第一天

1. A 为 ΔDBC 内一点，E,G,F 分别是圆 DBC 、圆 DAB 、圆 DAC 上弧 BDC 、弧 ADB 、弧 ADC 的中点，求证：圆 BEG 、圆 CEF 、圆 BAC 三圆共点.

证明 设圆 BEG 与圆 CEF 不同于 E 的交点为 M，

则 $\angle BMC=\angle BGE+\angle CFE$，

$\angle BAC=\angle BGD+\angle CFD$.

要证点 M 在圆 BAC 上

$\Leftrightarrow \angle BMC=\angle BAC$

$\Leftrightarrow \angle EGD=\angle EFD$

$\Leftrightarrow D,E,G,F$ 四点共圆.

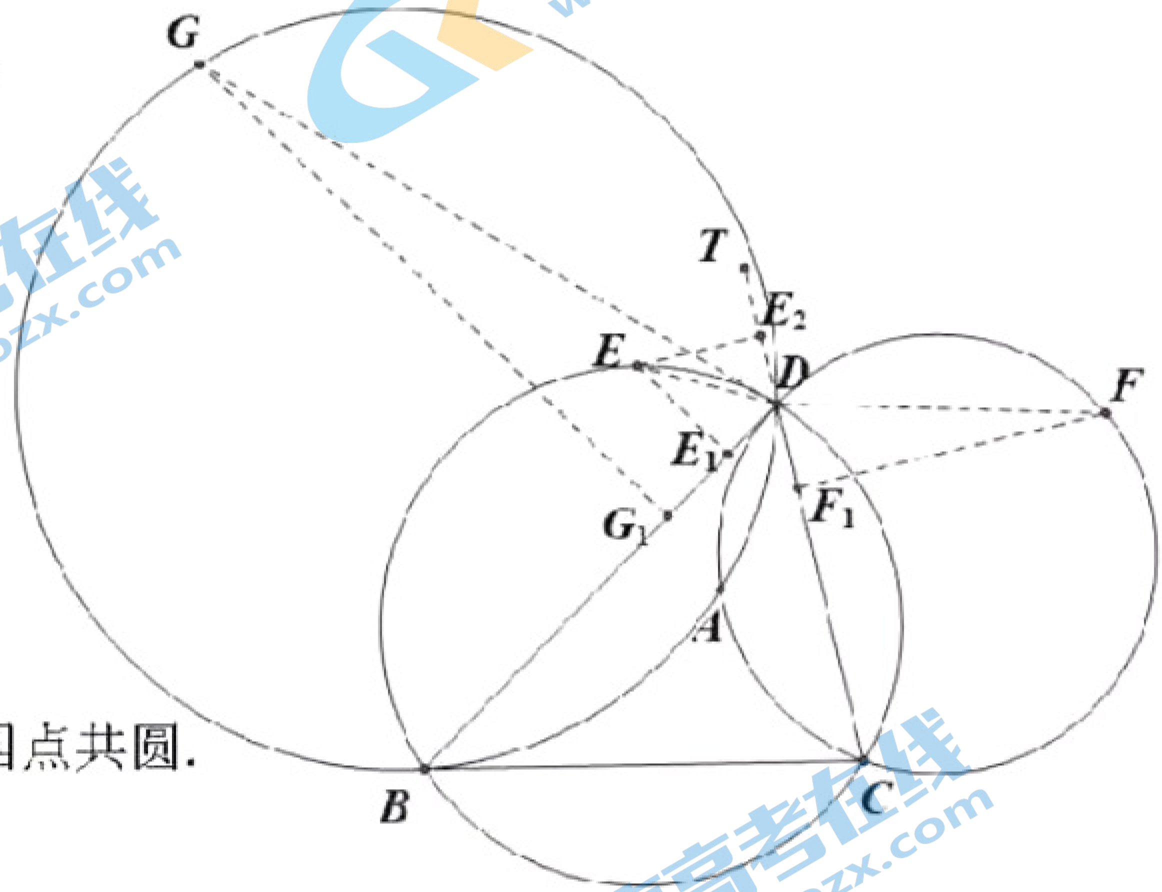


图 1

本题转化为证明 D,E,G,F 四点共圆.

