

2021 年 1 月“八省联考”考前猜题卷

数 学

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-5 < x < 1\}$, $B = \{x | x^2 \leq 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(2,3)$ B. $[2,3)$
C. $(-2,1)$ D. $[-2,1)$

2. 设复数 z 满足 $(1+i)z=1$, 则 z 的虚部为

- A. $\frac{1}{2}$ B. -1
C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}i$

3. 已知 $1 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, 则 $\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 某市政府决定派遣 8 名干部（5 男 3 女）分成两个小组，到该市甲、乙两个县去检查扶贫工作，若要求每组至少 3 人，且女干部不能单独成组，则不同的派遣方案共有

- A. 240 种 B. 320 种
C. 180 种 D. 120 种

5. 下列命题中的真命题是

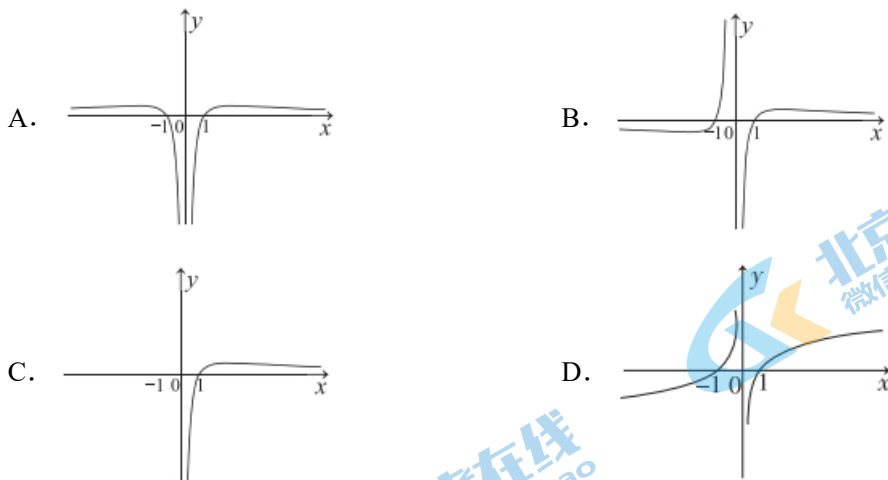
A. $\forall x \in N, x^2 \geq 1$

B. 命题“ $\exists a, b \in R, \frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ ”的否定

C. “直线 l_1 与直线 l_2 垂直”的充要条件是“它们的斜率之积一定等于 -1”

D. “ $m > -1$ ”是“方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线”的充分不必要条件

6. 函数 $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ 的大致图象是



7. 《九章算术》是中国古代张苍、耿寿昌所撰写的一部数学专著.是《算经十书》中最重要的一部,其中将有三条棱互相平行且有一个面为梯形的五面体称之为“羡除”,下列说法错误的是

- A. “羡除”有且仅有两个面为三角形 B. “羡除”一定不是台体
C. 不存在有两个面为平行四边形的“羡除” D. “羡除”至多有两个面为梯形

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数,且当 $x < 0$ 时,函数 $f(x) = xe^x + 1$,若关于 x 的函数

$F(x) = [f(x)]^2 - (a+1)f(x) + a$ 恰有 2 个零点,则实数 a 的取值范围为

- A. $\left(-\infty, 1 - \frac{1}{e}\right)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $\left(-1, \frac{1}{e} - 1\right) \cup \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$ D. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$, 则

- A. $a^3 > b^3$ B. $|a| > |b|$
C. $\frac{b}{a} > 1$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^b$

10. 已知 F_1 、 F_2 是双曲线 $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的上、下焦点, 点 M 是该双曲线的一条渐近线上的一点, 并且

以线段 F_1F_2 为直径的圆经过点 M ，则下列说法正确的是

- A. 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{2}x$
- B. 以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = 2$
- C. 点 M 的横坐标为 $\pm\sqrt{2}$
- D. $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

11. 在公比为 q 等比数列 $\{a_n\}$ 中， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1 = 1, a_5 = 27a_2$ ，则下列说法正确的是

