中学生标准学术能力诊断性测试 2024 年 1 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1． 已知 $m\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{m,-1,2\}$，$B=\{a^2|a\in A\}$，若 $C=A\cup B$，且 C 的所有元素和为 12，则 $m=$

A．-3　　B．0　　C．1　　D．2

2． 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n-a_{n+1}=2^n a_n a_{n+1}$，则 $a_n=$

A．$\dfrac{2}{2^{n-1}+1}$　　B．$\dfrac{1}{2^{n-1}}$　　C．$\dfrac{2}{2^n+1}$　　D．$\dfrac{1}{2^n-1}$

3． 复数 z 满足 $(z+2)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$（$\mathrm{i}$ 为虚数单位），则 z 的共轭复数的虚部是

A．-3　　B．1　　C．i　　D．$-\mathrm{i}$

4． 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 1，则点 A_1 到平面 AB_1C 的距离为

A．$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{21}}{6}$　　D．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

5． 设 $(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若 $a_5=a_6$，则 $n=$

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

6． 若不等式 $\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{x^2-8x+17}\le 4$ 的解集为 $[a,b]$，则 $a+b$ 的值是

A．5　　B．$4\sqrt{2}$　　C．6　　D．7

7． 已知 $a=e^2, b=\dfrac{e^3}{2}\ln 2, c=15-5\ln 5$，则

A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$a>c>b$　　D．$b>a>c$

8． 已知 $x,y>0, x^3+y^3-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}y=3$，则 $13x+y$ 的最大值是

A．15　　B．18　　C．20　　D．24

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得5分，部分选对但不全得2分，有错选的得0分.

9．设 α,β,γ 为互不重合的平面，m,n 为互不重合的直线，则下列命题为真命题的是

A．若 $\alpha\parallel\gamma,\beta\parallel\gamma$，则 $\alpha\parallel\beta$　　B．若 $\alpha\cap\beta=m,m\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$

C．若 $m\parallel\alpha,n\parallel\beta,m\parallel n$，则 $\alpha\parallel\beta$　　D．若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\parallel\beta$

10．已知点 P 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 上的任意一点，过点 P 作渐近线的垂线，垂足分别为 E,F，则

A．$|PE|+|PF|=\dfrac{4\sqrt5}{5}$　　B．$|PE|\cdot|PF|=\dfrac{4}{5}$

C．$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=-\dfrac{12}{25}$　　D．$S_{\Delta PEF}$ 的最大值为 $\dfrac{8}{25}$

11．直线 $l_1:ax+by+c=0$ 和 $l_2:bx+cy+a=0$ 将圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 分成长度相等的四段弧，则 $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2$ 的取值可以是

A．$\dfrac{4}{3}$　　B．2　　C．$\dfrac{8}{3}$　　D．3

12．已知 $\sin2\alpha+\sin2\beta=2\sin(2\alpha+2\beta)$，且 $\alpha+\beta\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\tan\alpha+2\tan(\alpha+\beta)+3\tan\beta$ 的值可能为

A．-6　　B．-5　　C．$5\sqrt2$　　D．8

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13．设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 为偶函数，$f(x+2)-1$ 为奇函数，当 $x\in[2,4]$ 时，$f(x)=a\cdot\log_2x+b$，若 $f(0)+f(6)=4$，则 $a+2b=$________.

14．已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 是 C 上一点，线段 PF_2 的中垂线 l 过点 F_1，与椭圆 C 相交于 A,B 两点，且 $|AB|=\dfrac{9}{5}a$，则椭圆 C 的离心率为________.

15．已知函数 $g(x)$ 的图象与函数 $f(x)=e^x-x$ 的图象关于原点对称，动直线 $x=a(a\neq0)$ 与函数 $f(x),g(x)$ 的图象分别交于点 A,B，函数 $f(x)$ 的图象在 A 处的切线 l_1 与函数 $g(x)$ 的图象在 B 处的切线 l_2 相交于点 C，则 ΔABC 面积的最小值是________.