由三弦定理可知需证：

$DG\sin\angle EDF=DF\sin\angle EDG+DE\sin\angle FDG(*)$.

作 $EE_1\perp DB$ 于点 E_1，$FF_1\perp DC$ 于点 F_1，$GG_1\perp DB$ 于点 G.

$\because \angle EDF=360^\circ-\angle EDB-\angle BDC-\angle FDC$

$=360^\circ-\angle ECB-\angle BDC-\angle FAC$

$=360^\circ-\left(90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle BEC\right)-\angle BDC-\left(90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle AFC\right)$

$=180^\circ+\dfrac{1}{2}\angle BDC+\dfrac{1}{2}\angle ADC-\angle BDC$

$=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle ADB$，

$\therefore DG\sin\angle EDF=DG\sin\left(180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle ADB\right)=DG\sin\dfrac{1}{2}\angle ADB=DG\cos\angle EDB=D$

同理可得 $DF\sin\angle EDG=DF_1, DE\sin\angle FDG=DE_1$.

在 CD 的延长线上取点 T，使得 $CT=BD$，作 $EE_2\perp DT$ 于点 E_2.

$\because BE=CE, BD=CT, \angle EBD=\angle ECD=\angle ECT$，

$\therefore \Delta BDE\cong\Delta CTE$，

$\therefore DE=TE$，

从而 E_2 是 TD 的中点，

于是 $DE_1=TE_1=\dfrac{1}{2}TD=\dfrac{1}{2}(TC-DC)=\dfrac{1}{2}(DB-DC)$.

同理可证：$DF_1=\dfrac{1}{2}(DC-DA), DG_1=\dfrac{1}{2}(DB-DA)$，

所以 $DF_1+DE_1=DG$，

从而 $DG\sin\angle EDF=DF\sin\angle EDG+DE\sin\angle FDG$，

$(*)$式成立.

2. 对 $\forall N\in\mathbf{N}^*$，存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{N}^*$，若满足其中连续若干项（含一项）之和都不能表示为 $2^i-2^j(i>j\geq 0)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}2^{a_i}>nN$.

解 设 $a_1,a_2,\cdots$ 都为正整数满足其中连续若干项（含一项）之和都不能表示为 $2^i-2^j(i>j\geq 0)$ 的形式. 记 $A_k=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\ (k=1,2,\cdots)$，则 $A_k\geq k$.

对于任意的正整数 k，考虑以下 $\sum\limits_{i=1}^{n}([\log_2 A_i]+1)$ 个数：

$A_1-2^0, A_1-2^1,\cdots, A_1-2^{[\log_2 A_1]}, A_2-2^0, A_2-2^1,\cdots, A_2-2^{[\log_2 A_2]},\cdots, A_k-2^0, A_k-2^1,$

$A_k-2^{[\log_2 A_k]}$. $(*)$

这 $\sum_{i=1}^{n}([\log_2 A_i]+1)$ 个数两两不同（否则会有 $A_{i_1}-2^{j_1}=A_{i_2}-2^{j_2}(i_1<i_2)$，于是 $A_{i_2}-A_{i_1}=2^{j_2}-2^{j_1}$，从而 $\sum_{r=i_1+1}^{i_2}a_r=2^{j_2}-2^{j_1}$ 矛盾），并且这些数中最大的数是 A_k-2^0，最小的数大于等于 0，由此可知 $(*)$ 中至多有 A_k 个数.

从而 $A_k\ge\sum_{i=1}^{k}([\log_2 A_i]+1)>\sum_{i=1}^{k}\log_2 A_i=\log_2 A_1A_2\cdots A_k\ge\log(k!)$. $(**)$

下面先证明：存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $\log_2(n!)>n\cdot\log_2 n$.

令 $f(m)=\log_2(m!)-m\log_2 N(m=1,2,\cdots)$，

则 $f(m+1)-f(m)=\log_2(m+1)-\log_2 N$.

