𝕀号卷·A10联盟2022届高三四月期中考

理科数学参考答案

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	A	D	C	B	C	C	B	A	A

1. D 由题意得，$A=\left\{x\middle|x\geqslant\frac{3}{2}\right\}$，$B=\{x|x<4\}$，故$A\cap B=\left[\frac{3}{2},4\right)$. 故选D.

2. A $\because\frac{5}{-3-i}=-\frac{5}{3+i}=-\frac{5(3-i)}{(3+i)(3-i)}=-\frac{5(3-i)}{10}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$，$\therefore a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，则$a-b=-2$. 故选A.

3. B 由两图可知，2021年全国居民人均可支配收入为35128元，比上年实际增长8.1%，故A错误；2021年全国居民人均消费支出，食品烟酒和居住占比为29.8%+23.4%=53.2%，超过50%，其他用品及服务占比最小，故C，D错误；B正确. 故选B.

4. A 由题意得，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$，$a_6=8$，$a_7=13$，$a_8=21$，$a_9=34$，$a_{10}=55$，$a_{11}=89$，$a_{12}=144$，$a_{13}=233$，$\cdots$，故$b_1=1$，$b_2=1$，$b_3=2$，$b_4=3$，$b_5=1$，$b_6=0$，$b_7=1$，$b_8=1$，$b_9=2$，$b_{10}=3$，$b_{11}=1$，$b_{12}=0$，$b_{13}=1$，$\cdots$，故数列$\{b_n\}$的周期为6，则$b_{2022}=b_6=0$. 故选A.

5. D $\because f(x)=2\sin x+f'(0)\cos x$，$\therefore f'(x)=2\cos x-f'(0)\sin x$，$\therefore f'(0)=2$，$\therefore f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}$，即曲线$y=f(x)$在点$\left(\frac{3\pi}{4},f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$处的切线的斜率为$-2\sqrt{2}$. 故选D.

6. C 设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，MN的中点为(x_0,y_0)，由$|MN|=x_1+x_2+p=x_1+x_2+2=10$，解得$x_1+x_2=8$，$\therefore x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=4$，即线段$MN$的中点到$y$轴的距离为4. 故选C.

7. B 由题意得，$x+y=-\lg 7+\frac{1}{2}\lg 7=-\frac{1}{2}\lg 7<0$，故命题$q$为假，

$x+y-xy=-\frac{1}{2}\lg 7+\frac{1}{2}(\lg 7)^2=\frac{1}{2}\lg 7(\lg 7-1)<0$，故命题$p$为真，

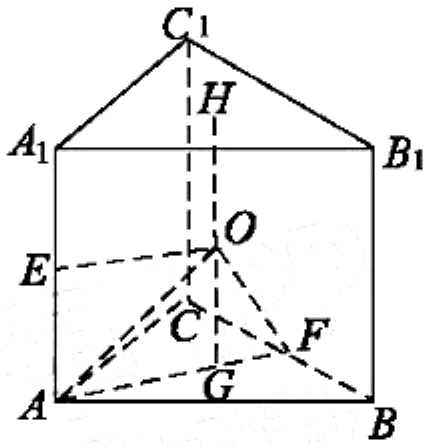
则$p\wedge(\neg q)$为真命题，$p\wedge q$，$(\neg p)\vee q$，$(\neg p)\wedge(\neg q)$均为假命题. 故选B.

8. C 甲、乙、丙、丁4名志愿者，被随机分配到北京和张家口赛区参加冬奥服务工作，

要求每个赛区至少一人，每人只分配到一个赛区，共有$2^4-2=14$种分配方案. 把甲、乙两人看作一个整体，4个人看成3个元素，再把这3个元素分成2堆，每堆至少有1个人，然后分配到两个赛区，共有$C_3^2A_2^2=6$种分配方案，则甲、乙在同一赛区的概率为$\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$. 故选 C.

9. C　由题意得，$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x+2\cos\omega x=4\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-4,4]$，又$f(m)f(n)=16$，所以$f(m),f(n)$同为最大值或者最小值，$\therefore\frac{3T}{2}=\frac{3\pi}{\omega}\leqslant 3$，解得$\omega\geqslant\pi$，$\because\omega\in\mathbf{N}^*$，故$\omega$的最小值为$4$，故选 C.