16．对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $(x^2-7x+14)^2\geq m(x^2-6x+13)(x^2-8x+17)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，当$n\geq 2$时，$S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$．

（1）求证：数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$是等差数列，并求$S_n$的表达式；

（2）设$b_n=\frac{n^2S_n}{2n+1}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，不等式$T_n\leq m^2-3m+n$对所有的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求正整数m的最小值．

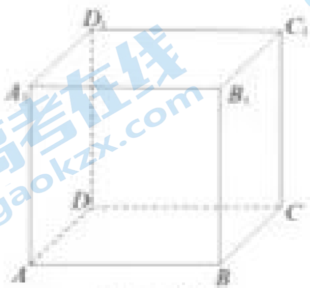
18．（12 分）如图所示，在ΔABC中，$AB=1$，D是BC上的点，$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle DAC$．

（第 18 题图）

（1）若$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，求证：$\frac{2}{AD}-\frac{1}{AC}=\sqrt{3}$；

（2）若$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$，求$\Delta ABC$面积的最大值．

19．（12 分）如图所示，一只蚂蚁从正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点A_1出发沿棱爬行，记蚂蚁从一个顶点到另一个顶点为一次爬行，每次爬行的方向是随机的，蚂蚁沿正方体上、下底面上的棱爬行的概率为$\frac{1}{6}$，沿正方体的侧棱爬行的概率为$\frac{2}{3}$．

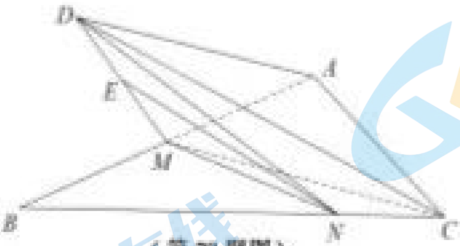


（第 19 题图）

（1）若蚂蚁爬行n次，求蚂蚁在下底面顶点的概率；

（2）若蚂蚁爬行 5 次，记它在顶点C出现的次数为X，求X的分布列与数学期望．

20．（12 分）如图所示，已知ΔABC是以BC为斜边的等腰直角三角形，点M是边AB的中点，点N在边BC上，且$BN=3NC$．以MN为折痕将ΔBMN折起，使点B到达点D的位置，且平面$DMC\perp$平面ABC，连接DA,DC．

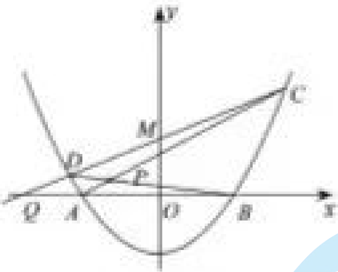


（第 20 题图）

（1）若E是线段DM的中点，求证：$NE\parallel$平面DAC；

（2）求二面角$D-AC-B$的余弦值．

21．（12 分）如图所示，已知抛物线$y=x^2-1$，$M(0,1)$，A，B是抛物线与x轴的交点，过点M作斜率不为零的直线l与抛物线交于C，D两点，与x轴交于点Q，直线AC与直线BD交于点P．



（第 21 题图）

（1）求$\dfrac{|CM|\cdot|DM|}{|CD|}$的取值范围；

（2）问在平面内是否存在一定点T，使得$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}$为定值？若存在，求出点$T$的坐标；若不存在，请说明理由．

22．（12 分）已知函数$f(x)=x^2+\dfrac{1-\ln x}{x}-a$有两个零点$x_1,x_2\,(x_1<x_2)$．

（1）求实数a的取值范围；

（2）求证：$x_1x_2<1$；

（3）求证：$x_2-x_1<\sqrt{a^2-4}<x_2^2-x_1^2$．

中学生标准学术能力诊断性测试 2024 年 1 月测试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	B	A	C	C	A	C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对但不全的得 2 分，有错选的得 0 分．

9	10	11	12
AB	BCD	CD	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．4

14．$\frac{5}{13}$

15．2

16．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）当 $n\geq 2$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)$，

即 $S_n^2=(S_n-S_{n-1})\left(S_n-\frac{1}{2}\right)=S_n^2-\frac{1}{2}S_n-S_nS_{n-1}+\frac{1}{2}S_{n-1}$，

整理可得 $2S_nS_{n-1}=S_{n-1}-S_n$ ……………………………………………………………………1 分

$\because S_1=1$，则 $2S_2S_1=S_1-S_2$，即 $2S_2=1-S_2$，可得 $S_2=\frac{1}{3}$ ……………………………2 分