当 $m\ge 2N$ 时，$f(m+1)-f(m)=\log_2(m+1)-\log_2 N>\log_2 2N-\log_2 N=1$，

于是 $f(2N+t)=f(2N)+\sum_{r=1}^{t}(f(2N+r)-f(2N+r-1))>f(2N)+t(t=1,2,\cdots)$.

取正整数 $t>|f(2N)|$，有 $f(2N+t)>0$，

所以存在正整数 n 使得 $f(n)>0$，即 $\log_2(n!)>n\log_2 N$，

取 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $\log_2(n!)>n\log_2 N$，则由 $(**)$ 式可得 $A_n>n\log_2 N$.

由均值不等式可得 $\sum_{i=1}^{n}2^{a_i}\ge n\cdot 2^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}=n\cdot 2^{\frac{A_n}{n}}>n\cdot 2^{\log_2 N}=n\cdot N$.

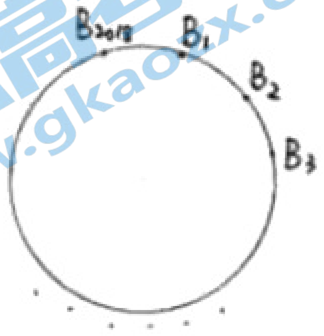
3. 圆周上有 2018 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2018}$，满足 $|a_{i+1}-a_i|\le 1(1\le i\le 2018)$，$a_{2019}=a_1$，求 $\sum_{i=1}^{2018}|a_i|-\left|\sum_{j=1}^{2018}a_j\right|$ 的最大值.

解 令 $b_i=a_i-\frac{1}{2018}\sum_{j=1}^{2018}a_j\ (i=1,2,\cdots,2018)$，

则 $\sum_{i=1}^{2018}|a_i|-\left|\sum_{j=1}^{2018}a_j\right|=\sum_{i=1}^{2018}\left(|a_i|-\frac{1}{2018}\left|\sum_{j=1}^{2018}a_j\right|\right)\le\sum_{i=1}^{2018}\left|a_i-\frac{1}{2018}\sum_{j=1}^{2018}a_j\right|=\sum_{i=1}^{2018}|b_i|$，且

$\sum_{i=1}^{2018} b_i = 0$，$|b_{i+1}-b_i| = |a_{i+1}-a_i| \le 1$.

下面在$|b_{i+1}-b_i| \le 1(1 \le i \le 2018)$，$b_{2018}=b_1$，$\sum_{i=1}^{2018} b_i = 0$的条件下，求$\sum_{i=1}^{2018} |b_i|$的最大值.



将$b_1,b_2,\cdots,b_{2018}$放在圆周上，b_i对应点B_i（如右图），则相邻两点上的数之差的绝对值小于或等于1.

设$b_1,b_2,\cdots,b_{2018}$中有x个数大于0，y个数小于或等于0，不妨设$x \le y$（否则可用$-b_i$代替b_i，$i=1,2,\cdots,2018$）.

记$S=\sum_{i=1}^{2018}|b_i|$，将$b_1,b_2,\cdots,b_{2018}$中所以大于0的数由小到大排列为$b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_x}$，则对于任意的$1 \le k \le x-2$有$b_{i_{k+2}} \le b_{i_k}+1$，理由如下：

考虑不含点$B_{i_{k+1}}$的弧$B_{i_k}B_{i_{k+2}}$，在该弧上的点（除$B_{i_{k+2}}$外）所对应的数均小于或等于b_{i_k}，于是有$b_{i_{k+2}} \le b_{i_k}+1$，特别地$b_{i_{2t+1}} \le b_{i_1}+t, b_{i_{2t+2}} \le b_{i_2}+t(t=0,1,\cdots)$.

另外，对于$b_{j_y} \le b_{j_{y-1}} \le \cdots \le b_{j_1} \le 0$，同前述证明也可得$|b_{j_{2t+1}}| \le |b_{j_1}|+t$，$|b_{j_{2t+2}}| \le |b_{j_2}|+t(t=0,1,\cdots)$.