- A. $q = 3$
- B. 数列 $\{S_n + 2\}$ 不是等比数列
- C. $S_5 = 120$
- D. $2\lg a_n = \lg a_{n-2} + \lg a_{n+2} (n \geq 3)$

12. 某同学在研究函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ 的性质时，受两点间距离公式的启发，将 $f(x)$ 变形

为 $f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-1)^2}$ ，则下列关于函数 $f(x)$ 的描述正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增
- B. 函数 $f(x)$ 的图象是中心对称图形
- C. 函数 $f(x)$ 的值域是 $[2\sqrt{2}, +\infty)$
- D. 方程 $f(f(x)) = 1 + \sqrt{5}$ 无实数解

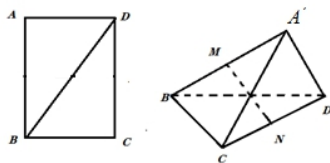
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (-1, m)$ ， $\vec{b} = (2, -3)$ ，若 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{b}$ ，则 $m =$ _____.

14. 二项式 $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 的二项展开式中的常数项是_____.

15. 将函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 为偶函数，则 φ 的最小值为_____.

16. 已知矩形 $ABCD$ 满足 $AB = 2\sqrt{3}$ ， $AD = 2$ ，若将 ABD 沿 BD 翻折到 $A'BD$ 的位置，使得平面 $A'BD \perp$ 平面 BCD ， M, N 分别为 $A'D, BC$ 的中点，则直线 MN 被四面体 $A' - BCD$ 的外接球所截得的线段长为_____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

从① $a=3$ ，② $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ，③ $3\sin B = 2\sin A$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中。若问题中的三

角形存在，求出 b 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由。

问题：是否存在 $\triangle ABC$ ，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $c = \sqrt{21}$ ， $3c\cos B = 3a + 2b$ ，_____？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答记分。

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n ，且满足 $S_n = 2a_n - 1$ ($n \in N^*$)。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及 S_n ；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = |S_n - 15|$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 T_n 。

19. (12 分)

东莞的轻轨给市民出行带来了很大的方便，越来越多的市民选择乘坐轻轨出行，很多市民都会开汽车到离家最近的轻轨站，将车停放在轻轨站停车场，然后进站乘轻轨出行，这给轻轨站停车场带来很大的压力。某轻轨站停车场为了解决这个问题，决定对机动车停车施行收费制度，收费标准如下：4 小时内（含 4 小时）每辆每次收费 5 元；超过 4 小时不超过 6 小时，每增加一小时收费增加 3 元；超过 6 小时不超过 8 小时，每增加一小时收费增加 4 元，超过 8 小时至 24 小时内（含 24 小时）收费 30 元；超过 24 小时，按前述标准重新计费。上述标准不足一小时的按一小时计费。为了调查该停车场一天的收费情况，现统计 1000 辆车的停留时间（假设每辆车一天内在该停车场仅停车一次），得到下面的频数分布表：

T (小时)	$(0,4]$	$(4,5]$	$(5,6]$	$(6,7]$	$(7,8]$	$(8,24]$
频数 (车次)	100	100	200	200	350	50

以车辆在停车场停留时间位于各区间的频率代替车辆在停车场停留时间位于各区间的概率。

(1) 现在用分层抽样的方法从上面 1000 辆车中抽取了 100 辆车进行进一步深入调研，记录并统计了停车

时长与司机性别的 2×2 列联表:

	男	女	合计
不超过 6 小时		30	
6 小时以上	20		
合计			100

完成上述列联表, 并判断能否有 90% 的把握认为“停车是否超过 6 小时”与性别有关?

(2)(i) X 表示某辆车一天之内(含一天)在该停车场停车一次所交费用, 求 X 的概率分布列及期望 $E(X)$;

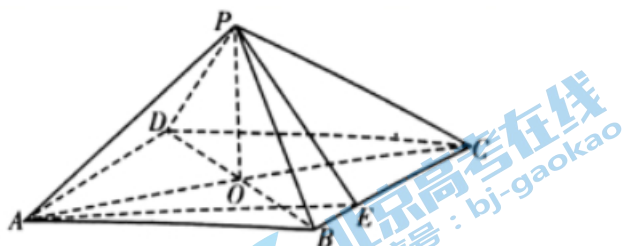
(ii) 现随机抽取该停车场内停放的 3 辆车, ξ 表示 3 辆车中停车费用大于 $E(X)$ 的车辆数, 求 $P(\xi \geq 2)$ 的概率.