由 $2S_2S_3=S_2-S_3$，即 $\frac{2}{3}S_3=\frac{1}{3}-S_3$，可得 $S_3=\frac{1}{5},\cdots$，

以此类推可知，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*,S_n>0$，

在等式 $2S_nS_{n-1}=S_{n-1}-S_n$ 两边同时除以 S_nS_{n-1}，可得 $\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2$ ……4 分

所以数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$为等差数列，且其首项为$\dfrac{1}{S_1}=1$，公差为 2 ………………………………………5 分

$\therefore \dfrac{1}{S_n}=1+2(n-1)=2n-1$，因此，$S_n=\dfrac{1}{2n-1}$ ……………………………………………6 分

（2）解：$b_n=\dfrac{n^2S_n}{2n+1}=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore T_n=\dfrac{n}{4}+\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ ………………………………………………………………8 分

不等式$T_n\le m^2-3m+n$对所有的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，则$m^2-3m+\dfrac{2}{3}\ge 0$，

即$m\ge\dfrac{9+\sqrt{57}}{6}$或$m\le\dfrac{9-\sqrt{57}}{6}$ ……………………………………………………9 分

因此，满足条件的正整数 m 的最小值为 3 ……………………………………………… 10 分

18．（12 分）

（1）证明：由$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2},\angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle DAC$，知$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6},\angle DAC=\dfrac{\pi}{3}$，

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{ACD},\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC$，

即$AD+\sqrt{3}AD\cdot AC=2AC$，

两边同除以$AD\cdot AC$，得$\dfrac{2}{AD}-\dfrac{1}{AC}=\sqrt{3}$ ……………………………………………5 分

（2）设$\angle BAD=\alpha$，则$\angle DAC=2\alpha$，

ΔABD中，由正弦定理，得$\dfrac{AB}{\sin\angle BDA}=\dfrac{BD}{\sin\alpha}$ ①，

ΔACD中，由正弦定理，得$\dfrac{AC}{\sin\angle CDA}=\dfrac{DC}{\sin 2\alpha}$ ②，

②÷①，结合$\sin\angle BDA=\sin\angle CDA, DC=4BD$，得$AC=\dfrac{2}{\cos\alpha}$ …………………7 分

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 3\alpha=\dfrac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\cos\alpha}=3\tan\alpha-4\tan\alpha\cdot\sin^2\alpha$

$=3\tan\alpha-4\tan\alpha\cdot\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ……………………………………9 分

设 $\tan\alpha=t\in\left(0,\sqrt{3}\right)$，即求函数 $y=\dfrac{3t-t^3}{1+t^2},t\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ 的最大值，

$$y'=\frac{\left(3-3t^2\right)\left(1+t^2\right)-\left(3t-t^3\right)2t}{\left(1+t^2\right)^2}=\frac{\left(2\sqrt{3}-3-t^2\right)\left(2\sqrt{3}+3+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2},$$

$t^2\in\left(0,2\sqrt{3}-3\right)$ 时，$y'>0$，函数单调递增；$t^2\in\left(2\sqrt{3}-3,3\right)$ 时，$y'<0$，函数单调递减，当 $t^2=2\sqrt{3}-3$ 时，函数有最大值，$y_{\max}=\sqrt{6\sqrt{3}-9}$，

$\therefore \Delta ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{6\sqrt{3}-9}$ ……………………………………12 分

19.（12 分）

（1）记蚂蚁爬行 n 次在底面 $ABCD$ 的概率为 P_n，

由题意可得，$P_1=\dfrac{2}{3},P_{n+1}=\dfrac{1}{3}P_n+\dfrac{2}{3}(1-P_n)$ ……………………………………3 分

$P_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(P_n-\dfrac{1}{2}\right),\left\{P_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，首项为 $\dfrac{1}{6}$，公比为 $-\dfrac{1}{3}$，

$P_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1},P_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ ……………………………………5 分

（2）$X=0,1,2$，

$X=2$ 时，蚂蚁第 3 次、第 5 次都在 C 处，

$$P\left(X=2\right)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times2\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times2\times\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{18}$$

