2023 北京房山高二（上）期末

数　　学

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 的焦距是（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

2. 直线 $y=k\left(x+2\right)-3$ 经过定点（　　）

A. $\left(2,3\right)$　　B. $\left(2,-3\right)$　　C. $\left(-2,3\right)$　　D. $\left(-2,-3\right)$

3. 已知以点 $A(2,-3)$ 为圆心，半径长等于 5 的圆 O，则点 $M(5,-7)$ 与圆 O 的位置关系是(　　)

A. 在圆内　　B. 在圆上

C. 在圆外　　D. 无法判断

4. “$mn<0$”是“方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 表示的曲线为双曲线”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，点 A 在椭圆上，点 B 在 F_1A 的延长线上，且 $\left|AB\right|=\left|AF_2\right|$，则点 B 的轨迹是（　　）

A. 两条平行线　　B. 双曲线　　C. 椭圆　　D. 圆

6. 直线 $3ax-y-1=0$ 与直线 $(a-\dfrac{2}{3})x+y+1=0$ 垂直，则 a 的值是

A. -1 或 $\dfrac{1}{3}$　　B. 1 或 $\dfrac{1}{3}$　　C. $-\dfrac{1}{3}$ 或 -1　　D. $-\dfrac{1}{3}$ 或 1

7. 过抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，作倾斜角为 45° 的直线，则被抛物线截得的弦长为(　　)

A. 8　　B. 16　　C. 32　　D. 64

8. 过定点 $P\left(3,1\right)$ 作圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的切线．则切线的方程为（　　）

A. $4x-3y-9=0$　　B. $4x-3y-3=0$

C. $4x-3y-9=0$ 或 $y=1$　　D. $4x-3y-3=0$ 或 $y=1$

9. 已知双曲线 C 过点 $\left(3,\sqrt{2}\right)$ 且渐近线为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，则下列结论正确的是（　　）

A. 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. 双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$

C. 曲线 $x^2+xy-2=0$ 经过双曲线 C 的一个焦点　　D. 直线 $x-\sqrt{2}y-1=0$ 与双曲线 C 有两个不同交点

10. 已知 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点，若在右支上存在点 A，使得点 F_2 到直线 AF_1 的距离为 $\sqrt{3}a$，则双曲线离心率 e 的范围是（　　）

A. $\left(1,\frac{5}{2}\right)$　　B. $\left(1,\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},+\infty\right)$

第二部分（非选择题共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 直线 $y=\ x+\ 3$ 的倾斜角是__________.

12. 抛物线 $y^2=x$ 的准线方程为________.

13. 圆 $P:x^2+y^2+4x=0$ 的圆心到直线 $l:x+y-2=0$ 的距离是____________.

14. 已知双曲线 M 满足以下条件：①离心率为 2；②焦点在坐标轴上；③对称轴是坐标轴．则满足上述条件的双曲线 M 的一个方程是____________.

15. 已知点 $A\left(-1,-3\right)$ 是圆 $C:x^2+y^2-8x+ay=0$ 上一点，给出下列结论：

① $a=6$；②圆 C 的圆心为 $\left(4,-3\right)$；③圆 C 的半径为 25；④点 $\left(1,1\right)$ 也是圆 C 上一点.

其中正确结论的序号是___________.

16. 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 e_1，椭圆 C_1 的上顶点为 M．且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$．双曲线 C_2 和椭圆 C_1 有相同焦点，且双曲线 C_2 的离心率为 e_2，P 为曲线 C_1 与 C_2 的一个公共点，若 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$．则 $e_1=$_________，$e_2=$________.

三、解答题共 5 小题，每小题 14 分，共 70 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 已知 $\triangle ABC$ 的边 AC，AB 上的高所在直线方程分别为 $2x-3y+1=0,x+y=0$，顶点 $A\left(1,2\right)$.

（1）求顶点 C 的坐标；

（2）求 BC 边所在的直线方程.

18. 已知圆 $C:x^2+y^2-6x-8y+21=0$，点 $A\left(-1,0\right),B\left(1,0\right)$．$P$ 是圆 C 上的任意一点.