10. B　如图，设上、下底面的中心分别为H,G，球O的半径为R，由对称性可知，O为HG的中点，连接OA，设$AB=a,AA_1=h$，则$3ah=24\sqrt{3}$，即$ah=8\sqrt{3}$.
$R^2=OA^2=AG^2+OG^2=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{4}h^2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{1}{4}h^2}=8$，当且仅当$a=2\sqrt{3}$，$h=4$时取等号，此时球$O$的表面积的最小值为$32\pi$. 故选B.



11. A　$\because f(x)=\log_2\left(4^x+1\right)-x=\log_2\left(2^x+2^{-x}\right)$，$\therefore f(-x)=\log_2\left(2^{-x}+2^x\right)=f(x)$，$\therefore f(x)$为偶函数，$\therefore a=f\left(\ln\frac{1}{3}\right)=f(\ln 3)$，易知$y=2^x+2^{-x}$在$(0,+\infty)$上是增函数，又$y=\log_2 x$为增函数，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，$\because\ln 3>\ln e=1$，$0<\lg 5<\lg 10=1$，$0<\log_6 3<\log_6 6=1$，$\because\lg 5=\frac{\log_2 5}{\log_2 10}=\frac{\log_2 5}{1+\log_2 5}$，$\log_6 3=\frac{\log_2 3}{\log_2 6}=\frac{\log_2 3}{1+\log_2 3}$，$\therefore$构造函数$g(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}(x>0)$，显然函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$\because\log_2 5>\log_2 3>0$，$\therefore\lg 5>\log_6 3$，$\therefore\ln 3>\lg 5>\log_6 3$，$\therefore c<b<a$. 故选 A.

12. A　设$N(x,y)$，$M(x_0,y_0)$，$\because\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OF_2}=\overrightarrow{ON}$，$\therefore(x_0,y_0)+(2,0)=(x,y)$，$\therefore x_0=x-2$，$y_0=y$，又$M(x_0,y_0)$在圆上满足$(x_0+2)^2+(y_0-4)^2=4$，故$(x-2+2)^2+(y-4)^2=4$，整理得$x^2+(y-4)^2=4$，故$N(x,y)$在圆$x^2+(y-4)^2=4$上；结合图象可知，当两条渐近线与该圆恰好相切时为临界状态，

此时圆心$(0,4)$到$bx-ay=0$的距离$d=\dfrac{|-4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，解得$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，故当

$e=\dfrac{c}{a}\geqslant\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=2$时满足题意，故选 A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13. 3

由题意得，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=17$，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，

则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{4+9-4}=3$.

14. $168+6\pi$

由三视图知，该几何体为长方体内挖去一个圆锥，∴该几何体的表面积

$S=(36+24+24)\times2-9\pi+\dfrac{1}{2}\times5\times6\pi=168+6\pi$.

15. -51

当$n=1$时，$2a_1=a_1^2+a_1$，∵$a_n>0$，∴$a_1=1$；当$n\geqslant2$时，$2S_n=a_n(a_n+1)$，$2S_{n-1}=a_{n-1}(a_{n-1}+1)$，两式相减，得$2a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+a_n-a_{n-1}$，则$(a_n-a_{n-1}-1)(a_n+a_{n-1})=0$，∴$a_n-a_{n-1}-1=0$，∴数列$\{a_n\}$是以1为首项，以1为公差的等差数列，∴$a_n=n$，∴数列$\{(-1)^n a_n\}$的前101项的和为$-1+2-3+4+\cdots-99+100-101=-51$.

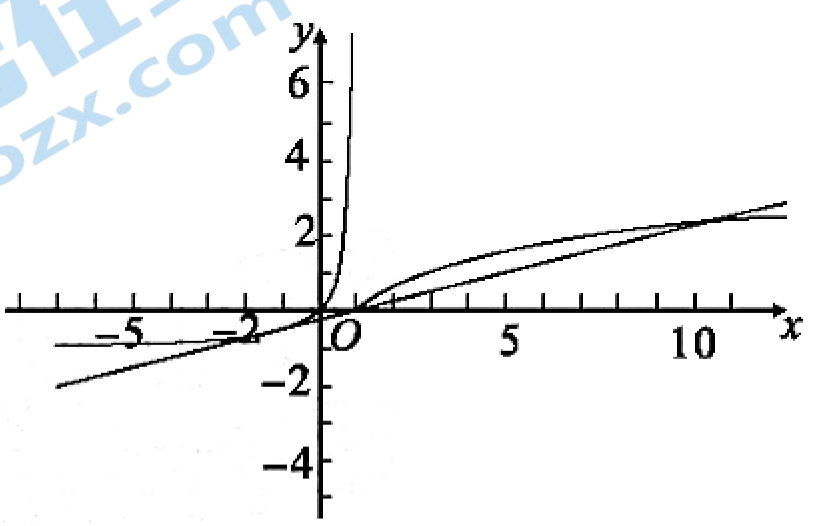
16. $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$