参考公式及数据: $k^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025
k_0	0.780	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024

20. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, $PA=PC$, $BD \perp PA$, E 是 BC 上一点, 且 $EC=3BE$, 设 $AC \cap BD = O$.



(1) 证明: $PO \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 若 $\angle BAD = 60^\circ$, $PA \perp PE$, 求二面角 $A-PE-C$ 的余弦值.

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 其左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为坐标平面内的

一点, 且 $|\vec{OP}| = \frac{3}{2}$, $\vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = -\frac{3}{4}$, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

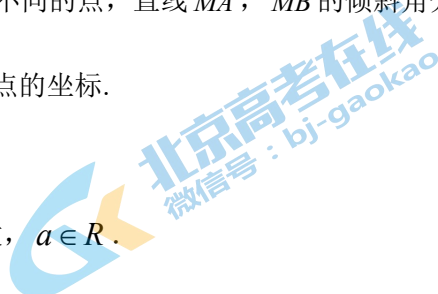
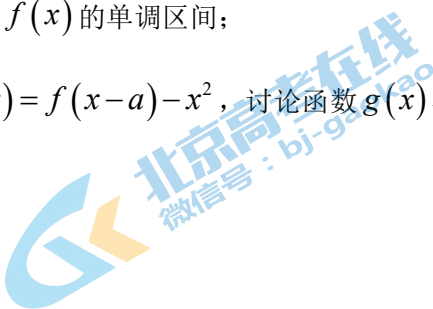
(2) 设 M 为椭圆 C 的左顶点, A, B 是椭圆 C 上两个不同的点, 直线 MA, MB 的倾斜角分别为 α, β , 且 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 证明: 直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x(x+a)$, 其中 e 是自然对数的底数, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $g(x) = f(x-a) - x^2$, 讨论函数 $g(x)$ 零点的个数, 并说明理由.



2021 年 1 月“八省联考”考前猜题卷

数 学

1. D 【解析】因为 $A = \{x | -5 < x < 1\}$, $B = \{x | x^2 \leq 4\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -2 \leq x < 1\}$.

2. C 【解析】由 $(1+i)z=1$ 得 $z = \frac{1}{1+i}i = \frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 所以 z 的虚部为 $-\frac{1}{2}$. 故选 C.

3. A 【解析】因为 $1 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, 所以 $1 - \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \sin\theta$, 所以

$$\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 1, \text{ 所以 } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

故选 A.

4. C 【解析】两组至少都是 3 人, 则分组中两组的人数分别为 3、5 或 4、4, 又因为 3 名女干部不能单独成一组, 则不同的派遣方案种数为 $\left(C_8^3 + \frac{C_8^4}{A_2} - 1\right)A_2^2 = 180$. 故选 C.

5. D 【解析】对于选项 A, 当 $x=0$ 时, $x^2 \geq 1$ 不成立, 故 A 错误;

对于选项 B, 命题“ $\exists a, b \in R, \frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ ”的否定是“ $\forall a, b \in R, \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq 2$ ”, 当 $a=3, b=1$ 不成立, 故 B 错误;

对于选项 C, 当一直线斜率为 0, 另一直线斜率不存在时, “它们的斜率之积一定等于 -1”不成立, 故 C 错误;

对于选项 D, 由方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线等价于 $(2+m)(m+1) > 0$, 即 $m < -2$ 或 $m > -1$, 所

以“ $m > -1$ ”是“方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线”的充分不必要条件, 故 D 正确. 故选 D.

