高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x|\sqrt{x}\leqslant 2\}$，$N=\{x|-3<x<1\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$　B. $\{x|-3<x\leqslant 4\}$　C. $\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$　D. $\{x|0\leqslant x<1\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{1+3i}{3-mi}(m\in\mathbf{R})$ 是纯虚数，则 $m=$

A. 3　B. 1　C. -1　D. -3

3. 古代名著《九章算术》中记载了求"方亭"体积的问题，方亭是指正四棱台. 今有一个方亭型的水库，该水库的下底面的边长为 20 km，上底面的边长为 40 km，若水库的最大蓄水量为 $\dfrac{28}{3}\times 10^9\ \text{m}^3$，则水库深度（棱台的高）为

A. 10 m　B. 20 m　C. 30 m　D. 40 m

4. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，过焦点 F 的直线 $4x+3y-4=0$ 与 C 在第四象限交于 M 点，则 $|MF|=$

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_4=36$，$S_7=105$，则 $\dfrac{a_7}{a_4}=$

A. 3　B. $\dfrac{8}{3}$

C. 2　D. $\dfrac{9}{5}$

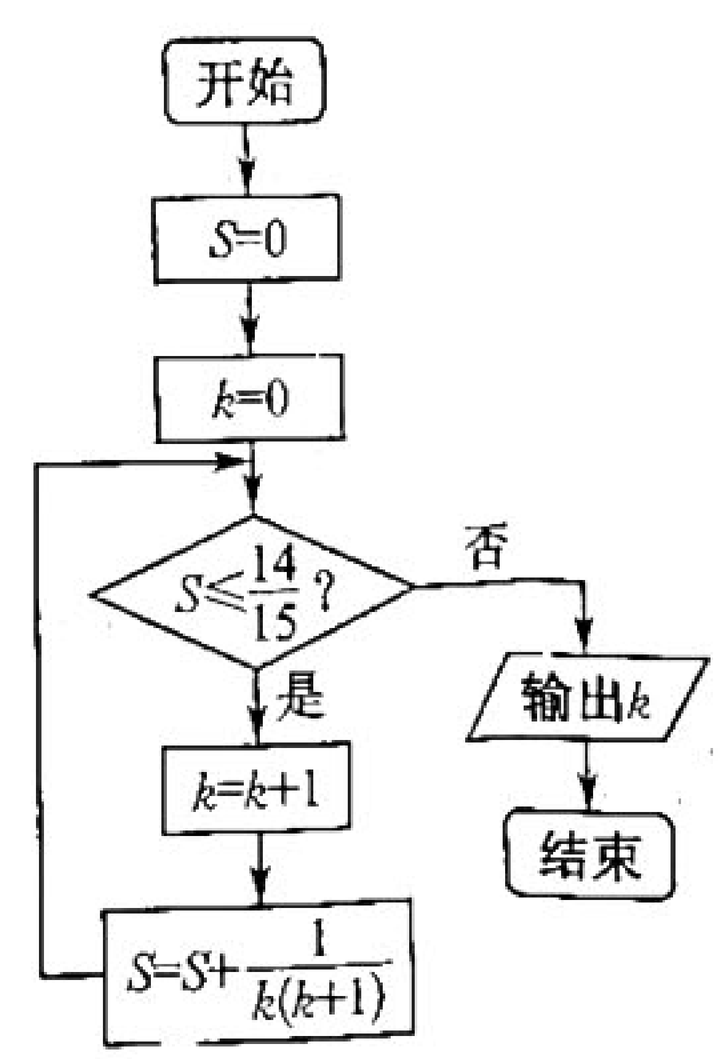
6. 执行如图所示的程序框图，则输出的 k 的值为

A. 14

B. 15

C. 16

D. 17



7. 某部门统计了某地区今年前 7 个月在线外卖的规模如下表：

月份代号 x	1	2	3	4	5	6	7
在线外卖规模 y(百万元)	11	13	18	★	28	★	35

其中 4、6 两个月的在线外卖规模数据模糊，但这 7 个月的平均值为 23. 若利用回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 来拟合预测，且 7 月相应于点(7,35)的残差为 -0.6，则 $\hat{a}-\hat{b}=$

A. 1.0　　B. 2.0　　C. 3.0　　D. 4.0

8. 已知 $\left(2x-\frac{1}{mx}-1\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 -40，则实数 $m=$

A. 4　　B. 2　　C. -2　　D. -4

9. 记函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)+b\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 T，若 $f\left(\frac{T}{4}\right)=-2$，且函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},-3\right)$ 对称，则当 ω 取最小值时，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

