

高三数学试卷

2020.11

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

(1) 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{-1, 0, 1, 2\}$ (C) $\{0, 1, 2\}$ (D) $\{0, 1, 2, 3\}$

(2) 已知 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2x =$

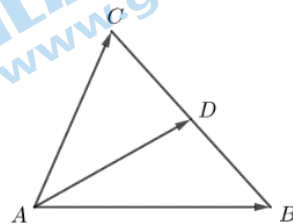
- (A) $\frac{12}{25}$ (B) $\frac{24}{25}$ (C) $-\frac{12}{25}$ (D) $-\frac{24}{25}$

(3) 已知 $a = 2^{\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则

- (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $c > a > b$ (D) $c > b > a$

(4) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点. 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} =$

- (A) $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ (B) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$
(C) $-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ (D) $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$

(5) “ $\ln a > \ln b$ ” 是 “ $3^a > 3^b$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(6) 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的图象与直线 $y=1$ 的相邻两个交点间的距离等于 π ,

则 $f(x)$ 的图象的一条对称轴是

(A) $x = -\frac{\pi}{12}$

(B) $x = \frac{\pi}{12}$

(C) $x = -\frac{\pi}{3}$

(D) $x = \frac{\pi}{3}$

(7) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $AC=3$, 且 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} =$

(A) -12

(B) -9

(C) 9

(D) 12

(8) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x) = 2^x + \frac{1}{3}$, 则 $f(\log_2 \frac{3}{2}) =$

(A) $\frac{1}{3}$

(B) 1

(C) $\frac{7}{6}$

(D) $\frac{11}{6}$

(9) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -7 \leq x < e^{-2}, \\ \ln x, & e^{-2} \leq x \leq e. \end{cases}$ 若存在实数 m , 使得 $f(m) = 2a^2 - 4a$ 成立, 则实数 a 的取值

范围是

(A) $[-1, +\infty)$

(B) $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

(C) $[-1, 3]$

(D) $(-\infty, 3]$

(10) 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 且 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数. 若对任意 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 都有

$f'(x) \cos x + f(x) \sin x < 0$, 则满足 $f(\theta) < 2 \cos \theta \cdot f(\frac{\pi}{3})$ 的 θ 的取值范围是

(A) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$

(B) $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

(C) $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

(D) $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

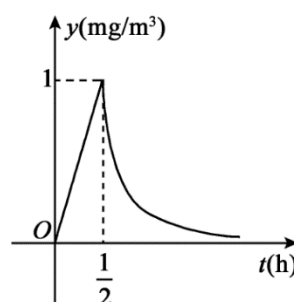
二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 已知向量 $\mathbf{a} = (3, 1)$, $\mathbf{b} = (t, 2)$, 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则实数 $t =$ _____.

(12) 已知 $x > 0$, $y > 0$, $xy = 1$, 则 $x + 4y$ 的最小值为 _____, 此时 x 的值为 _____.

(13) 在一个房间使用某种消毒剂后, 该消毒剂中的某种药物含量 Y (mg/m^3) 随时间 t (h) 变化的规律

可表示为 $y = \begin{cases} at, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{at}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ($a > 0$), 如图所示, 则 $a =$ _____;



实验表明, 当房间中该药物含量不超过 $0.75 \text{ mg}/\text{m}^3$ 时对人体无害, 为了不使人体受到该药物的伤害, 则使用该消毒剂对这个房间进行消毒后至少经过 _____ 小时方可进入.

(14) 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, S_n 为其前 n 项和. 能说明 “若 $d > 0$, 则数列 $\{S_n\}$ 为递增数列” 是

假命题的一组 a_1 和 d 的值为 _____.

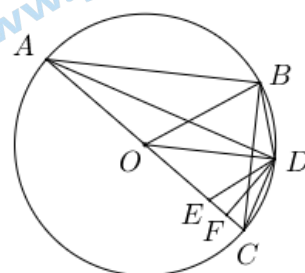
(15) 公元前 2 世纪的古希腊天文学家和数学家希帕科斯是三角学的创立者之一, 他因天文观测的需要编制了有关三角比率的表格. 后人推测希帕科斯在编制表格的过程中本质上使用了公式

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$. 如图是希帕科斯推导此公式时使用的几何图形, 已知点 B 在以线段 AC 为直径的圆 O 上, D 为弧 BC 的中点, 点 E 在线段 AC 上且 $AE = AB$, 点

F 为 EC 的中点. 设 $OA = r$, $\angle DOC = \alpha$. 给出下列四个结论:

- ① $CD = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$; ② $AB = 2r \sin \alpha$;
- ③ $CF = r(1 - \cos \alpha)$; ④ $CD^2 = 2r^2(1 - \cos \alpha)$.

其中, 正确结论的序号是 _____.



注: 本题给出的结论中, 有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分, 不选或有错选得 0 分, 其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$.

(I) 求 $f(\frac{\pi}{3})$ 及 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 若 $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, 求 $f(x)$ 的值域.

(17) (本小题 13 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列, $a_1 = b_2 = 1$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

条件①: $a_2 + a_4 = 10$; 条件②: $b_2 b_4 = 4$; 条件③: $b_4 = a_5$.

(18) (本小题 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=3$.

(I) 若 $B=60^\circ$,

(i) 求 BC ;

(ii) 设 D 是边 BC 上一点, 且 $\angle ADC=120^\circ$, 求 $\sin C$;

(II) 若 AE 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线, 求 AE 的取值范围.

(19) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=x+a\ln x$ ($a\in\mathbf{R}$).

(I) 当 $a=-1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 若不等式 $f(x)\leq\frac{1}{2}x^2+ax$ 对任意 $x>0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{a \cos x}{x} + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(I) 当 $a=1, b=0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的单调性;

(II) 已知曲线 $f(x) = \frac{a \cos x}{x} + b$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线方程为 $y = -\frac{6}{\pi}x + 2$.

(i) 求 $f(x)$ 的解析式;

(ii) 判断方程 $f(x) = \frac{3}{2\pi} - 1$ 在区间 $(0, 2\pi]$ 上解的个数, 并说明理由.

(21) (本小题 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷数列, 其前 n 项和为 S_n . 若对任意的正整数 $m \geq 2$, 存在正整数 k, l ($1 \leq k \leq l$) 使得 $S_m = a_k + a_l$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是 “S 数列”.

(I) 若 $a_n = 2n$ ($n=1, 2, \dots$), 判断数列 $\{a_n\}$ 是否是 “S 数列”, 并说明理由;

(II) 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = q^n$ ($n=1, 2, \dots$), 且 $q > 2$, 证明数列 $\{a_n\}$ 不是 “S 数列”;

(III) 证明: 对任意的无穷等差数列 $\{a_n\}$, 存在两个 “S 数列” $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n - c_n$ ($n=1, 2, \dots$) 成立.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID: bj-gaokao）
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯](https://www.gaokzx.com) (ID: bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。