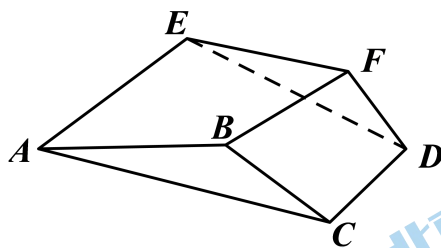
6. B 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于原点对称, 且 $f(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{-x} = -\frac{\ln x^2}{x} = -f(x)$, $\therefore f(x)$

为奇函数, 图象关于原点对称, 故 A, C 错误; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$, 故当 $x \in (0, e)$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 故 D 错误, B 正确. 故选

B.

7. D 【解析】如图所示, $AE \parallel BF \parallel CD$, 四边形 $ACDE$ 为梯形.



对选项 A, 由题知: “羡除”有且仅有两个面为三角形, 故 A 正确;

对选项 B, 因为 $AE \parallel BF \parallel CD$, 所以“羡除”一定不是台体, 故 B 正确;

对选项 C, 假设四边形 $ABFE$ 和四边形 $BCDF$ 为平行四边形,

则 $AE \parallel BF \parallel CD$, $AE = BF = CD$, 则四边形 $ACDE$ 为平行四边形,

与已知四边形 $ACDE$ 为梯形矛盾, 故不存在, C 正确.

对选项 D, 若 $AE \neq BF \neq CD$, 则“羡除”有三个面为梯形, 故 D 错误.

故选 D.

8. C 【解析】 $F(x) = (f(x)-1)(f(x)-a) = 0$, $f(x) = 1$ 或 $f(x) = a$,

$x < 0$ 时, $f(x) = xe^x + 1 < 1$, $f'(x) = (x+1)e^x$,

$x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减, $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增,

$\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$, 又 $f(x) < 1$, 因此 $f(x) = 1$ 无解.

此时 $f(x) = a$ 要有两解, 则 $1 - \frac{1}{e} < a < 1$,

又 $f(x)$ 是奇函数, $\therefore x > 0$ 时, $f(x) = 1$ 仍然无解, $f(x) = a$ 要有两解, 则 $-1 < x < \frac{1}{e} - 1$.

综上, $a \in \left(-1, \frac{1}{e} - 1\right) \cup \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$.

故选 C.

9. CD 【解析】 $\because \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0, \therefore b > a > 0, \therefore b^3 > a^3$, A 错误; $|a| < |b|$, B 错误; $\frac{b}{a} > 1$, C 正确; $\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^b$,

D 正确. 故选 CD.

10. ACD 【解析】由双曲线方程 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 知 $a = 2, b = \sqrt{2}$, 焦点在 y 轴, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \sqrt{2}x$,

A 正确: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6}$, 以 F_1F_2 为直径的圆的方程是 $x^2 + y^2 = 6$, B 错; 由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ y = \sqrt{2}x \end{cases}$ 得

$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -2 \end{cases}$, 由对称性知 M 点横坐标是 $\pm\sqrt{2}$, C 正确;

$S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2}|F_1F_2||x_M| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$, D 正确. 故选 ACD.

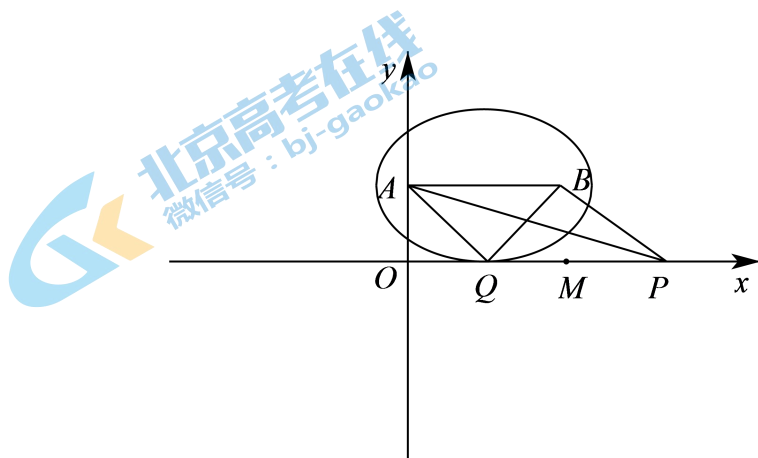
11. ABD 【解析】因为 $a_1 = 1, a_5 = 27a_2$, 所以有 $a_1 \cdot q^4 = 27a_1 \cdot q \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$, 因此选项 A 正确; 因为