10. 已知曲线 $y=f(x)=2e^x$ 在点 A 处的切线 l_1 与 x 轴交于点 B，曲线 $y=g(x)=-2e^x$ 在点 C 处的切线 l_2 与 x 轴交于点 D，若 $l_1\perp l_2$，则 $|AB|+|CD|$ 的最小值为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{2}$

11. 已知 F 是双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，A 是 E 的右支上一点，若 $|AF|=a$，$|OA|=b$，则 E 的离心率为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. 2

12. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)-g(1+x)=2$，$g(x)+f(3-x)=4$，若 $g(x)$ 为偶函数，$f(3)=1$，则 $\sum_{k=1}^{28}g(k)=$

A. 24　　B. 26　　C. 28　　D. 30

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(-1+a,2-a)$，$\boldsymbol{n}=(3-a,4+a)$，若 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})/\!/\boldsymbol{m}$，则实数 $a=$________.

14. 写出与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 都相切的一条直线的方程________.

15. 已知球 O 的半径为 2，四棱锥的顶点均在球 O 的球面上，当该四棱锥的体积最大时，其高为________.

16. 现取长度为 2 的线段 MN 的中点 M_1，以 MM_1 为直径作半圆，该半圆的面积为 S_1(图 1)，再取线段 M_1N 的中点 M_2，以 M_1M_2 为直径作半圆，所有半圆的面积之和为 S_2(图 2)，再取线段 M_2N 的中点 M_3，以 M_2M_3 为直径作半圆，所有半圆的面积之和为 S_3，以此类推，则 $\sum_{i=1}^{n}iS_i=$________.

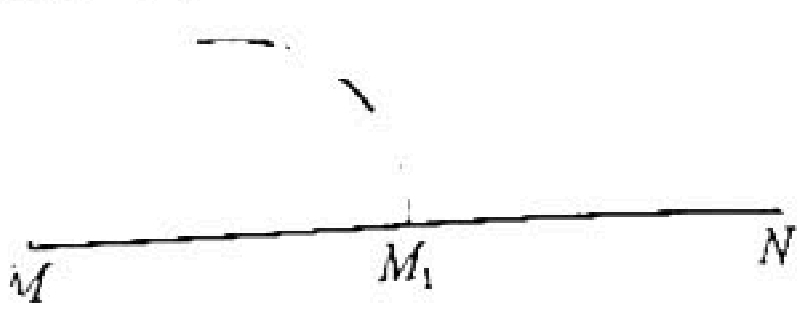


图1

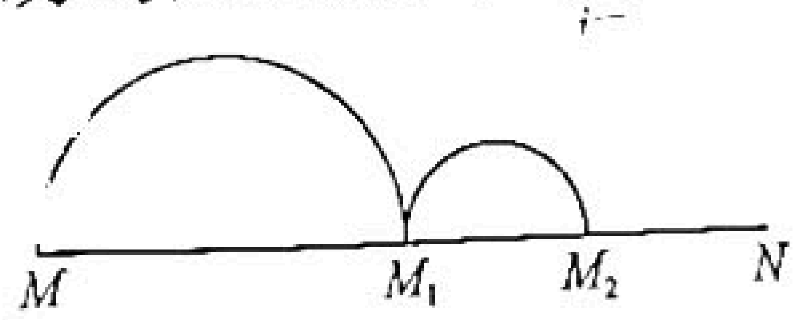


图2

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\sin(B-C)\tan A=\sin B\sin C$.

（1）证明：$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 为定值；

（2）若 $c=\sqrt{3}$，$\cos C=\dfrac{3}{4}$，求△ABC 的周长.

18.（12 分）

青少年近视问题备受社会各界广泛关注，某研究机构为了解学生对预防近视知识的掌握程度，对某校学生进行问卷调查，并随机抽取 200 份问卷，发现其得分（满分：100 分）都在区间[50,100]中，并将数据分组，制成如下频率分布表：