令$g(x)=0$，即$f(x)=k(x-1)$；作出函数$f(x)$的大致图象如图所示，观察可知，

临界状态为曲线$y=\dfrac{1}{1-x}-1$与直线$y=k(x-1)$相切，联立$\begin{cases}y=k(x-1)\\ y=\dfrac{x}{1-x}\end{cases}$，得

$k(x-1)^2+x=0$，即$kx^2-(2k-1)x+k=0$，令$\Delta=(2k-1)^2-4k^2=0$，解得

$k=\dfrac{1}{4}$，结合图象可知，若函数$g(x)$有4个零点，则实数k的取值范围为$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.



$E(Y)=0\times\frac{1}{9}+50\times\frac{7}{18}+100\times\frac{7}{18}+150\times\frac{1}{9}=75$，……………………10 分

记丙回答问题所获得的图书换购券金额为 Z，则 $E(Z)=3\times\frac{2}{3}\times50=100$，…11 分

$\because E(Y)<E(X)<E(Z)$，故可以估计乙获得图书换购券的金额最少. ……12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$EA=EP=EC$，$FA=FP=FB$，$\therefore AP\perp PC$，$AP\perp PB$，

又 $PB\cap PC=P$，$\therefore AP\perp$ 平面 PBC，$\therefore AP\perp BC$.

$\because AC\perp BC$，$AP\cap AC=A$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC. ……………………4 分

（Ⅱ）$\because E,F$ 分别为 AC，AB 的中点，$\therefore BC//EF$，$\therefore EF\perp$ 平面 PAC.

由（Ⅰ）知，$AP\perp PC$，$\therefore PC=\sqrt{AC^2-AP^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore\angle PAC=30^\circ$，$\triangle PEC$ 为等边三角形. ……………………6 分

以点 E 为坐标原点，以 EA,EF,EG 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系如图所示，

则 $E(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(-\sqrt{3},2,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$F(0,1,0)$，

$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore\overrightarrow{EF}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{EP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$. ……………………8 分

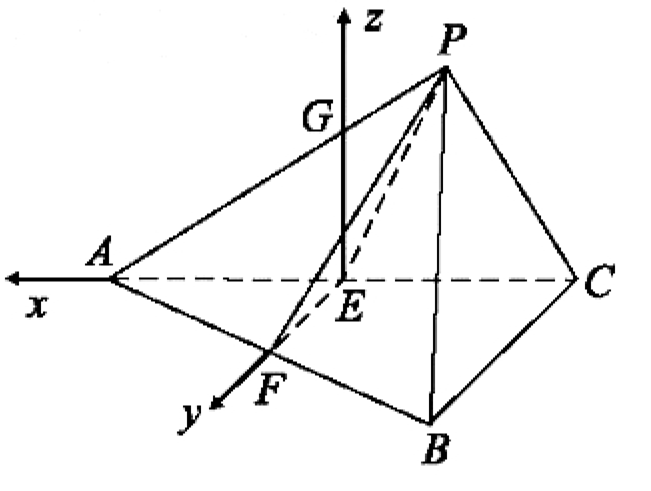
设平面 PEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=y=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EP}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,1)$；

由（Ⅰ）知，$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ 为平面 PBC 的一个法向量，……………………10 分

设平面 PBC 与平面 PEF 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AP}|}=\frac{\left|-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{3+1}\times\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}}=\frac{1}{2}$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$，



即平面 PBC 与平面 PEF 所成锐二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$. ……………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=4 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=2\sqrt{2} \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$，

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ·················4 分

（Ⅱ）联立$\begin{cases} y=kx+t \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，整理得$\left(2k^2+1\right)x^2+4ktx+2t^2-8=0$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\dfrac{-4kt}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2t^2-8}{2k^2+1}$，

$\therefore\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{t^2-4}{2kt}$. ··············7 分