$S_n = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$, 所以 $S_n + 2 = \frac{1-3^n}{1-3} + 2 = \frac{1}{2}(3^n + 3)$, 因为 $\frac{S_{n+1} + 2}{S_n + 2} = \frac{\frac{1}{2}(3^{n+1} + 3)}{\frac{1}{2}(3^n + 3)} = 1 + \frac{2}{1 + 3^{1-n}} \neq$ 常

数, 所以数列 $\{S_n + 2\}$ 不是等比数列, 故选项 B 正确; 因为 $S_5 = \frac{1}{2}(3^5 - 1) = 121$, 所以选项 C 不正确;

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3^{n-1} > 0$, 因为当 $n \geq 3$ 时, $\lg a_{n-2} + \lg a_{n+2} = \lg(a_{n-2} \cdot a_{n+2}) = \lg a_n^2 = 2\lg a_n$, 所以选项 D 正确. 故选 ABD.

12. ACD 【解析】设 $A(0,1)$, $B(2,1)$, $f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-1)^2}$ 表示 x 轴上点 $P(x,0)$ 到 A, B 两点的距离之和, 设 $Q(1,0)$, 以 A, B 为焦点, Q 为短轴上一个端点, 作椭圆, x 轴与此椭圆相切于点 Q , 当 P 从 Q 向右移动时, $|PA| + |PB|$ 逐渐增大, 即函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, A 正确; 当 P 与 Q 重合时, $|PA| + |PB|$ 最小, 最小值为 $2\sqrt{2}$, 因此 $f(x)$ 的值域是 $[2\sqrt{2}, +\infty)$, C 正确; 函数图象关于直线 $x=1$ 对称, 不是中心对称, B 错误; 当 $x=0$ 或 $x=2$ 时, $f(x) = 1 + \sqrt{5}$, 由于 $f(x) \geq 2\sqrt{2}$, 因此 $f(x) = 0$ 和 $f(x) = 2$ 都无解, D 正确. 故选 ACD.



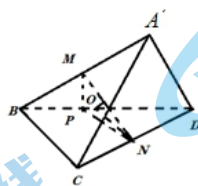
13. 8 【解析】因为 $\vec{a} = (-1, m)$, $\vec{b} = (2, -3)$, 所以 $\vec{a} + 2\vec{b} = (3, m-6)$. 因为 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{b}$, 所以

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 6 - 3(m - 6) = 0, \text{ 解得 } m = 8.$$

14. 15 【解析】因为 $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 的展开式的通项是 $C_6^r (\sqrt{x})^{6-r} (-1)^r (\frac{1}{x})^r = C_6^r (-1)^r x^{3-\frac{3r}{2}}$, 当 $3 - \frac{3r}{2} = 0$ 时, $r = 2$, 所以展开式中的常数项是 $C_6^2 (-1)^2 = 15$.

15. $\frac{\pi}{12}$ 【解析】函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 将函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 φ 个单位后, 得到函数 $y = 2 \sin(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 因为 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $2\varphi + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 则 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$. 当 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

16. $\frac{\sqrt{58}}{2}$ 【解析】过 M 做 $MP \perp BD$ 于点 P , 连接 PN , 因为平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 所以 $MP \perp PN$, 求得 $MP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BP = \frac{3}{2}$, 所以 $DP = \frac{5}{2}$, 在三角形 DPN 中, $\angle PDN = 30^\circ$, $DN = \sqrt{3}$, 所以 $PN = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 所以 $MN = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 由题意可知, 四面体 $ABCD$ 的外接球为 BD 中点, 设为 O , 过 O 做 $OH \perp MN$ 于 H , 连接 ON , 可求得 $ON = 1$, 从而得 $HN = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 所以 $OP = \sqrt{1 - \frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 因为球的半径为 2, 故所截得的线段长为 $2\sqrt{2^2 - (\frac{\sqrt{6}}{4})^2} = \frac{\sqrt{58}}{2}$.