分数	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频率	0.15	0.25	m	0.30	0.10

（1）试估计这 200 份问卷得分的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）；

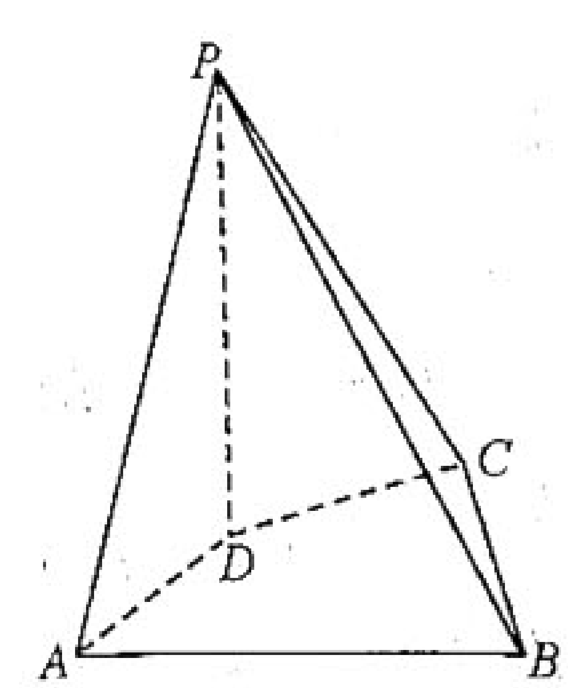
（2）用样本估计总体，用频率估计概率，从该校学生中随机抽取 4 人深入调查，设 X 为抽取的 4 人中得分在[70,100]的人数，求 X 的分布列与数学期望.

19.（12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$AB=4$，$AD=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{6}$.

（1）证明：平面 $PCD\perp$平面 PBC；

（2）若 $PD=4$，求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



20.(12分)

已知椭圆 E 的中心为坐标原点 O,对称轴分别为 x 轴、y 轴,且过 $A(-1,0)$,$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$两点.

(1)求 E 的方程;

(2)设 F 为椭圆 E 的一个焦点,M,N 为椭圆 E 上的两动点,且满足$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AF}=0$,当 M,O,N 三点不共线时,求△MON 的面积的最大值.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若 x_1,$x_2(x_1<x_2)$是 $f(x)$的两个极值点,证明:$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}a^2$.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(3^t+\frac{1}{3^t}\right),\\ y=3^t-\frac{1}{3^t}\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,已知直线 l 的极坐标方程为 $m\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-1=0$.

(1)求曲线 C 的普通方程;

(2)若 l 与 C 有两个不同公共点,求 m 的取值范围.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 3$ 的解集;

(2)设函数 $g(x)=|x-a|+|x-2|$,若对任意 $x_1\in\mathbf{R}$,都存在 $x_2\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立,求实数 a 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　因为 $M=\{x|\sqrt{x}\leqslant 2\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$N=\{x|-3<x<1\}$，所以 $M\cap N=\{x|0\leqslant x<1\}$.

2. B　$z=\frac{1+3i}{3-mi}=\frac{(1+3i)(3+mi)}{9+m^2}=\frac{3-3m+(9+m)i}{9+m^2}$，由题意可知，$\begin{cases}3-3m=0,\\9+m\neq 0,\end{cases}$ 解得 $m=1$.

3. A　设水库深度为 h km，由题意，$\frac{1}{3}(20^2+40^2+\sqrt{20^2\times 40^2})\cdot h=\frac{28}{3}$，解得 $h=0.01$ km，即 $h=10$ m.

4. C　由题意可知，F 的坐标为 $(1,0)$，则 $\frac{p}{2}=1$，所以 $p=2$，则抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，设 $M(x_0,-2\sqrt{x_0})$，由 $k_{MF}=\frac{-2\sqrt{x_0}}{x_0-1}=-\frac{4}{3}$，解得 $x_0=4$，所以 $|MF|=x_0+\frac{p}{2}=5$.

5. D　设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $S_4=36$，$S_7=105$，得 $\begin{cases}4a_1+6d=36,\\7a_1+21d=105,\end{cases}$ 解得 $a_1=3$，$d=4$，则 $a_7=a_1+6d=27$，$a_4=a_1+3d=15$，所以 $\frac{a_7}{a_4}=\frac{27}{15}=\frac{9}{5}$.

6. B　由题知 $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$，$k=15$ 时，$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)=\frac{15}{16}>\frac{14}{15}$，开始出现 $S>\frac{14}{15}$，故输出的 k 的值为 15.

7. B　$\bar{x}=\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4$，$\bar{y}=23$，所以 $4\hat{b}+\hat{a}=23$. 因为相应于点 $(7,35)$ 的残差为 -0.6，则点 $(7,35.6)$ 在回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 上，即 $7\hat{b}+\hat{a}=35.6$，解得 $\hat{a}=6.2$，$\hat{b}=4.2$，则 $\hat{a}-\hat{b}=2.0$.

8. A　法一：$\left(2x-\frac{1}{mx}-1\right)^6$ 的展开式中 x^3 的项只有 $C_6^1\left(2x-\frac{1}{mx}\right)^5(-1)$ 和 $C_6^3\left(2x-\frac{1}{mx}\right)^3(-1)^3$，因此 x^3 的系数为 $C_6^1C_5^1\times 16\times\frac{1}{m}-C_6^3C_3^0\times 8=\frac{480}{m}-160$，由题意可知，$\frac{480}{m}-160=-40$，解得 $m=4$.