由$x \le y, x+y=2018$可知，$x \le 1009$.

当$x \le 1008$时，$S=\sum_{i=1}^{2018}|b_i| = \sum_{b_i>0} b_i - \sum_{b_j \le 0} b_j = 2\sum_{b_i>0} b_i = 2\sum_{k=1}^{x} b_{i_k} \le 2 \times 2 \times \sum_{r=1}^{504} r = 509040$.

（由$b_{i_1} \le 1, b_{i_2} \le 2, b_{i_{2t+1}} \le b_{i_1}+t=t+1, b_{i_{2t+2}} \le b_{i_2}+t=t+1, t=0,1,\cdots$所得）

当$x=1009$时，存在$1 \le r_1,r_2 \le 2018, r_1 \ne r_2$使得$b_{r_1}>0 \ge b_{r_1+1}, b_{r_2} \le 0 < b_{r_2+1}$，于是

$|b_{r_1}|+|b_{r_1+1}| = b_{r_1}-b_{r_1+1} \le 1, |b_{r_2}|+|b_{r_2+1}| = b_{r_2}-b_{r_2+1} \le 1$，

所以$(|b_{r_1}|+|b_{r_2+1}|)+(|b_{r_1+1}|+|b_{r_2}|) \le 2$，从而$|b_{r_1}|+|b_{r_2+1}|$与$|b_{r_1+1}|+|b_{r_2}|$中必有一个数小于或等于1.不妨设$|b_{r_1}|+|b_{r_2+1}| \le 1$，则由前述证明可知：

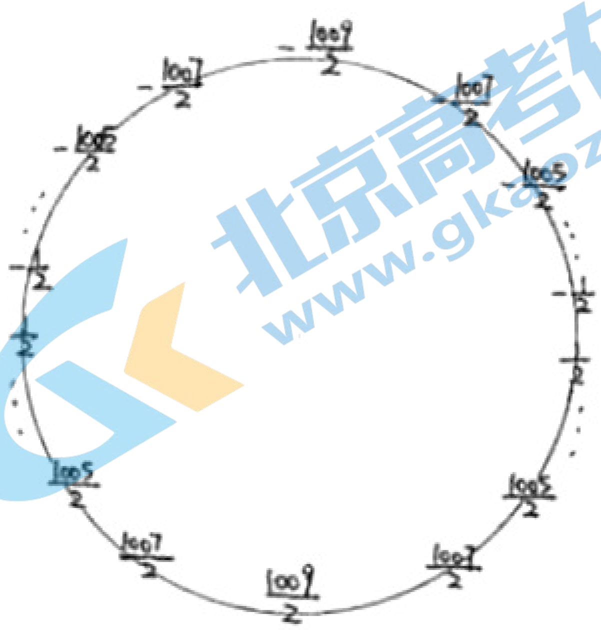
$$S=2\sum_{b_i>0}b_i\le 2\left(\sum_{t=0}^{504}\left(\left|b_{r_1}\right|+t\right)+\sum_{t=0}^{503}\left(\left|b_{r_2+1}\right|+t\right)+\min\left\{\left|b_{r_1}\right|,\left|b_{r_2+1}\right|\right\}+504\right)$$

$$=2\left(504\left(\left|b_{r_1}\right|+\left|b_{r_2+1}\right|\right)+\sum_{t=0}^{503}2t+\min\left\{\left|b_{r_1}\right|,\left|b_{r_2+1}\right|\right\}+504\right)$$

$$\le 2\times\left(504+503\times 504+\frac{1}{2}+504\right)$$

$$=509041.$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_{2018}$ 按如下方式排列时，S 可取到 509041.



另外，当 $b_1,b_2,\cdots,b_{2018}$ 取定后，$S=509041$，再令 $a_i=b_i\left(i=1,2,\cdots,2018\right)$，

则 $\sum_{i=1}^{2018}\left|a_i\right|-\left|\sum_{i=1}^{2018}a_i\right|=509041$.