17. (10 分)

【解析】解法 1: 由正弦定理, 得 $3 \sin C \cos B = 3 \sin[\pi - (B + C)] + 2 \sin B$,

整理得 $3 \sin B \cos C + 2 \sin B = 0$. 因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C = -\frac{2}{3}$. (5 分)

解法 2: 由 $3c \cos B = 3a + 2b$, 得 $3ac \cos B = 3a^2 + 2ab$,

由余弦定理, 得 $3(a^2 + c^2 - b^2) = 6a^2 + 4ab$, 整理得 $3(-a^2 + c^2 - b^2) = 4ab$,

即 $3abc \cos C + 2ab = 0$. 所以 $\cos C = -\frac{2}{3}$. (5 分)

选① $a = 3$. 由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 21 = 9 + b^2 - 6 \times b \times (-\frac{2}{3})$,

所以 $b^2 + 4b - 12 = 0$, 解得 $b = 2$ 或 $b = -6$ (舍去),

所以问题中的三角形存在. (10 分)

选② $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 故 $ab = 9$, (7 分)

由余弦定理可得 $c^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 21 = a^2 + b^2 + \frac{4}{3}ab$, 又 $a^2 + b^2 \geq 2ab$,

所以 $21 = a^2 + b^2 + \frac{4}{3}ab \geq \frac{10}{3}ab \Rightarrow ab \leq 6.3$, 与 $ab = 9$ 矛盾,

所以问题中的三角形不存在. (10 分)

选③ $3\sin B = 2\sin A$. 由正弦定理得, $3\sin B = 2\sin A \Rightarrow 3b = 2a$, (7 分)

由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 21 = \frac{21}{4}b^2$,

所以 $b = 2$ 或 $b = -2$ (舍去),

所以问题中的三角形存在. (10 分)

18. (12 分)

【解析】(1) 由 $S_n = 2a_n - 1$ 得: $S_1 = 2a_1 - 1$, 即 $a_1 = 1$,

由 $S_n = 2a_n - 1$ 得: $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 1$, 两式相减得: $a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n$,

即 $a_{n+1} = 2a_n$, 即数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, (4 分)

则 $a_n = 2^{n-1}$,

则 $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$. (6 分)

(2) 由 (1) 知: $b_n = |2^n - 16|$, 则 $b_n = \begin{cases} 16 - 2^n & (1 \leq n \leq 4) \\ 2^n - 16 & (n > 4) \end{cases}$,

则当 $1 \leq n \leq 4$ 时, $T_n = (16 - 2^1) + (16 - 2^2) + \cdots + (16 - 2^n)$

$$= 16n - (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) = 16n - \frac{2(1-2^n)}{1-2}$$

$$= 16n - 2^{n+1} + 2; \quad (9 \text{ 分})$$

当 $n > 4$ 时,

$$T_n = (16 - 2^1) + (16 - 2^2) + \cdots + (16 - 2^4) + (2^5 - 16) + (2^6 - 16) + (2^7 - 16) + \cdots + (2^n - 16)$$

$$= 2T_4 + (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) - 16n$$

$$= 2 \times 34 + \frac{2(1-2^n)}{1-2} - 16n = 2^{n+1} - 16n + 66,$$

$$\text{则 } T_n = \begin{cases} 16n - 2^{n+1} + 2 & (1 \leq n \leq 4) \\ 2^{n+1} - 16n + 66 & (n > 4) \end{cases}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. (12 分)

【解析】(1) 由题, 不超过 6 小时的频率为 $\frac{100+100+200}{1000} = 0.4$, 则 100 辆车中有 40 辆不超过 6 小时, 60 辆超过 6 小时, (2 分)

则 2×2 列联表如下:

	男	女	合计
不超过 6 小时	10	30	40
6 小时以上	20	40	60
合计	30	70	100

根据上表数据代入公式可得 $K^2 = \frac{100 \times (20 \times 30 - 10 \times 40)^2}{30 \times 70 \times 60 \times 40} = \frac{50}{63} \approx 0.794 < 2.706$

所以没有超过 90% 的把握认为“停车是否超过 6 小时”与性别有关. (5 分)