（1）求圆 C 的圆心坐标与半径大小；

（2）求 $\left|PA\right|^2+\left|PB\right|^2$ 的最大值与最小值.

19. 圆过点 $A(1,-2)$，$B(-1,4)$，求：

（1）周长最小的圆的方程；

（2）圆心在直线 $2x-y-4=0$ 上的圆的方程.

20. 已知抛物线 C 的顶点在原点，对称轴是 y 轴，焦点 F 在 y 轴正半轴，直线 l 与抛物线 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 2，且 $|AF|+|BF|=6$.

（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）若直线 l 经过焦点 F，求直线 l 的方程

21. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 过点 $A\left(0,-1\right)$. 离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点为 F ，过 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，点 M 的坐标为 $\left(2,0\right)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 O 为坐标原点．证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

参考答案

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】A

【解析】

【分析】根据椭圆方程直接求解即可.

【详解】由 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 得：$c^2=25-16=9$，解得：$c=3$，$\therefore$ 焦距为 $2c=6$.

故选：A.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】令 $x+2=0$ 求解.

【详解】解：令 $x+2=0$，得 $x=-2$，此时 $y=-3$，

所以直线 $y=k\left(x+2\right)-3$ 经过定点 $\left(-2,-3\right)$，

故选：D

3. 【答案】B

【解析】

【详解】因为 $\left|AM\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5=r$,所以点 M 在圆上，选 B.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】根据双曲线的方程以及充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】当 $mn<0$，则 $m>0$ 且 $n<0$ 或 $m<0$ 且 $n>0$，此时方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示的曲线一定为双曲线；

则充分性成立；

若方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 表示的曲线为双曲线，则 $mn<0$，则必要性成立，

故选：C.

5. 【答案】D

【解析】

【分析】结合椭圆和圆的定义求得正确答案.

【详解】根据椭圆的定义可知 $\left|AF_1\right|+\left|AF_2\right|=2a=4\sqrt{2}$，

由于 $\left|AB\right|=\left|AF_2\right|$，所以 $\left|AF_1\right|+\left|AB\right|=4\sqrt{2}$，

即$\left|BF_1\right|=4\sqrt{2}$，所以$B$点的轨迹是以$F_1$为圆心，半径为$4\sqrt{2}$的圆.

故选：D

6. 【答案】D

【解析】

【详解】因为直线$3ax-y-1=0$与直线$(a-\frac{2}{3})x+y+1=0$垂直，

所以$3a\left(a-\frac{2}{3}\right)-1=0\therefore a=-\frac{1}{3},1$

故选 D.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】求出抛物线的焦点为 F（2，0），直线的斜率 k=tan45°=1，从而得到直线的方程为 y=x－2．直线方程与抛物线方程联解消去 y 得 $x^2-12x+4=0$，利用根与系数的关系可得 $x_1+x_2=12$，再根据抛物线的定义加以计算，即可得到直线被抛物线截得的弦长．

【详解】∵抛物线方程为 $y^2=8x$，2p=8，$\frac{p}{2}=2$，∴抛物线的焦点是 F（2，0）．

∵直线的倾斜角为 45°，∴直线斜率为 k=tan45°=1

可得直线方程为：y=1×（x－2），即 y=x－2．

设直线交抛物线于点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

联解$\begin{cases}y=x-2\\y^2=8x\end{cases}$，消去 y 得 $x^2-12x+4=0$，

∴$x_1+x_2=12$，

根据抛物线的定义，可得$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+2$，$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=x_2+2$，

∴$|AB|=x_1+x_2+4=12+4=16$，即直线被抛物线截得的弦长为 16．

故选 B.

【点睛】本题给出经过抛物线的焦点的直线倾斜角为 45°，求直线被抛物线截得的弦长．着重考查了抛物线的定义与标准方程、一元二次方程根与系数的关系、直线与圆锥曲线的位置关系等知识，属于中档题．

8. 【答案】C

【解析】

【分析】根据圆心到直线的距离等于半径求得切线方程，

【详解】依题意可知，切线的斜率存在，

设切线方程为$y-1=k\left(x-3\right)$，即$kx-y+1-3k=0$，

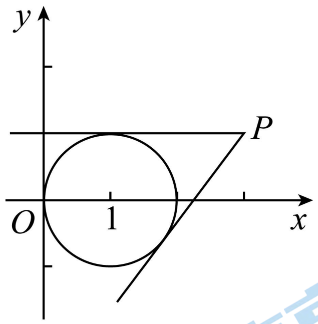
圆$(x-1)^2+y^2=1$的圆心为$\left(1,0\right)$，半径为1，

所以 $\dfrac{|k-0+1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=0$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$，

所以切线方程为 $y=1$ 或 $\dfrac{4}{3}x-y+1-4=0$，

即 $y=1$ 或 $4x-3y-9=0$.