4. 求最大正实数 c，对任意和为正整数的正实数 a,b 有

$$\left\{a^2\right\}+\left\{b^2\right\}\le 2-\frac{c}{(a+b)^2}.$$

解 c 的最大值是 $\frac{3}{4}$.

先证明：对任意和为正整数的正实数 a,b 有 $\left\{a^2\right\}+\left\{b^2\right\}\le 2-\frac{3}{4(a+b)^2}$ (*).

设 $a+b=n$（n 为正整数），不妨设 $a\le b$.

当 $a=b$ 时，$\left\{a^2\right\}+\left\{b^2\right\}=2\times\left\{\frac{n^2}{4}\right\}\le 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}<2-\frac{3}{4n^2}$.

$\{a^2\}+\{b^2\}=2\alpha+1-\left(\sqrt{q^2+\beta}-q\right)$. $(*)$式$\Leftrightarrow 1-2\alpha+\left(\sqrt{q^2+\beta}-q\right)\geq\frac{3}{4n^2}$. ④

若$\alpha\leq 1-\frac{3}{4n^2}$，则$1-2\alpha+\left(\sqrt{q^2+\beta}-q\right)>1-2\alpha+\alpha=1-\alpha\geq\frac{3}{4n^2}$，④式成立.

若$\alpha>1-\frac{3}{4n^2}$，可设$\alpha=1-\frac{x}{n^2},0<x<\frac{3}{4}$，则由$\alpha<\sqrt{q^2+\beta}-q\Rightarrow\beta>\alpha^2+2\alpha q$，

从而$\beta>\alpha^2+2\alpha q=\left(1-\frac{x}{n^2}\right)^2+2\left(1-\frac{x}{n^2}\right)q=2q+1-\frac{2x(q+1)}{n^2}+\frac{x^2}{4^4}$.

设$t=2q+1-\beta$，则$0<t<\frac{2x(q+1)}{n^2}-\frac{x^2}{n^4}<\frac{2x(q+1)}{n^2}\leq 2x$.（这是由③式所得）

将$\alpha=1-\frac{x}{n^2},\beta=2q+1-t$，代入①式可得$4n^2\left(k+1-\frac{x}{n^2}\right)=(q+1)^2-t$，

所以有$4n^2(k+1)-(q+1)^2=4x-t$，

而$0<4x-t<4x<3$，于是$0<4n^2(k+1)-(q+1)^2<3$. ⑤

而$4n^2(k+1)-(q+1)^2\equiv-(q+1)^2\equiv 0,3(\bmod 4)$，所以⑤不成立，

那么只可能有$\alpha\leq 1-\frac{3}{4n^2}$.

综合（1）（2）可知$(*)$式成立.

再证明$c\leq\frac{3}{4}$，考虑方程$m^2-12n^2=-3$，它有一组正整数解$(m,n)=(3,1)$.

由佩尔方程知识可知该方程有无穷多组正整数解(m,n).

取(m,n)是方程$m^2-12n^2=-3$的一组正整数解，且m,n充分大.

令$a^2=3-\frac{\alpha}{n^2},b^2=3+n^2-m-\frac{\beta}{n^2}$满足$a+b=n,\alpha,\beta>0$待定，

则$n=a+b<\sqrt{3-\frac{\alpha}{n^2}}+\sqrt{3+n^2-m}\Rightarrow n^2<n^2+6-m-\frac{\alpha}{n^2}+2\sqrt{\left(3-\frac{\alpha}{n^2}\right)(3+n^2-m)}$

$$\Rightarrow\left(m+\frac{\alpha}{n^2}-6\right)^2<4\left(9+3n^2-3m-\frac{3\alpha}{n^2}-\alpha+\frac{\alpha m}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow m^2-12n^2+\frac{\alpha^2}{n^4}<\frac{2\alpha m}{n^2}-4\alpha$$

$$\Rightarrow\alpha<\frac{3}{4}+\frac{\alpha m}{2n^2}-\frac{\alpha^2}{4n^4}.$$

所以当$\beta \to 0^+, n \to +\infty$时$\alpha \to \frac{3}{4}$，此时$\alpha+\beta \to \frac{3}{4}$，$\{a^2\}+\{b^2\}=2-\frac{\alpha+\beta}{n^2}$，

所以$c \le \frac{3}{4}$.