……………………………………7 分

$X=1$ 时，蚂蚁第 3 次在 C 处或第 5 次在 C 处，

设蚂蚁第 3 次在 C 处的概率为 P_1，

$$P_1=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times2\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times2\times\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{18}$$

……………………………………8 分

设蚂蚁第 5 次在 C 处的概率为 P_2，

设蚂蚁不过点 C 且第 3 次在 D_1 的概率为 P_3，设蚂蚁不过点 C 且第 3 次在 B_1 的概率为 P_4，

设蚂蚁不过点 C 且第 3 次在 A 的概率为 P_5，由对称性知，$P_3 = P_4$，

$$P_3 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times4+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times3=\frac{13}{54},$$

$$P_5 = \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times6+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{27},$$

得 $P_2 = 2P_3\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times2+P_5\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times2=\frac{7}{54}$ ……………………………………………… 11 分

$\therefore P(X=1)=P_1+P_2=\frac{5}{27}$，

$P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)=\frac{41}{54}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{41}{54}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{1}{18}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)=\frac{8}{27}$ ………… 12 分

20．（12 分）

（1）过点 E 作 AM 的平行线交 AD 于点 F，过点 N 作 AB 的平行线交 AC 于点 G，连接 FG．因为点 E 是线段 DM 的中点，$BN=3NC$，$\therefore EF=NG=\frac{1}{2}AM$，且 $EF \parallel NG$，四边形 $EFGN$ 是平行四边形．由 $NE \parallel FG, NE \not\subset$ 平面 DAC，$FG \subset$ 平面 DAC，

$\therefore NE \parallel$ 平面 DAC ……………………………………………………………………………… 5 分

（2）解法 1：以点 A 为原点，AB，AC 所在的直线为 x 轴、y 轴，过点 A 垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 ……………………………………………………………… 6 分

设 $AB=AC=2$，则 $A(0,0,0), M(1,0,0), N\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)$，设 $D(x,y,z)$，

因为平面 $DMC\perp$ 平面 ABC，所以点 D 在平面 ABC 上的射影落在直线 CM 上，

$\therefore x+\dfrac{y}{2}=1$ ①，

由题意可知，$DM=1,DN=\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\therefore (x-1)^2+y^2+z^2=1$ ②，

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ ③，

由①②③解得，$x=\dfrac{8}{7},y=-\dfrac{2}{7},z=\dfrac{2\sqrt{11}}{7},\therefore D\left(\dfrac{8}{7},-\dfrac{2}{7},\dfrac{2\sqrt{11}}{7}\right)$ ……………………8 分

$\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{8}{7},-\dfrac{2}{7},\dfrac{2\sqrt{11}}{7}\right),\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{8}{7},-\dfrac{16}{7},\dfrac{2\sqrt{11}}{7}\right)$，

设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

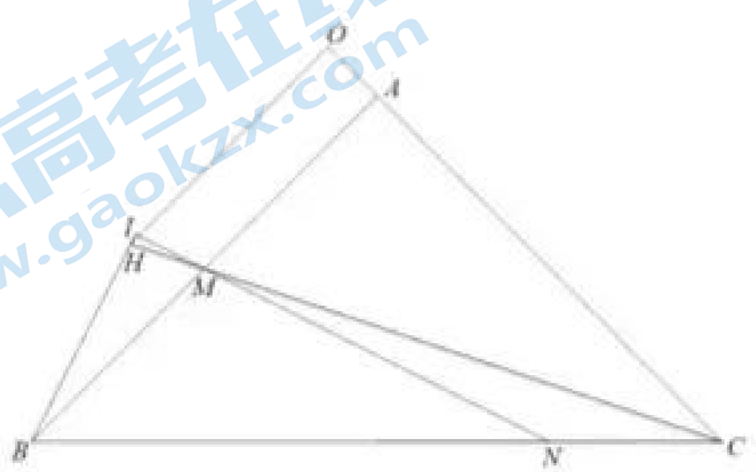
$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}4x-y+\sqrt{11}z=0\\ 4x-8y+\sqrt{11}z=0\end{cases}$，取 $x=\sqrt{11},y=0,z=-4$ ……………………11 分