故选：C



9. 【答案】A

【解析】

【分析】根据待定系数法求得双曲线方程，进而逐项求解判断即可.

【详解】由题意设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=m(m\neq0)$，

将点 $\left(3,\sqrt{2}\right)$ 代入 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=m$ 解得 $m=1$，

所以双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，A 正确；

因为 $a^2=3$，$b^2=1$，所以 $c^2=a^2+b^2=4$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，B 错误；

因为双曲线的焦点坐标为 $(\pm2,0)$，代入 $x^2+xy-2=0$ 均不满足，C 错误；

联立 $\begin{cases}x-\sqrt{2}y-1=0\\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$ 得 $y^2-2\sqrt{2}y+2=0$，$\Delta=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2=0$，

所以直线 $x-\sqrt{2}y-1=0$ 与双曲线 C 仅有一个交点，D 错误；

故选：A

10. 【答案】D

【解析】

【分析】设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2+b^2$，设直线 AF_1 方程为 $y=k(x+c)$，其中利用点 F_2 到直线 AF_1 的距离为 $\sqrt{3}a$，得到 k 关于 a，c 表达式，再利用 $k^2<\dfrac{b^2}{a^2}$ 可得答案.

【详解】设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2+b^2$，

设直线 AF_1 方程为 $y=k(x+c)$，则 $0<|k|<\dfrac{b}{a}$.

因点 F_2 到直线 AF_1 的距离为 $\sqrt{3}a$，则

$$\frac{|2kc|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}a \Rightarrow \frac{4c^2k^2}{1+k^2}=3a^2 \Rightarrow \left(4c^2-3a^2\right)k^2=3a^2 \Rightarrow k^2=\frac{3a^2}{4c^2-3a^2}$$

则 $k^2=\dfrac{3a^2}{4c^2-3a^2}<\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{c^2-a^2}{a^2} \Rightarrow c^2\left(4c^2-7a^2\right)>0 \Rightarrow \dfrac{c^2}{a^2}=e^2>\dfrac{7}{4}$，

则 $e>\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

故选：D

第二部分（非选择题共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 【答案】$\dfrac{1}{4}\pi$

【解析】

【分析】根据斜率和倾斜角的对应关系确定正确答案.

【详解】直线 $y=x+3$ 的斜率为1，倾斜角范围是[0, π)，所以倾斜角为 $\dfrac{1}{4}\pi$.

故答案为：$\dfrac{1}{4}\pi$

12. 【答案】$x=-\dfrac{1}{4}$

【解析】

【详解】抛物线 $y^2=x$ 的准线方程为 $x=-\dfrac{1}{4}$；故填 $x=-\dfrac{1}{4}$.

13. 【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】将圆的一般方程化为标准方程，找出圆心，

再利用用点到直线的距离公式求解即可.

【详解】由圆 $P:x^2+y^2+4x=0$ 有圆的标准方程为：

$(x+2)^2+y^2=4$，

所以圆心为 $P(-2,0)$，

则 P 到直线 $l:x+y-2=0$ 的距离为：

$d=\frac{|-2+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$.

14. 【答案】$x^2-\frac{y^2}{3}=1$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据条件写出一个双曲线方程即可.

【详解】由双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$中$a=1,b=\sqrt{3},c=2$，故离心率为2，且焦点在x轴上，曲线关于坐标轴对称，

所以双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$满足题设.

故答案为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$（答案不唯一）

15. 【答案】①②④

【解析】

【分析】利用a点坐标求得a，进而确定正确答案.

