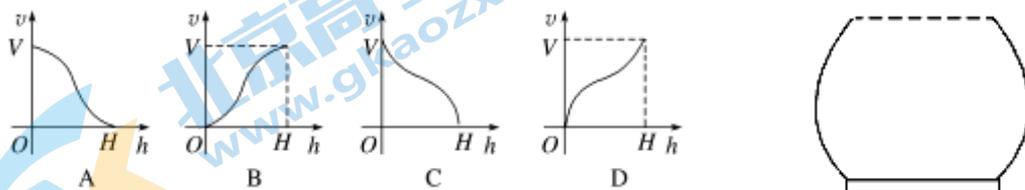
4. 给出下列四个命题:

- ① 设集合  $M = \{x | x > -1\}$ , 则  $\{0\} \in M$ ;
- ② 空集是任何集合的子集;
- ③ 集合  $A = \{x | y = \sqrt{x^2 - 1}\}$ ,  $B = \{y | y = \sqrt{x^2 - 1}\}$  表示同一集合;
- ④ 集合  $P = \{a, b\}$ , 集合  $Q = \{b, a\}$ , 则  $P=Q$

其中不正确的命题是 ( )

- A. ① ②      B. ② ④      C. ① ③      D. ③ ④

5. 一高为  $H$ , 满缸水量为  $V$  的鱼缸截面如图所示, 其底部破了一个小洞, 满缸水从洞中流出. 若鱼缸水深为  $h$  时的水的体积为  $v$ , 则函数  $v = f(h)$  的大致图像可能是图中的 ( )



6. 命题“ $\exists x \in [1, 2], x^2 + x - a \leq 0$ ”为假命题, 则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, 2)$     B.  $(-\infty, 6)$     C.  $(-\infty, 2]$     D.  $(-\infty, 6]$

7. 若函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 3a, & x \geq 1, \\ 2ax + 1, & x < 1 \end{cases}$  是  $\mathbb{R}$  上的减函数, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\frac{1}{2}, 0)$     B.  $[-\frac{1}{2}, 0)$     C.  $(-\infty, 2]$     D.  $(-\infty, 0)$

8. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2x - x^2$ , 则下列说法正确的 ( )

- A.  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  上为增函数    B.  $f(x)$  的最大值为 2  
C. 方程  $f(x) - 1 = 0$  有四个不相等的实数根    D. 当  $x < 0$  时,  $f(x) = -x^2 - 2x$

9. 已知  $x$  为实数,  $A = \{2, x, x^2\}$ , 集合  $A$  中有一个元素恰为另一个元素的 2 倍, 则实数  $x$  的个数为 ( )

- A. 3    B. 4    C. 5    D. 6

10. 已知定义域为  $D$  的函数  $f(x)$ , 若对任意  $x \in D$ , 存在正数  $M$ , 都有  $|f(x)| \leq M$  成立, 则称函数  $f(x)$  是定义域为  $D$  上的“有界函数”. 已知下列函数:

(1)  $f(x) = \frac{3+x}{4-x}$ ; (2)  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ; (3)  $f(x) = \frac{5}{2x^2-4x+3}$ ; (4)  $f(x) = x + \sqrt{4-x}$ .

其中“有界函数”是 ( )

- A. (1)(2)    B. (2)(3)    C. (2)(4)    D. (3)(4)

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题(共 40 分)

11.  $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$  的定义域为 \_\_\_\_\_.

12. 已知  $x > 3$ , 求  $y = x + \frac{4}{x-3}$  的最小值 \_\_\_\_\_, 此时  $x =$  \_\_\_\_\_.

13. 已知函数  $f(x-1)$  的定义域为  $(-1, 0)$ , 则函数  $f(2x+1)$  的定义域为 \_\_\_\_\_.

14. 函数  $y = -x^2 + 2|x| + 3$  的单调减区间是 \_\_\_\_\_,  $f(f(-1)) =$  \_\_\_\_\_.