取平面 ABC 的法向量 $\vec{m}=(0,0,1)$．设二面角 $D-AC-B$ 的平面角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，

所以，二面角 $D-AC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ ……………………………………12 分

解法 2：如图，过点 B 作直线 MN 的垂线交于点 I，交直线 CM 于点 H．由题意知，点 D 在底面 ABC 上的射影在直线 BI 上且在直线 MC 上，所以点 H 即点 D 在底面上的射影，即 $DH\perp$ 平面 ABC ……………………………………………………………6 分



设 $AB=2$，则 $BM=1,BN=\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\angle MBN=\dfrac{\pi}{4}$，由余弦定理，得 $MN=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

$\cos\angle BMN=-\dfrac{\sqrt{10}}{10},\sin\angle BMN=\dfrac{3\sqrt{10}}{10},MI=BM\cos(\pi-\angle BMN)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$$\cos\angle IMH=\cos(\angle IMB-\angle HMB)=\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$MH=\frac{MI}{\cos\angle IMH}=\frac{\sqrt{5}}{7}.$$

过点 H 作 AC 的垂线交于点 O，连接 DO，由三垂线定理知，$DO\perp AC$，$\therefore\angle DOH$ 是二面角 $D-AC-B$ 的平面角 ··· 9 分

由 $\frac{AM}{HO}=\frac{CM}{CH}$，解得 $HO=\frac{8}{7}, DH=\sqrt{DM^2-MH^2}=\frac{2\sqrt{11}}{7}$，

$\tan\angle DOH=\frac{DH}{HO}=\frac{\sqrt{11}}{4}$，得 $\cos\angle DOH=\frac{4\sqrt{3}}{9}$，

所以，二面角 $D-AC-B$ 的余弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ·· 12 分

21．（12 分）

（1）设点 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，设直线 l 的方程为 $y=kx+1(k\neq 0)$，代入抛物线 $y=x^2-1$，

得 $x^2-kx-2=0$（*），

$$\frac{|CM||DM|}{|CD|}=\frac{\sqrt{1+k^2}|x_1|\sqrt{1+k^2}|x_2|}{\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|}=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{k^2+8}}=2\sqrt{1-\frac{7}{k^2+8}}\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$$ ··········· 4 分

（2）$C(x_1,x_1^2-1),D(x_2,x_2^2-1),Q\left(-\frac{1}{k},0\right)$，设 $T(m,n)$，

由（*）式，知 $x_1+x_2=k,x_1x_2=-2$ ·· 5 分

直线 AC 的方程为 $y=(x_1-1)(x+1)$，直线 BD 的方程为 $y=(x_2+1)(x-1)$，

解得 $x=\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1+2}, y=\frac{2(x_1x_2+x_1-x_2-1)}{x_2-x_1+2}=\frac{2(x_1-x_2-3)}{x_2-x_1+2}$，

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1+2},\frac{2(x_1-x_2-3)}{x_2-x_1+2}\right)$ ··· 7 分

$$\overrightarrow{TP}=\left(\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1+2}-m,\frac{2(x_1-x_2-3)}{x_2-x_1+2}-n\right),\overrightarrow{TQ}=\left(-\frac{1}{k}-m,-n\right),$$

$$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=\left(\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1+2}-m\right)\left(-\frac{1}{k}-m\right)+\left(\frac{2(x_1-x_2-3)}{x_2-x_1+2}-n\right)(-n)$$

$$=m^2-\left(\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1+2}-\frac{1}{k}\right)m-\frac{x_1+x_2}{k(x_2-x_1+2)}+n^2-\frac{2(x_1-x_2-3)}{x_2-x_1+2}n$$

$$=m^2-\left(\frac{k}{x_2-x_1+2}-\frac{1}{k}\right)m+n^2+2n+\frac{2n-1}{x_2-x_1+2}$$

$\because x_2-x_1=\pm\sqrt{k^2+8}$，

$\therefore \overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=m^2+n^2+2n+\dfrac{-km+2n-1}{\pm\sqrt{k^2+8}+2}+\dfrac{m}{k}$ ······························ 10 分

当 $m=0,n=\dfrac{1}{2}$，$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}$ 为定值 $\dfrac{5}{4}$，