【详解】由于点$A(-1,-3)$是圆$C:x^2+y^2-8x+ay=0$上一点，

所以$1+9+8-3a=0,a=6$，①正确，

圆的方程为$x^2+y^2-8x+6y=0$，即$(x-4)^2+(y+3)^2=25$，

故圆心为$(4,-3)$，半径为5，②正确，③错误.

$(1-4)^2+(1+3)^2=25$，所以点$(1,1)$也是圆C上一点，④正确.

故答案为：①②④

16. 【答案】 ①. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ②. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】根据$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$可得$b=c$，$a=\sqrt{2}c$，由此可得$e_1$；假设$P$在第一象限，由$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a\\|PF_1|-|PF_2|=2a_1\end{cases}$求出$|PF_1|=a+a_1$，$|PF_2|=a-a_1$，根据余弦定理得$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$，将$|PF_1|=a+a_1$，$|PF_2|=a-a_1$代入可得$\frac{a^2}{c^2}+\frac{3a_1^2}{c^2}=4$，再根据离心率公式可求出结果.

【详解】在椭圆C_1中，因为上顶点为M．且$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，所以$\angle F_1MF_2=90^\circ$，

所以$b=c$，所以$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2}c$，所以$e_1=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

设双曲线方程为$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1\ (a_1>0,b_1>0)$，假设点$P$在第一象限，

则由$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a\\|PF_1|-|PF_2|=2a_1\end{cases}$得$|PF_1|=a+a_1$，$|PF_2|=a-a_1$，

在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理得$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}$，

所以$\frac{1}{2}=\frac{(a+a_1)^2+(a-a_1)^2-4c^2}{2(a+a_1)(a-a_1)}$，

整理得$a^2+3a_1^2=4c^2$，得$\frac{a^2}{c^2}+\frac{3a_1^2}{c^2}=4$，

所以$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，所以$\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{3}{e_2^2}=4$，解得$e_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\frac{\sqrt{6}}{2}$.

三、解答题共 5 小题，每小题 14 分，共 70 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17. 【答案】（1）$C(7,-7)$

（2）$2x+3y+7=0$

【解析】

【分析】（1）根据$\triangle ABC$的边AC的高所在直线方程为$2x-3y+1=0$和顶点$A(1,2)$，得到直线AC的方程，与$\triangle ABC$的边AB上的高所在直线方程联立求解；

（2）利用（1）的方法，再求得顶点B的坐标，然后利用两点式写出直线AB所在的直线方程.

【小问 1 详解】

解：因为$\triangle ABC$的边AC的高所在直线方程为$2x-3y+1=0$，

所以$k_{AC}=-\frac{3}{2}$，又顶点$A(1,2)$，

所以直线AC的方程为$y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$，即$3x+2y-7=0$，

又$\triangle ABC$的边AB上的高所在直线方程为$x+y=0$，

由$\begin{cases}3x+2y-7=0\\x+y=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=7\\y=-7\end{cases}$，

所以顶点$C(7,-7)$；

【小问 2 详解】

由 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高所在直线方程为 $x+y=0$，

得 $k_{AB}=1$ ，又顶点 $A(1,2)$，

所以直线 AB 的方程为 $y-2=x-1$，即 $x-y+1=0$，

又 $\triangle ABC$ 的边 AC 的高所在直线方程分别为 $2x-3y+1=0$，

由 $\begin{cases}2x-3y+1=0\\x-y+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$，

所以顶点 $B(-2,-1)$；

所以 BC 边所在的直线方程 $\dfrac{y+7}{x-7}=\dfrac{y+1}{x+2}$，即 $2x+3y+7=0$.

18. 【答案】（1）圆心为 $(3,4)$，半径 $r=2$

（2）最大值、最小值分别为 16、8.

【解析】

【分析】（1）写出圆 C 的标准方程，即可确定圆心和半径；

（2）设 $P(x,y)$，则有 $|PA|^2+|PB|^2=2(x^2+y^2)+2$，问题转化为求 x^2+y^2 的范围，即圆 C 上点 $P(x,y)$ 到原点 O 距离平方的范围，即可得结果.