第二天

1. 已知$a>2, n\in \mathbf{N}^*, j\in \mathbf{N}$且$j\le n$，求证：$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-j}a^{-k^2+2kj}>0$.

解 引理：已知$a>2, m\in \mathbf{N}^*$，则$S_m=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i a^{-i^2}>0$.

证明：当m为奇数时，设$m=2k+1, k\in \mathrm{N}$，

则$S_{2k+1}=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^i a^{-i^2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a^{i^2}}\right)+\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{a^{(2i)^2}}-\frac{1}{a^{(2i+1)^2}}\right)$

$$=\frac{a-2}{a}+\sum_{j=1}^{k}\frac{a^{(2j+1)^2}-a^{(2j)^2}}{a^{(2j)^2}\cdot a^{(2j+1)^2}}>0.$$

当m为偶数时，设$m=2k, k\in \mathbf{N}^*$，则$S_{2k}>S_{2k+1}>0$.

引理得证！

回到本题，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-j}a^{-k^2+2kj}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-j}a^{-(k-j)^2+j^2}=a^{j^2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-j}a^{-(k-j)^2}$

$$=a^{j^2}\sum_{i=-j}^{n-j}(-1)^i a^{-i^2}=a^{j^2}\left(S_j+S_{n-j}\right).$$

（其中$S_0=\frac{1}{2}, S_j=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{j}(-1)^i a^{-i^2}$，$S_{n-j}=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-j}(-1)^i a^{-i^2}$）

由引理以及$S_0=\frac{1}{2}>0$，可知$S_j>0, S_{n-j}>0$，

所以$a^{j^2}\left(S_j+S_{n-j}\right)>0$，

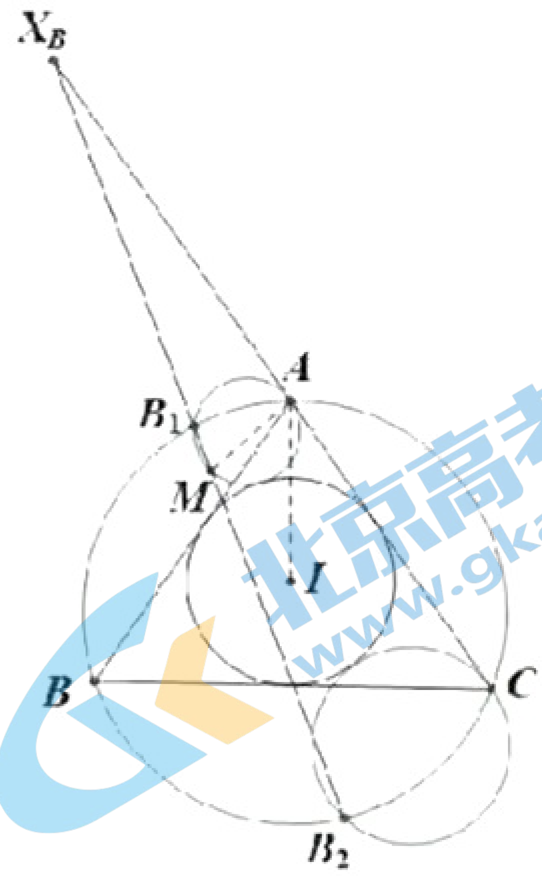
从而$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-j}a^{-k^2+2kj}>0$.

2. 给定ΔABC内切圆为圆I，记过点A且与AC、圆I相切的圆

另外一个交点为B_1，记过点C且与AC、圆I相切的圆ABC的另外一个交点为B_2，

设B_1B_2与AC交于X_B，类似的定义X_A,X_C，证明：X_A,X_B,X_C三点共线.