法二：因为 $\left(2x-\frac{1}{mx}-1\right)^6=\left[1+\left(\frac{1}{mx}-2x\right)\right]^6$，$C_6^r\left(\frac{1}{mx}-2x\right)^r$，$C_6^rC_r^k(mx)^{k-r}(-2x)^k(0\leqslant k\leqslant r\leqslant 6)$，若 $2k-r=3$，则 $k=3$，$r=3$ 或 $k=4$，$r=5$，所以 x^3 的系数为 $C_6^3C_3^3\times(-2)^3\times m^0+C_6^5C_5^4\times(-2)^4\times m^{-1}=-160+\frac{480}{m}=-40$，解得 $m=4$.

9. D　由题意可知，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，$b=-3$，由 $f\left(\frac{T}{4}\right)=-2$，得 $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)-3=-2$，所以 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，又函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},-3\right)$ 对称，所以 $\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=6k+4$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $k=0$ 时，ω 取得最小值 4，则 $f(x)=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-3$，故 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-3=-2$.

10. C　法一：设 $A(x_1,2e^{x_1})$，$f'(x)=2e^x$，则 $f'(x_1)=2e^{x_1}$，所以直线 AB 的方程为 $y-2e^{x_1}=2e^{x_1}(x-x_1)$，令 $y=0$，得 $x=x_1-1$，则 $B(x_1-1,0)$，所以 $|AB|=\sqrt{4e^{2x_1}+1}$，设 $C(x_2,-2e^{x_2})$，$g'(x)=-2e^x$，则 $g'(x_2)=-2e^{x_2}$，同理 $|CD|=\sqrt{4e^{2x_2}+1}$，由 $l_1\perp l_2$ 得，$-4e^{x_1}\cdot e^{x_2}=-1$，所以 $e^{x_2}=\frac{1}{4e^{x_1}}$，则 $|CD|=\sqrt{\frac{1}{4e^{2x_1}}+1}$，所以 $|AB|+|CD|=\sqrt{4e^{2x_1}+1}+\sqrt{\frac{1}{4e^{2x_1}}+1}$，令 $4e^{2x_1}=t(t>0)$，则 $h(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt{\frac{1}{t}+1}(t>0)$，则 $h'(t)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{t+1}}+\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{t}{t+1}}\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{t^2-\sqrt{t}}{2t^2\sqrt{t+1}}$，令 $h'(t)>0$，解得 $t>1$，令 $h'(t)<0$，解得 $0<t<1$，所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(t)_{\min}=h(1)=2\sqrt{2}$，所以 $|AB|+|CD|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

法二：$|AB|+|CD|=\sqrt{4e^{2x_1}+1}+\sqrt{\frac{1}{4e^{2x_1}}+1}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{(1+4e^{2x_1})\times\left(\frac{1}{4e^{2x_1}}+1\right)}}\geqslant 2\sqrt{\sqrt{2+2\sqrt{4e^{2x_1}\times\frac{1}{4e^{2x_1}}}}}=$

$2\sqrt{2}$，当且仅当 $4e^{2x_1}=\frac{1}{4e^{2x_1}}$，即 $x_1=-\ln 2$ 时两个“$=$”同时成立，所以 $|AB|+|CD|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

11. A　法一：若点 A 是 E 的右顶点，则 $|AF|=a$，$|OA|=b$，$a+b=c$，又 $a^2=b^2=c^2$，得 $2ab=0$，这是不可能的. 不妨设点 $A(x_0,y_0)$ 在第一象限，由题意可知，$|OF|=c$，则 $|OA|^2+|AF|^2=|OF|^2$，所以 $\angle OAF=90^\circ$，在 $\triangle OAF$ 中，$\cos\angle AOF=\frac{b}{c}$，则 $x_0=b\cos\angle AOF=\frac{b^2}{c}$，$\sin\angle OFA=\frac{b}{c}$，则 $y_0=a\sin\angle OFA=\frac{ab}{c}$，将点 $\left(\frac{b^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$ 代入 E 的方程得 $\frac{b^4}{a^2c^2}-\frac{a^2b^2}{b^2c^2}=1$，整理得 $\frac{b^4-a^4}{a^2c^2}=1$，即 $(b^2-a^2)(b^2+a^2)=a^2c^2$，所以 $(b^2-a^2)c^2=a^2c^2$，则 $b^2=2a^2$，所以 E 的离心率为 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$.