【小问 1 详解】

由题设 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=4$，故圆心为 $C(3,4)$，半径 $r=2$；

【小问 2 详解】

令 $P(x,y)$，则 $|PA|^2+|PB|^2=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2$，

而 x^2+y^2 为圆 C 上点 $P(x,y)$ 到原点 O 距离的平方，

所以，只需确定 x^2+y^2 的范围，即可确定 $|PA|^2+|PB|^2$ 的最值，

因为 $x^2+y^2\in[|OC|-r,|OC|+r]=[3,7]$，故 $|PA|^2+|PB|^2\in[8,16]$，

所以 $|PA|^2+|PB|^2$ 的最大值、最小值分别为 16、8.

19. 【答案】（1）$x^2+(y-1)^2=10$；（2）$(x-3)^2+(y-2)^2=20$.

【解析】

【分析】（1）根据当 AB 为直径时，过 A，B 的圆的半径最小进行求解即可；

（2）根据垂径定理，通过解方程组求出圆心坐标，进而可以求出圆的方程.

【详解】解：（1）当 AB 为直径时，过 A，B 的圆的半径最小，从而周长最小，即 AB 中点(0，1)为圆心，半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{10}$.故圆的方程为 $x^2+(y-1)^2=10$；

（2）由于 AB 的斜率为 $k=-3$，则 AB 的垂直平分线的斜率为 $\frac{1}{3}$，

AB 的垂直平分线的方程是 $y-1=\frac{1}{3}x$，即 $x-3y+3=0$.

由 $\begin{cases} x-3y+3=0, \\ 2x-y-4=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases}$

即圆心坐标是 $C(3,2)$.

又 $r=|AC|=\sqrt{(3-1)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$.

所以圆的方程是 $(x-3)^2+(y-2)^2=20$.

20. 【答案】（1） $x^2=4y$

（2） $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$

【解析】

【分析】（1）首先根据中点坐标，得 $y_1+y_2=4$，再根据焦半径公式求 p，即可求抛物线方程；

（2）首先设直线 l 的方程 $y=kx+1$，与抛物线方程联立，利用韦达定理求 k，即可求抛物线方程.

【小问 1 详解】

设抛物线方程 $x^2=2py\left(p>0\right)$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

由条件可知，$y_1+y_2=4$，

$\left|AF\right|+\left|BF\right|=y_1+\frac{p}{2}+y_2+\frac{p}{2}=4+p=6$，得 $p=2$，

所以抛物线 C 的标准方程是 $x^2=4y$；

【小问 2 详解】

由（1）可知，直线 l 的斜率存在，且焦点 $F\left(0,1\right)$，

设直线 $l:y=kx+1$，联立 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$，得 $y^2-\left(4k^2+2\right)y+1=0$

$y_1+y_2=4k^2+2=4$，得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 l 的方程是 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$.

21. 【答案】（1） $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据由题意，列关于 a,b,c 的方程组求解，即可得椭圆的方程；（2）讨论直线 l 与 x 轴重合以

及垂直的情况可得 $\angle OMA=\angle OMB$，然后讨论直线 l 与 x 轴不重合也不垂直的情况，设直线方程，联立方程组，写出韦达定理，表示出直线 MA 和直线 MB 的斜率之和，从而代入韦达定理计算，可得 $k_{MA}+k_{MB}=0$，从而得直线 MA 和直线 MB 的倾斜角互补，即可证明 $\angle OMA=\angle OMB$.

【小问 1 详解】

由题意，列式得 $\begin{cases} b=1 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

当直线 l 与 x 轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0^\circ$，

当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 OM 为 AB 的垂直平分线，

所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

当直线 l 与 x 轴不重合也不垂直时，由题意，$F(1,0)$，

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \\ y=k(x-1) \end{cases}$，得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$，

由题意，直线 MA 和直线 MB 的斜率之和为

$$k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{(kx_1-k)(x_2-2)+(kx_2-k)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)},$$

代入韦达定理得，$2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k=\dfrac{4k^3-4k-12k^3+8k^3+4k}{2k^2+1}=0$，

所以 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故直线 MA 和直线 MB 的倾斜角互补，

所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

综上，$\angle OMA=\angle OMB$ 得证.

【点睛】思路点睛：（1）解答直线与椭圆的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去 x(或 y)建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系；（2）涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