

# 2024 届高三一轮复习联考(一) 全国卷 文科数学试题

### 注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

**一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。**

1. 命题  $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 \geq 2^n$ , 则命题  $p$  的否定为

- A.  $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$       B.  $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 < 2^n$   
C.  $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 < 2^n$       D.  $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 < 2^n$

2. 已知复数  $z = 2 + i^3 + i^4$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $|z| =$

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{10}$       C.  $2\sqrt{2}$       D. 2

3. 若集合  $A = \{x | x^2 < 9\}$ ,  $B = \{y | y = 2^x + 1\}$ , 则  $A \cup B =$

- A.  $(-3, +\infty)$       B.  $[1, 3)$       C.  $(1, 3)$       D.  $(1, +\infty)$

4. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若角  $\theta$  以原点为顶点, 以  $x$  轴非负半轴为始边, 且终边过点

$(1, \sqrt{3})$ , 则  $\sin \frac{\theta}{2} =$

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$       D.  $\frac{1}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$

5. 若  $f(x) = \frac{a}{e^x + 1} - 1$  为奇函数, 则  $g(x) = x^2 - ax$  的单调递增区间是

- A.  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$       D.  $(1, +\infty)$

6. 已知实数  $x, y$  满足  $x^2 - xy + 2 = 0, x > 0$ , 则  $x + \frac{1}{x} + y$  的最小值为

- A. 3      B.  $2\sqrt{6}$       C.  $2\sqrt{2} + 2$       D.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

7. 曲线  $y = x \cdot \cos x + \sin x$  在点  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  处的切线方程为

- A.  $x - y - \frac{\pi}{2} + 1 = 0$       B.  $x + y - \frac{\pi}{2} - 1 = 0$   
C.  $x + \frac{2}{\pi}y - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = 0$       D.  $x + \frac{\pi}{2}y - \pi = 0$

8. 已知  $\sin 126^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ , 则  $\sin 18^\circ =$

- A.  $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$       B.  $\frac{3 - \sqrt{5}}{8}$       C.  $\frac{\sqrt{5} - 1}{8}$       D.  $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

9. 已知  $x = 1$  是函数  $f(x) = \frac{x}{e^x} + a(x - 1)^2$  的一个极大值点, 则  $a$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, 0]$       B.  $(-\infty, \frac{1}{2e})$   
C.  $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2e})$       D.  $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2e}]$

10. 已知  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x + 1) + f(-3 - x) = 0, f(x + 1) = f(1 - x)$ , 若当  $x \in (-1, 0)$

时,  $f(x) = \left| \ln \left( x + \frac{4}{3} \right) \right|$ , 则  $f\left(\frac{2023}{2}\right) =$

- A.  $\ln \frac{6}{7}$       B.  $\ln \frac{5}{6}$       C.  $\ln \frac{6}{5}$       D.  $\ln \frac{7}{6}$

11. 若  $y > 0$ , 则“ $x - y > 1$ ”是“ $e^x - e^y > 1$ ”的

- A. 充要条件      B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件      D. 既不充分也不必要条件

12. 设  $a = \log_3 4, b = \log_0.8 0.7, c = \log_8 7$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

- A.  $a < c < b$       B.  $c < b < a$       C.  $b < a < c$       D.  $c < a < b$

**二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。**

13. 已知  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$  \_\_\_\_\_.

14. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x + y - 6 \leq 0, \\ x - 2y - 1 \leq 0, \\ 2x - y - 2 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = x - 3y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$  的最小正周期为  $4\pi$ , 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\varphi (\varphi > 0)$  个单位长度后得到  $g(x)$  的图象, 若  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 则  $\varphi$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = e^{x+1} - a \ln x$ , 若  $f(x) \geq a(\ln a - 1)$  对  $x > 0$  恒成立, 则实数  $a$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:60 分。

17.(12 分)已知集合  $A = \{x | 2x^2 - 7x + 6 \geq 0\}$ ,  $B = \{x | \sqrt{x+1} < a\}$ 。

- 当  $a = \sqrt{3}$  时,求  $A \cap B$ ;
- 若  $A \cup B = A$ ,求实数  $a$  的取值范围。

18.(12 分)已知函数  $f(x) = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cos^2\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - 4\sin \omega x \cos \omega x$  ( $x \in \mathbf{R}, \omega > 0$ ) 的两个相邻的对称中心的距离为  $\frac{\pi}{2}$ 。

- 求  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上的单调递增区间;
- 当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,关于  $x$  的方程  $f(x) = m$  有两个不相等的实数根  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ),求  $\cos \frac{x_1 + x_2}{2}$  的值。

19.(12 分)已知函数  $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ 。

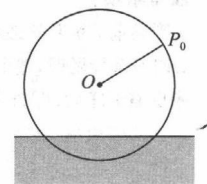
- 当  $b = 0, a = 0$  时,求  $f(x)$  在  $[2, 3]$  上的最大值;
- 当  $b = \frac{a^2}{4}$ ,且  $a \in (-3\sqrt{2}, 0]$  时,讨论  $f(x)$  的零点个数。

20.(12 分)筒车(chinese noria)亦称“水转筒车”。一种以水流作动力,取水灌田的工具。据史料记载,筒车发明于隋而盛于唐,距今已有 1 000 多年的历史。这种靠水力自动的古老筒车,在家乡郁郁葱葱的山间、溪流间构成了一幅远古的田园春色图。水转筒车是利用水力转动的筒车,必须架设在水流湍急的岸边。水激轮转,浸在水中的小筒装满了水带到高处,筒口向下,水即自筒中倾泻入轮旁的水槽而流入入田。某乡间有一筒车,其最高点到水面的距离为 6 m,筒车直径为 8 m,设置有 8 个盛水筒,均匀分布在筒车转轮上,筒车上的每一个盛水筒都做逆时针匀速圆周运动,筒车转一周需要 24 s,如图,盛水筒 A(视为质点)的初始位置  $P_0$  距水面的距离为 4 m。

(1)盛水筒 A 经过  $t$  s 后距离水面的高度为  $h$  (单位:m),求筒车转动一周的过程中,  $h$  关于  $t$  的函数  $h = f(t)$  的解析式;

(2)盛水筒 B(视为质点)与盛水筒 A 相邻,设盛水筒 B 在盛水筒 A 的顺时针方向相邻处,求盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差的最大值(结果用含  $\pi$  的代数式表示),及此时对应的  $t$ 。

(参考公式:  $\sin \theta - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$ ,  $\cos \theta - \cos \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\varphi - \theta}{2}$ )



21.(12 分)已知函数  $f(x) = \ln(x+1) - ax + 2$ 。

- 当  $a > 0$  时,求  $f(x)$  的单调区间;
- 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) + 2x + x \ln(x+1) \geq 0$  恒成立,求整数  $a$  的最大值。

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

已知曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = -2 + t \sin \alpha, \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ), 点  $P(0, -2)$ ,

以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ , 曲线  $C_2$  与极轴交于点  $A$ , 与曲线  $C_1$  交于点  $B$ 。

- 若  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , 试写出曲线  $C_1$  的普通方程与曲线  $C_2$  的直角坐标方程;
- 若  $\angle APB = \frac{\pi}{6}$ , 求  $\triangle APB$  的面积。

23.[选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知函数  $f(x) = |x - 2a| + |x + a + 1|$ 。

- 当  $a = -1$  时,求不等式  $f(x) \leq 2x + 3$  的解集;
- 若对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) \geq |2a - 1|$  恒成立,求  $a$  的取值范围。