所以存在定点 T 的坐标为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ ······························ 12 分

22．（12 分）

（1）$\because f'(x)=2x+\dfrac{-2+\ln x}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)+\ln x}{x^2}$ ······························ 1 分

又因为函数 $g(x)=2(x^3-1)+\ln x$ 递增，且 $g(1)=0$，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，在 $[1,+\infty)$ 递增 ······························ 2 分

当 $f(1)=2-a<0$，即 $a>2$ 时，

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+a\left(1-\ln\frac{1}{a}\right)-a=\frac{1}{a^2}+a\ln a>0,$$

$$f(a)=a^2+\frac{1-\ln a}{a}-a>a^2-a+\frac{1-(a-1)}{a}>a^2-a-\frac{a-1}{a}=\frac{(a-1)^2(a+1)}{a}>0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},1\right)$，$(1,a)$ 上各有一个零点 ······························ 3 分

当 $a\le 2$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(1)$，且 $f(1)=2-a\ge 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内至多只有一个零点，

综上，实数 a 的取值范围是 $a>2$ ······························ 4 分

（2）设 $F(x)=f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$x>1$，

则 $F'(x)=f'(x)+\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=2(x-1)-\frac{2(x-1)}{x^3}+\frac{1-x^2}{x^2}\ln x$

$$=(x-1)\left[2-\frac{2}{x^3}-\frac{x+1}{x^2}\ln x\right]=\frac{x-1}{x^3}\left[2x^3-2-x(x+1)\ln x\right]$$

当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，

$2x^3-2-x(x+1)(x-1)=x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)>0$，

$\therefore 2x^3-2>x(x+1)(x-1)>x(x+1)\ln x$，

$\therefore F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

当 $x>1$ 时，$F(x)>F(1)=0$，

即当 $x>1$ 时，$f(x)>f\left(\frac{1}{x}\right)$ ……………………………………………………………………6 分

又因为函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$，

由（1）知，$0<x_1<1<x_2, 0<\frac{1}{x_2}<1$，

$\therefore f(x_1)=f(x_2)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$，

又 $\because f(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，$\therefore x_1<\frac{1}{x_2}$，

即 $x_1x_2<1$ ……………………………………………………………………………………8 分

（3）设 $G_1(x)=f(x)-\left(x+\frac{1}{x}-a\right)=x^2-\frac{\ln x}{x}-x$，

$G_1'(x)=2x-\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{2x^3-x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)+\ln x}{x^2}$，

$G_1'(1)=0$，当 $x\neq1$ 时，$G_1'(x)=\frac{(x-1)}{x^2}\left[(2x^2+x+1)+\frac{\ln x}{x-1}\right]$，

显然 $(2x^2+x+1)+\frac{\ln x}{x-1}>0$

$\therefore G_1(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，$(1,+\infty)$ 递增，

$\therefore G_1(x) \geq G_1(1)=0$，

即 $f(x)>x+\dfrac{1}{x}-a=h_1(x)$，

设 $h_1(x)$ 的零点为 $x_3,x_4\,(x_3<x_4)$, $x_4-x_3=\sqrt{a^2-4}$，

由图象可知 $x_3<x_1<x_2<x_4$，

$\therefore x_2-x_1<\sqrt{a^2-4}$ ……………………………………………………………… 10 分

设 $f(x)-\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-a\right)=\dfrac{1-\ln x}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x}\left(1-\ln x-\dfrac{1}{x}\right)$，

设 $G_2(x)=1-\ln x-\dfrac{1}{x}$，

易得 $G_2(x)\leq 0$ 恒成立，即 $f(x)<x^2+\dfrac{1}{x^2}-a=h_2(x)$，

设 $h_2(x)$ 的零点为 $x_5,x_6\,(x_5<x_6)$, $x_6^2-x_5^2=\sqrt{a^2-4}$，

由图象可知，$x_1<x_5<x_6<x_2$，

$\therefore x_1^2<x_5^2<x_6^2<x_2^2$，

$\therefore x_2^2-x_1^2>\sqrt{a^2-4}$，

$\therefore x_2-x_1<\sqrt{a^2-4}<x_2^2-x_1^2$ …………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！