

2021 北京 57 中高一（上）期中

数 学

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

一、单选题(共 40 分)

1. 设集合 $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 5\}$, 则 $(A \cup B) \cap C = (\quad)$

- A. $\{2\}$ B. $\{1, 2, 4\}$ C. $\{1, 2, 4, 5\}$ D. $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 5\}$

2. 下列每组函数是同一函数的是 ()

- A. $f(x) = 1, g(x) = x^0$ B. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, g(x) = x + 2$

- C. $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-3)}, g(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-3}$ D. $f(x) = |x-3|, g(x) = \sqrt{(x-3)^2}$

3. 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则下列不等式: ① $a+b < ab$; ② $|a| > |b|$; ③ $a < b$; ④ $a > b$ 中, 正确的不等式有 ()

- A. ① ② B. ① ④ C. ③ ④ D. ① ③ ④

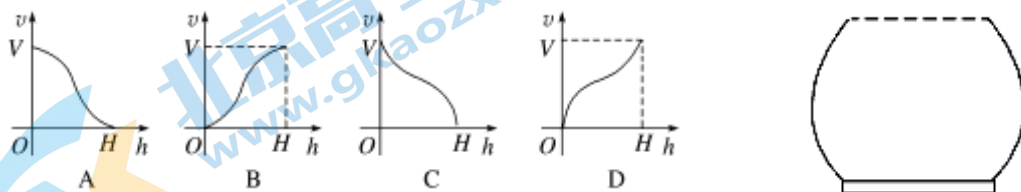
4. 给出下列四个命题:

- ① 设集合 $M = \{x | x > -1\}$, 则 $\{0\} \in M$;
- ② 空集是任何集合的子集;
- ③ 集合 $A = \{x | y = \sqrt{x^2 - 1}\}$, $B = \{y | y = \sqrt{x^2 - 1}\}$ 表示同一集合;
- ④ 集合 $P = \{a, b\}$, 集合 $Q = \{b, a\}$, 则 $P=Q$

其中不正确的命题是 ()

- A. ① ② B. ② ④ C. ① ③ D. ③ ④

5. 一高为 H , 满缸水量为 V 的鱼缸截面如图所示, 其底部破了一个小洞, 满缸水从洞中流出. 若鱼缸水深为 h 时的水的体积为 v , 则函数 $v = f(h)$ 的大致图像可能是图中的 ()



6. 命题“ $\exists x \in [1, 2], x^2 + x - a \leq 0$ ”为假命题, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 6)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 6]$

7. 若函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - 3a, & x \geq 1, \\ 2ax + 1, & x < 1 \end{cases}$ 是 \mathbb{R} 上的减函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\frac{1}{2}, 0)$ B. $[-\frac{1}{2}, 0)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 0)$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2x - x^2$, 则下列说法正确的 ()

- A. $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为增函数 B. $f(x)$ 的最大值为 2
C. 方程 $f(x) - 1 = 0$ 有四个不相等的实数根 D. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x$

9. 已知 x 为实数, $A = \{2, x, x^2\}$, 集合 A 中有一个元素恰为另一个元素的 2 倍, 则实数 x 的个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

10. 已知定义域为 D 的函数 $f(x)$, 若对任意 $x \in D$, 存在正数 M , 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 是定义域为 D 上的“有界函数”. 已知下列函数:

(1) $f(x) = \frac{3+x}{4-x}$; (2) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; (3) $f(x) = \frac{5}{2x^2-4x+3}$; (4) $f(x) = x + \sqrt{4-x}$.

其中“有界函数”是 ()

- A. (1)(2) B. (2)(3) C. (2)(4) D. (3)(4)

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题(共 40 分)

11. $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$ 的定义域为 _____.

12. 已知 $x > 3$, 求 $y = x + \frac{4}{x-3}$ 的最小值 _____, 此时 $x =$ _____.

13. 已知函数 $f(x-1)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 _____.

14. 函数 $y = -x^2 + 2|x| + 3$ 的单调减区间是 _____, $f(f(-1)) =$ _____.

15. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(3x-1) = \frac{1}{2x}$, 则 $f(5) =$ _____, $f(x) =$ _____.

16. 已知命题 $p: |x-1| \geq 2, q: x^2 - 7x + 12 < 0$, 则 p 是 q 的 _____ (充分不必要, 必要不充分, 既不充分又不必要, 充要条件).

17. 若定义在 R 上的二次函数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ 在区间 $[0,2]$ 上是增函数,且 $f(m) \geq f(0)$,则实数 m 的取值范围是

_____.

18. 在直角坐标系 xOy 中, 对于点 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y')$, 给出如下定义:

若 $y' = \begin{cases} y(x \geq 0) \\ -y(x < 0) \end{cases}$, 则称点 Q 为点 P 的“可控变点”. 请问:

若点 P 在函数 $y = -x^2 + 16$ ($-5 \leq x \leq a$) 的图象上, 其“可控变点” Q 的纵坐标 y' 的取值范围是 $-16 < y' \leq 16$, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题(共 70 分)

19. (满分 12 分) 已知全集 $U = R$, 集合 $A = \{x | 2 < x < 9\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$.

(1) 求 $A \cap B$; $B \cup (C_U A)$;

(2) 已知集合 $C = \{x | a \leq x \leq 2 - a\}$, 若 $C \cup (C_U B) = R$, 求实数 a 的取值范围.

20. (满分 12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + (m-1)x + 4$, 其中 m 为常数.

(1) 若 $m=1$, 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性并用定义法证明奇偶性.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 求实数 m 的取值范围:

(3) 若 $\forall x \in R$, 都有 $f(x) > 0$, 求实数 m 的取值范围.

21. (满分 10 分) (1) 已知 $x, y \in R$, 证明: $2(x^4 + y^4) \geq (x^2 + y^2)^2$;

(2) 用反证法证明: 三个数中 $a, 2a^2 - 1, a + 1$, 至少有一个大于或等于 $-\frac{1}{6}$

22. (满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$

(1) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的单调性, 并用函数单调性的定义加以证明

(2) 求出函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 9]$ 上的最大值和最小值

(3) 画出函数图象并求出其值域

23. (满分 12 分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且 $f(1) = 1$ 若 $m, n \in [-1, 1], m \neq n$ 时, 有 $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} > 0$

(1) 解不等式 $f(x^2 - 1) + f(3 - 3x) < 0$

(2) 若 $f(x) \leq t^2 - 2at + 1$ 对 $\forall x \in [-1, 1], \forall a \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围

24. (满分 12 分) 已知有限集 X, Y , 定义集合 $X - Y = \{x | x \in X, \text{且 } x \notin Y\}$, $|X|$ 表示集合 X 中的元素个数.

(1) 若 $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{3, 4, 5\}$, 求集合 $X - Y$ 和 $Y - X$, 以及 $|(X - Y) \cup (Y - X)|$ 的值;

(2) 给定正整数 n , 集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, 对于实数集的非空有限子集 A, B , 定义集合 $C = \{x | x = a + b, a \in A, b \in B\}$

① 求证: $|A - S| + |B - S| + |S - C| \geq 1$;

② 求 $|(A - S) \cup (S - A)| + |(B - S) \cup (S - B)| + |(C - S) \cup (S - C)|$ 的最小值。