15. 若函数  $f(x)$  满足  $f(3x-1) = \frac{1}{2x}$ , 则  $f(5) =$  \_\_\_\_\_,  $f(x) =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知命题  $p: |x-1| \geq 2, q: x^2 - 7x + 12 < 0$ , 则  $p$  是  $q$  的 \_\_\_\_\_ (充分不必要, 必要不充分, 既不充分又不必要, 充要条件).

17. 若定义在  $R$  上的二次函数  $f(x)=ax^2-4ax+b$  在区间  $[0,2]$  上是增函数,且  $f(m) \geq f(0)$ , 则实数  $m$  的取值范围是

\_\_\_\_\_.

18. 在直角坐标系  $xOy$  中, 对于点  $P(x, y)$  和  $Q(x, y')$ , 给出如下定义:

若  $y' = \begin{cases} y(x \geq 0) \\ -y(x < 0) \end{cases}$ , 则称点  $Q$  为点  $P$  的“可控变点”. 请问:

若点  $P$  在函数  $y = -x^2 + 16$  ( $-5 \leq x \leq a$ ) 的图象上, 其“可控变点” $Q$  的纵坐标  $y'$  的取值范围是  $-16 < y' \leq 16$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题(共 70 分)

19. (满分 12 分) 已知全集  $U = R$ , 集合  $A = \{x | 2 < x < 9\}$ ,  $B = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$ .

(1) 求  $A \cap B$ ;  $B \cup (C_U A)$ ;

(2) 已知集合  $C = \{x | a \leq x \leq 2 - a\}$ , 若  $C \cup (C_U B) = R$ , 求实数  $a$  的取值范围.

20. (满分 12 分) 已知函数  $f(x) = x^2 + (m-1)x + 4$ , 其中  $m$  为常数.

(1) 若  $m=1$ , 判断函数  $f(x)$  的奇偶性并用定义法证明奇偶性.

(2) 若函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 求实数  $m$  的取值范围:

(3) 若  $\forall x \in R$ , 都有  $f(x) > 0$ , 求实数  $m$  的取值范围.

21. (满分 10 分) (1) 已知  $x, y \in R$ , 证明:  $2(x^4 + y^4) \geq (x^2 + y^2)^2$ ;

(2) 用反证法证明: 三个数中  $a, 2a^2 - 1, a + 1$ , 至少有一个大于或等于  $-\frac{1}{6}$

22. (满分 12 分) 已知函数  $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$

(1) 判断函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上的单调性, 并用函数单调性的定义加以证明

(2) 求出函数  $f(x)$  在区间  $[1, 9]$  上的最大值和最小值

(3) 画出函数图象并求出其值域

23. (满分 12 分) 已知  $f(x)$  是定义在  $[-1, 1]$  上的奇函数, 且  $f(1) = 1$  若  $m, n \in [-1, 1], m \neq n$  时, 有  $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} > 0$

(1) 解不等式  $f(x^2 - 1) + f(3 - 3x) < 0$

(2) 若  $f(x) \leq t^2 - 2at + 1$  对  $\forall x \in [-1, 1], \forall a \in [-1, 1]$  恒成立, 求实数  $t$  的取值范围

24. (满分 12 分) 已知有限集  $X, Y$ , 定义集合  $X - Y = \{x | x \in X, \text{且 } x \notin Y\}$ ,  $|X|$  表示集合  $X$  中的元素个数.

(1) 若  $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{3, 4, 5\}$ , 求集合  $X - Y$  和  $Y - X$ , 以及  $|(X - Y) \cup (Y - X)|$  的值;

(2) 给定正整数  $n$ , 集合  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ , 对于实数集的非空有限子集  $A, B$ , 定义集合  $C = \{x | x = a + b, a \in A, b \in B\}$

① 求证:  $|A - S| + |B - S| + |S - C| \geq 1$ ;

② 求  $|(A - S) \cup (S - A)| + |(B - S) \cup (S - B)| + |(C - S) \cup (S - C)|$  的最小值。