(2) (i) 由题意知: X 的可取值为 5, 8, 11, 15, 19, 30, 则

$$P(X=5) = \frac{1}{10}, P(X=8) = \frac{1}{10}, P(X=11) = \frac{1}{5}, P(X=15) = \frac{1}{5},$$

$$P(X=19) = \frac{7}{20}, P(X=30) = \frac{1}{20}. \quad (7 \text{ 分})$$

所以 X 的分布列为:

X	5	8	11	15	19	30
$P(X)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{20}$

(8 分)

$$\therefore E(X) = 5 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{10} + 11 \times \frac{1}{5} + 15 \times \frac{1}{5} + 19 \times \frac{7}{20} + 30 \times \frac{1}{20} = 14.65. \quad (9 \text{ 分})$$

(ii) 由题意得 $P(X > 14.65) = \frac{1}{5} + \frac{7}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$, 所以 $\xi \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$, (10 分)

所以 $P(\xi \geq 2) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = C_3^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 3 \times \frac{9}{25} \times \frac{2}{5} + \frac{27}{125} = \frac{81}{125}$. (12 分)

20. (12 分)

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore O$ 是 AC 的中点, $BD \perp AC$,

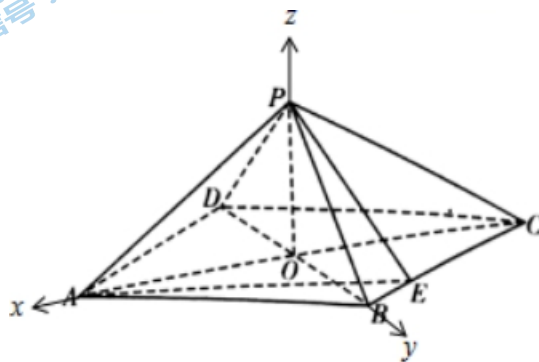
$\because BD \perp PA$, $PA \cap AC = A$, $\therefore BD \perp$ 平面 PAC , (2 分)

$\because PO \subset$ 平面 PAC , $\therefore BD \perp PO$.

$\because PA = PC$, O 是 AC 的中点, $\therefore PO \perp AC$.

$\because AC \subset$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, $AC \cap BD = O$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$. (5 分)



(2) 由 (1) 知, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \perp AC$.

$\therefore$ 以 O 为坐标原点, 以 OA , OB , OP 所在直线为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系.

设四边形 $ABCD$ 的边长为 4, $PO = a$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 都是等边三角形.

$\therefore OA = OC = 2\sqrt{3}$.

$\therefore P(0, 0, a)$, $A(2\sqrt{3}, 0, 0)$, $C(-2\sqrt{3}, 0, 0)$, $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$,

$\overrightarrow{PA} = (2\sqrt{3}, 0, -a)$, $\overrightarrow{PE} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -a\right)$, $\overrightarrow{EC} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$. (7 分)

$\because PA \perp PE$, $\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PE} = (2\sqrt{3}, 0, -a) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -a\right) = 0$,

即 $-3 + a^2 = 0$, 得 $a = \sqrt{3}$.

$$\therefore \overrightarrow{PA} = (2\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}), \quad \overrightarrow{PE} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -\sqrt{3}\right). \quad (9 \text{ 分})$$

设平面 PAE 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 2\sqrt{3}x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } z_1 = 2, \text{ 得 } \vec{m} = \left(1, \frac{5\sqrt{3}}{3}, 2\right);$$

设平面 PEC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{3}{2}y_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{3}{2}y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_2 = -1, \text{ 得 } \vec{n} = (-1, \sqrt{3}, 2).$$

设二面角 $A-PE-C$ 的平面角为 θ , 由图可得, θ 为钝角,

$$\text{则 } \cos \theta = -\frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\therefore \text{二面角 } A-PE-C \text{ 的余弦值为 } -\frac{\sqrt{15}}{5}. \quad (12 \text{ 分})$$

21. (12 分)

【解析】(1) 设 $P(m, n)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

$$\text{由 } |\overrightarrow{OP}| = \frac{3}{2}, \quad \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -\frac{3}{4} \text{ 可得 } m^2 + n^2 = \frac{9}{4}, \quad (-c-m, -n) \cdot (c-m,$$

$$-n) = m^2 - c^2 + n^2 = \frac{9}{4} - c^2 = -\frac{3}{4},$$

即有 $c^2 = 3$, 即 $c = \sqrt{3}$, (2 分)