证明 记过点A且与AC、圆I相切的圆为圆ω_{A-AC}，半径为r_{A-AC}，类似的定义$\omega_{C-AC},\omega_{B-BA},\omega_{A-BA},\omega_{C-CB},\omega_{B-CB},r_{C-AC},r_{B-BA},r_{A-BA},r_{C-CB},r_{B-CB}$.



设B_1B_2与圆ω_{A-AC}交于不同B_1的点为M.

$\because X_BA^2=X_BB_1\cdot X_BM,X_BA\cdot X_BC=X_BB_1\cdot X_BB_2$，

$\therefore \dfrac{X_BA}{X_BC}=\dfrac{X_BM}{X_BB_2}\Rightarrow AM\ /\!/\ CB_2$，

由此可知圆ω_{A-AC}与圆ω_{C-AC}的位似中心为X_B，

所以$\dfrac{X_BC}{X_BA}=\dfrac{r_{C-AC}}{r_{A-AC}}$.

同理可证：$\dfrac{X_CA}{X_CB}=\dfrac{r_{A-BA}}{r_{B-BA}},\dfrac{X_AB}{X_AC}=\dfrac{r_{B-CB}}{r_{C-CB}}$.

设圆ω_{A-AC}的圆心为O_1，圆ω_{A-BA}的圆心为O_2.

$\therefore \angle O_1AI=90^\circ-\angle IAC=90^\circ-\angle IAB=\angle O_2AI$，且圆$\omega_{A-AC}$、圆$\omega_{A-BA}$都与圆$I$外切，

$\therefore$圆ω_{A-AC}、圆ω_{A-BA}关于AI对称，从而$r_{A-AC}=r_{A-BA}$，

同理可得$r_{B-BA}=r_{B-CB}, r_{C-AC}=r_{C-CB}$，

$\therefore \dfrac{X_BC}{X_BA}\cdot\dfrac{X_CA}{X_CB}\cdot\dfrac{X_AB}{X_AC}=1$，根据梅涅劳斯逆定理可知$X_A, X_B, X_C$三点共线.

3. 已知$a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$是$0,1,\cdots,p-1$的一个排列. $p\geq 5$为素数，若$a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$满足$x$取遍模$p$的完系时，$\sum\limits_{i=1}^{p-1} a_i x^i$取遍模$p$的完系，则称$a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$为“好排列”. 求证：“好排列”的个数不小于$2(p-1)$个.

证明 先证明：$(1,2,3,\cdots,p-1,0)$, $(1,p-1,p-2,\cdots,2,0)$是“好排列”. (*)

记$S_x=1+2x+3x^2+\cdots+(p-1)x^{p-2}$， ①

则$xS_x=x+2x^2+3x^3+\cdots+(p-1)x^{p-1}$， ②

②-①得$(x-1)S_x=(p-1)x^{p-1}-\left(1+x+\cdots+x^{p-2}\right)$

$=(p-1)x^{p-1}-\dfrac{x^{p-1}-1}{x-1}$ ③

对于任意$x\in\{0,1,\cdots,p-1\}$，当$x\neq 0,1$时，由③式以及费马小定理可知

$(x-1)S_x\equiv -1(\bmod p), S_0=1, S_1=\dfrac{1}{2}p(p-1)\equiv 0(\bmod p)$.

由此可知，对于任意$x, y\in\{0,1,\cdots,p-1\}$且$x\neq y$都有$S_x\not\equiv S_y(\bmod p)$，

所以当x取遍集合$\{0,1,\cdots,p-1\}$中的元素时，S_x构成模p的完系，

从而而$(1,2,3,\cdots,p-1,0)$是“好排列”.

记$T_x=1+(p-1)x+(p-2)x^2+\cdots+2x^{p-2}$， ④

则$xT_x=x+(p-1)x^2+(p-2)x^3+\cdots+2x^{p-1}$， ⑤

⑤-④得$(x-1)T_x=2x^{p-1}-1-(p-2)x+x^2+x^3+\cdots+x^{p-2}$

$=2\left(x^{p-1}-1\right)-(p-1)x+\left(1+x+x^2+\cdots+x^{p-2}\right)$

$$=2\left(x^{p-1}-1\right)-(p-1)x+\frac{x^{p-1}-1}{x-1} \qquad ⑥$$

对于任意$x\in\{0,1,\cdots,p-1\}$，当$x\neq 0,1$时，由⑥式和费马小定理可知

$(x-1)T_x\equiv -1(\bmod p),T_0=1,T_1=\frac{1}{2}p(p-1)\equiv 0(\bmod p)$.