设点$D(x_2,3)$，则直线 AD 的方程为$y-3=\dfrac{y_1-3}{x_1-x_2}(x-x_2)$，

令$x=0$，得

$$y=\frac{-x_2y_1+3x_2}{x_1-x_2}+3=\frac{3x_1-x_2y_1}{x_1-x_2}=\frac{3x_1-x_2\left(kx_1+t\right)}{x_1-x_2}=\frac{3x_1-tx_2-kx_1x_2}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{3x_1-tx_2+\dfrac{t^2-4}{2t}(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\left(3+\dfrac{t^2-4}{2t}\right)x_1-\left(t-\dfrac{t^2-4}{2t}\right)x_2}{x_1-x_2}$$ ··············10 分

$\because$直线 AD 与 y 轴的交点为定点，$\therefore 3+\dfrac{t^2-4}{2t}=t-\dfrac{t^2-4}{2t}$，解得$t=\dfrac{4}{3}$，

此时$Q\left(0,\dfrac{13}{6}\right)$. ············12 分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x+1+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2\ln x+x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{\left(x^2-1\right)\ln x+\left(x^2+1\right)}{x^2},$$

·················2 分

当$x\in(0,1)$时，$\left(x^2-1\right)\ln x>0$，当$x\in[1,+\infty)$时，$\left(x^2-1\right)\ln x\geqslant 0$，……3 分

$\therefore f'(x)=\dfrac{(x^2-1)\ln x+(x^2+1)}{x^2}\geqslant\dfrac{x^2+1}{x^2}>0$，………………4 分）

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；………………5 分

（Ⅱ）$\dfrac{2f(x)-m}{e^{mx}}\leqslant m\Rightarrow 2f(x)\leqslant me^{mx}+m\Rightarrow m(e^{mx}+1)\geqslant 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x$

$\Rightarrow mx(e^{mx}+1)\geqslant(x^2+1)\ln x^2\Rightarrow(e^{mx}+1)\ln e^{mx}\geqslant(x^2+1)\ln x^2$. ………………6 分

设函数 $g(x)=(x+1)\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=1+\ln x+\dfrac{1}{x}$，………………7 分

设函数 $\varphi(x)=1+\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，………………8 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，

则 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………………9 分

$\therefore g'(x)\geqslant g'(1)=2$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore e^{mx}\geqslant x^2$.

两边取自然对数，得 $\dfrac{m}{2}\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ………………10 分

设 $F(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $F'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$F'(x)>0$；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，

则 $F(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore F(x)\leqslant F(e)=\dfrac{1}{e}$，…11 分

$\therefore\dfrac{m}{2}\geqslant\dfrac{1}{e}$，即 $m\geqslant\dfrac{2}{e}$，故实数 m 的取值范围为 $\left[\dfrac{2}{e},+\infty\right)$. ………………12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）由题意得，直线 l 的普通方程为 $x+\sqrt{3}y-6=0$，

其极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-6=0$，即 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=3$. …………3 分

$\because\rho=2\cos\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\rho^2=2\rho\cos\alpha$，

$\therefore x^2+y^2=2x$，即 $(x-1)^2+y^2=1(y>0)$. ………………5 分

（Ⅱ）设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

由（Ⅰ）知，$|OM|=\rho_1=\dfrac{6}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$，$|ON|=\rho_2=2\cos\theta$，…………6 分

$$\therefore \frac{|OM|}{|ON|}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{6}{2\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}=\frac{6}{1+\cos2\theta+\sqrt{3}\sin2\theta}$$

$$=\frac{6}{1+2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$$，…………8 分

$\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，$\therefore -\frac{1}{2}<\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

当$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，即$\theta=\frac{\pi}{6}$时，$\frac{|OM|}{|ON|}$取得最小值2．………………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

（Ⅰ）由题意得，$f(x)=\begin{cases}-3x+6, x\leqslant\frac{1}{2}\\ x+4, \frac{1}{2}<x<5\\ 3x-6, x\geqslant 5\end{cases}$，………………3 分

$\therefore f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$，则$m=\frac{9}{2}$．………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a+b=3$，

由$a\geqslant0,b\geqslant0$知$a+1>0,b+2>0$，$a+1+b+2=6$，………………7 分

$$\therefore \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}=\frac{1}{6}[(a+1)+(b+2)]\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(2+\frac{b+2}{a+1}+\frac{a+1}{b+2}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{6}(2+2)=\frac{2}{3},$$

当且仅当$a+1=b+2$，即$a=2$，$b=1$时，等号成立．………………10 分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。