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 可得 } a = 2, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

$$\text{则椭圆的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由题意可得 $M(-2, 0)$,

若直线 AB 的斜率不存在, 即 $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$, 由题意可得直线 MA , MB 的斜率大于 0, 即 $y_1 y_2 > 0$,

矛盾；（6分）

因此直线 BA 的斜率存在，设其方程为 $y = kx + m$ ，联立椭圆方程 $x^2 + 4y^2 = 4$ ，

化为： $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0$ ， $\therefore \Delta = 64k^2m^2 - 16(1 + 4k^2)(m^2 - 1) > 0$ ，化为：

$$1 + 4k^2 > m^2.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1 + 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ 可得 } \tan \alpha \tan \beta = 1, \therefore \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 + 2} = 1,$$

$$\therefore (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (x_1 + 2)(x_2 + 2), \text{ 化为: } (k^2 - 1)x_1x_2 + (mk - 2)(x_1 + x_2) + m^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore (k^2 - 1) \cdot \frac{4(m^2 - 1)}{1 + 4k^2} + (mk - 2) \left(-\frac{8km}{1 + 4k^2}\right) + m^2 - 4 = 0, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{化为 } 3m^2 - 16km + 20k^2 = 0, \text{ 解得 } m = 2k, \text{ 或 } m = \frac{10}{3}k.$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程可以表示为 } y = kx + 2k \text{ (舍去), 或 } y = kx + \frac{10}{3}k,$$

$$\text{则直线 } AB \text{ 恒过定点 } \left(-\frac{10}{3}, 0\right). \quad (12 \text{ 分})$$

22. (12分)

【解析】(1) 因为 $f(x) = e^x(x + a)$ ，所以 $f'(x) = e^x(x + a + 1)$. (1分)

由 $f'(x) > 0$ ，得 $x > -a - 1$ ；由 $f'(x) < 0$ ，得 $x < -a - 1$.

所以 $f(x)$ 的增区间是 $(-a - 1, +\infty)$ ，减区间是 $(-\infty, -a - 1)$. (3分)

$$(2) \quad g(x) = f(x - a) - x^2 = xe^{x-a} - x^2 = x(e^{x-a} - x).$$

由 $g(x) = 0$ ，得 $x = 0$ 或 $e^{x-a} - x = 0$. (6分)

设 $h(x) = e^{x-a} - x$ ，又 $h(0) = e^{-a} \neq 0$ ，即 $x = 0$ 不是 $h(x)$ 的零点，

故只需再讨论函数 $h(x)$ 零点的个数. (5分)

$$\text{因为 } h'(x) = e^{x-a} - 1,$$

所以当 $x \in (-\infty, a)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减；当 $x \in (a, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增.

所以当 $x=a$ 时, $h(x)$ 取得最小值 $h(a)=1-a$. (6分)

①当 $h(a)>0$, 即 $a<1$ 时, 无零点;

②当 $h(a)=0$, 即 $a=1$ 时, $h(x)>0$, $h(x)$ 有唯一零点; (8分)

③当 $h(a)<0$, 即 $a>1$ 时, 因为 $h(0)=e^{-a}>0$, 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上有且只有一个零点.

令 $x=2a$, 则 $h(2a)=e^a-2a$.

设 $\varphi(a)=h(2a)=e^a-2a$ ($a>1$), 则 $\varphi'(a)=e^a-2>0$, 所以 $\varphi(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\forall a \in (1, +\infty)$, 都有 $\varphi(a) \geq \varphi(1)=e-2>0$, 所以 $h(2a)=\varphi(a)=e^a-2a>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有且只有一个零点, 所以当 $a>1$ 时, $h(x)$ 有两个零点

综上, 当 $a<1$ 时, $g(x)$ 有一个零点; 当 $a=1$ 时, $g(x)$ 有两个零点; 当 $a>1$ 时, $g(x)$ 有三个零点.

(12分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