由此可知，对于任意$x,y\in\{0,1,\cdots,p-1\}$且$x\neq y$都有$T_x\not\equiv T_y(\bmod p)$，

所以当x取遍集合$\{0,1,\cdots,p-1\}$中的元素时，T_x构成模p的完系.

从而$(1,p-1,p-2,\cdots,2,0)$是“好排列”.

另外，注意到若$\{a_0,a_1,\cdots,a_{p-1}\}$是“好排列”，则对于任意$k\in\{1,2,\cdots,p-1\}$，

$(ka_0,ka_1,\cdots,ka_{p-1})(\bmod p)$也是“好排列”，并且这$p-1$个“好排列”两两不同.

再由前述$(*)$中的两个“好排列”可得到$2(p-1)$个两两不同的“好排列”.

于是，“好排列”的个数不小于$2(p-1)$个.

4. 已知$f:\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}^{+}$，满足对$\forall x,y>0$有$f(x+y)=f(y)f(xf(y))\ (*)$，求所有的$f$.

解 所求$f(x)=\frac{1}{1+cx}$（其中c为常数，且$c\geq 0$）.

当$f(x)$为常函数时，可设$f(x)=r$，则有$r=r^2$，而由$r>0$可知$r=1$.

下面考虑$f(x)$不为常函数的情况，即$f(x)$不恒等于1，那么存在$u>0$有$f(u)\neq 1$.

先证明：$f(x)$是单射.

假设$f(x)$不是单射，则存在$a>b>0$使得$f(a)=f(b)$.

于是，有$f(x+a)=f(a)f(xf(a))=f(b)f(xf(b))=f(x+b)$对$\forall x>0$均成立，

所以$f(x)$是以$a-b$为周期的函数.

选取整数k使得$\frac{u+k(a-b)}{f(u)-1}>0$，这是可以办到的.

若$f(u)>1$，可取$k=0$，若$f(u)<1$可取整数$k<-\frac{u}{a-b}$.

在$(*)$式中取$x=\frac{u+k(a-b)}{f(u)-1},y=u$，

那么由$xf(y)-(x+y)=\frac{[u+k(a-b)]f(u)}{f(u)-1}-\frac{u+k(a-b)}{f(u)-1}-u=k(a-b)$，

可知$f(xf(y))=f(x+y)$，从而$f(u)=1$，这与$f(u)\neq 1$矛盾，

故假设不成立，$f(x)$是单射.

记$f(1)=m>0$，

在$(*)$中，用$\frac{x}{m},1$代替x,y可得$f\left(\frac{x}{m}+1\right)=mf(x)$，$\forall x>0$. ①

在$(*)$中，用$\frac{1}{f(x)},x$代替x,y可得

$f\left(\frac{1}{f(x)}+x\right)=f(x)\cdot f(1)=mf(x)$，$\forall x>0$. ②

由①②式可得$f\left(\frac{x}{m}+1\right)=f\left(\frac{1}{f(x)}+x\right)$，再由$f(x)$是单射可知：

$\frac{x}{m}+1=\frac{1}{f(x)}+x$，$\forall x>0$，即$f(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{m}-1\right)x}$.

令$c=\frac{1}{m}-1$，当$c<0$时，取$x>\frac{1}{|c|}$，则$1+cx=1-|c|\cdot x<0$，此时$f(x)<0$，

所以$c\geq 0$，而当$c=0$时，$f(x)$恒等于1.

当$c>0$时$f(x)=\frac{1}{1+cx}$，代入$(*)$式中符合题意，

故$f(x)=\frac{1}{1+cx}$（c为常数，且$c\geq 0$）.