

## 高三数学试卷

2021年11月

本试卷共2页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。

1. 直线  $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$  的倾斜角为

- A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $\frac{2\pi}{3}$       D.  $\frac{5\pi}{6}$

2. 设函数  $y = \sqrt{4 - x^2}$  的定义域为 A，函数  $y = \lg(1 - x)$  的定义域为 B，则  $A \cap B =$

- A. (1, 2)      B. (1, 2]      C. (-2, 1)      D. [-2, 1)

3. 若非零平面向量  $a, b$  满足  $|a + b| = |a - b|$ ，则

- A.  $a \parallel b$       B.  $|a| = |b|$       C.  $a \perp b$       D.  $a = b$

4. 某同学用“五点法”画函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 在某一个周期内的图象

时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A \sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

根据这些数据，要得到函数  $y = A \sin \omega x$  的图象，需要将函数  $f(x)$  的图象

- A. 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位      B. 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位      D. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

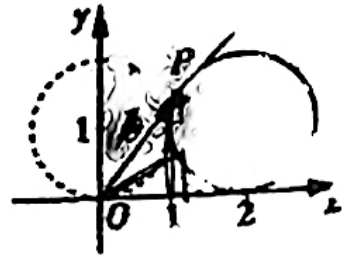
11. 已知  $a \in \mathbb{R}$ ， $i$  为虚数单位，若  $\frac{a-i}{2+i}$  为实数，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_。

12. 已知  $(1+3x)^n$  的展开式中含有  $x^2$  项的系数是 54，则  $n$  的值为\_\_\_\_\_。

13. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ，则圆心  $C$  到直线  $2x - y - 3 = 0$  的距离为\_\_\_\_\_。

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$  则满足  $f(x) - (x+1) > 1$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

15. 如图，在平面直角坐标系  $xOy$  中，一个单位圆的圆心的初始位置在  $(0, 1)$ ，此时圆上一点  $P$  的位置在  $(0, 0)$ ，圆在  $x$  轴上沿正向滚动。当圆滚动到圆心位于  $(2, 1)$  时， $\overline{OP}$  的坐标为\_\_\_\_\_。



三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答题写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. (14 分) 在平面四边形  $ABCD$  中， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BD = 5$ 。

(I) 求  $\cos \angle ADB$ ；

(II) 若  $DC = 2\sqrt{2}$ ，求  $BC$ 。

17. (14 分) 我国经济已由高速增长阶段转向高质量发展阶段。货币政策是宏观经济调控的重要手段之一，对我国经济平稳运行、高质量发展发挥着越来越重要的作用。某数学课外活动小组为了研究人民币对某国货币的汇率与我国经济发展的关系，统计了某周五个工作日人民币对该国货币汇率的开盘价和收盘价，如下表：

	周一	周二	周三	周四	周五
开盘价	165	166	171	173	
收盘价	165	165	170	174	171

(I) 已知这 5 天开盘价的中位数与收盘价的中位数相同，求  $a$  的值；

(II) 在 (I) 的条件下，从这 5 天中随机选取 3 天，其中开盘价比当日收盘价低的天数记为  $X$ ，求  $X$  的分布列及数学期望  $E(X)$ ；

(III) 在下一周的第一个工作日，收盘价为何值时，这 6 天收盘价的方差最小。(只需写出结论)

5. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\tan A \tan B > 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 为锐角三角形”的

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

6. 若函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 $M$ , 最小值是 $m$ , 则 $M - m$ 的值

- A. 与 $a$ 有关, 且与 $b$ 有关
- B. 与 $a$ 有关, 但与 $b$ 无关
- C. 与 $a$ 无关, 且与 $b$ 无关
- D. 与 $a$ 无关, 但与 $b$ 有关

7. 关于函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ , 下列说法正确的是

- A.  $f(x)$ 的一个周期是 $\pi$
- B.  $f(x)$ 的最小值为2
- C.  $f(x)$ 的图像关于 $y$ 轴对称
- D.  $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

8. 地震里氏震级是地震强度大小的一种度量. 地震释放的能量 $E$ (单位: 焦耳)与地震里氏震级 $M$ 之间的关系为 $\lg E = 4.8 + 1.5M$ . 已知两次地震的里氏震级分别为8.0级和7.5级,

若它们释放的能量分别为 $E_1$ 和 $E_2$ , 则 $\frac{E_1}{E_2}$ 的值所在的区间为

(参考数据:  $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$ )

- A. (4,5)
- B. (5,6)
- C. (6,7)
- D. (7,8)

9. 若过点 $(a, b)$ 可以作曲线 $y = e^x$ 的两条切线, 则

- A.  $0 < b < e^a$
- B.  $0 < a < e^b$
- C.  $e^a < b$
- D.  $e^b < a$

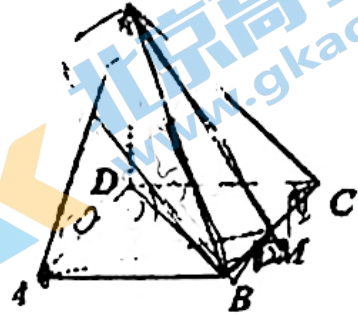
10. 现有 $n$ 个小球, 甲乙两位同学轮流且不放回抓球, 每次最少抓1个球, 最多抓3个球,

规定谁抓到最后一个球谁赢. 如果甲先抓, 那么以下推断正确的是

- A. 若 $n = 4$ , 则甲有必赢的策略
- B. 若 $n = 6$ , 则乙有必赢的策略
- C. 若 $n = 9$ , 则甲有必赢的策略
- D. 若 $n = 11$ , 则乙有必赢的策略

18. (14分) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是矩形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PD=DC=1$ ,  $M$  为  $BC$  的中点, 且  $PB \perp AM$ ,

- (I) 求  $BC$  的长;
- (II) 求二面角  $A-PM-B$  的余弦值;
- (III) 求点  $C$  到平面  $PAM$  的距离.



19. (14分) 已知函数  $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + a$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$ .

(I) 若曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线与直线  $y = kx + 1$  平行, 求  $k$  的值及  $a$  的取值范围;

(II) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(III) 若函数  $F(x) = e^x \cdot (a + \frac{1}{x} + \ln x)$ , 其中  $a \in (0, \ln 2)$ , 证明:  $F(x)$  存在极小值.

20. (15分) 已知椭圆  $W: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的右顶点分别为  $A, B$ , 右焦点为  $F$ ,

直线  $l_1: x = 4$ ,

(I) 若椭圆  $W$  的左顶点  $A$  关于直线  $x + my - 4 = 0$  的对称点在直线  $l_1$  上, 求  $m$  的值;

(II) 过  $F$  的直线  $l_2$  与椭圆  $W$  相交于不同的两点  $C, D$  (不与点  $A, B$  重合), 直线  $CB$  与直线  $l_1$  相交于点  $M$ , 求证:  $A, D, M$  三点共线.

21. (14分) 对于由有限个自然数组成的集合  $A$ , 定义集合  $S(A) = \{a + b \mid a \in A, b \in A\}$ , 记集合  $S(A)$  的元素个数为  $d(S(A))$ . 定义变换  $T$ , 变换  $T$  将集合  $A$  变换为集合

$T(A) = A \cup S(A)$ .

(I) 若  $A = \{0, 1, 2\}$ , 求  $S(A), T(A)$ ;

(II) 若集合  $A$  有  $n$  个元素, 证明: “ $d(S(A)) = 2n - 1$ ”的充要条件是“集合  $A$  中的所有元素能组成公差不为 0 的等差数列”;

(III) 若  $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  且  $\{1, 2, 3, \dots, 25, 26\} \subseteq T(T(A))$ , 求元素个数最少的集合  $A$ .

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: [www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018