法二：设点 $A(x_0,y_0)$ 在第一象限，由题意可知，$|OF|=c$，则 $|OA|^2+|AF|^2=|OF|^2$，所以 $\angle OAF=90^\circ$，在 $\triangle OAF$ 中，$\cos\angle AOF=\frac{b}{c}$，则 $x_0=b\cos\angle AOF=\frac{b^2}{c}$，由双曲线的第二定义可知 $\frac{|AF|}{x_0-\frac{a^2}{c}}=e$，即 $\frac{a}{x_0-\frac{a^2}{c}}=\frac{c}{a}$，解得 $x_0=\frac{2a^2}{c}$，所以 $b^2=2a^2$，因此 E 的离心率为 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$.

12. B　因为 $g(x)$ 为偶函数，所以 $g(-x)=g(x)$，由 $g(x)+f(3-x)=4$，得 $g(-x)+f(3+x)=4$，所以 $f(3-x)=f(3+x)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称. 由 $f(x)-g(1+x)=2$，得 $f(3-x)-g(4-x)=2$，将其代入 $g(x)+f(3-x)=4$，得 $g(x)+g(4-x)=2$，则 $g(-x)+g(4+x)=2$，所以 $g(x)+g(4+x)=2$，则 $g(x+4)+g(8+x)=2$，所以 $g(x)=g(8+x)$，则 $g(x)$ 的一个周期为 8. 由 $f(3)-g(4)=2$，得 $g(4)=-1$，由 $g(2)+g(2)=2$，得 $g(2)=1$，由 $g(x)+g(4-x)=2$，得 $g(1)+g(3)=2$，由 $g(x)+g(4+x)=2$，得 $g(1)+g(5)=2$，$g(2)+g(6)=2$，$g(3)+g(7)=2$，$g(4)+g(8)=2$，则 $g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)+g(6)+g(7)+g(8)=8$. $\sum_{k=1}^{28}g(k)=3[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)+g(6)+g(7)+g(8)]+g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=3\times8+2+1-1=26$.

13. $\frac{5}{4}$　$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(2,6)$，由 $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})/\!/\boldsymbol{m}$，得 $6(-1+a)-2(2-a)=0$，解得 $a=\frac{5}{4}$.

14. $y=2\sqrt{2}x-3-2\sqrt{2}$ 或 $y=-2\sqrt{2}x-3+2\sqrt{2}$ 或 $y=1$（答案不唯一，3 个中任填一个即可）　易知圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 外切，显然 $y=1$ 与这两圆都相切. 设直线 $y=kx+b$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 和 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 都相切，则 $\frac{|k+b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ 且 $\frac{|k+b-3|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，所以 $2|k+b|=|k+b-3|$. 令 $k+b=t$，则 $t^2+2t-3=0$，解得 $t=1$ 或 $t=-3$，当 $t=1$ 时，解得 $k=0$，此时 $b=1$，直线方程为 $y=1$；当 $t=-3$ 时，$\sqrt{1+k^2}=3$，解得 $k=\pm2\sqrt{2}$，当 $k=2\sqrt{2}$ 时，$b=-3-2\sqrt{2}$；当 $k=-2\sqrt{2}$ 时，$b=-3+2\sqrt{2}$，所以直线方程为 $y=2\sqrt{2}x-3-2\sqrt{2}$ 或 $y=-2\sqrt{2}x-3+2\sqrt{2}$.

15. $\frac{8}{3}$　四棱锥的底面内接于圆，当底面为正方形时，底面面积最大（论证如下：设底面四边形 $ABCD$ 的外接圆半径为 r，AC 与 BD 的夹角为 α，则四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD\leqslant\frac{1}{2}\times2r\times2r=2r^2$，当且仅当四边形 $ABCD$ 是正方形时，四边形 $ABCD$ 的面积取到最大值 $2r^2$）要使四棱锥的体积最大，则从顶点作底面的垂线过球心 O，该四棱锥为正四棱锥，设底面的边长为 a，四棱锥的高为 h，底面外接圆的半径为 $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，由题意可知，$r^2+(h-2)^2=4$，即 $\frac{1}{2}a^2+(h-2)^2=4$，所以 $a^2=2(4h-h^2)$，则 $0<h<4$，四棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}a^2\times h=\frac{2}{3}(4h^2-h^3)$，令 $f(x)=4x^2-x^3(0<x<4)$，则 $f'(x)=8x-3x^2$，由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{8}{3}$，由 $x\in\left(0,\frac{8}{3}\right)$，得 $f'(x)>0$，由 $x\in\left(\frac{8}{3},4\right)$，得 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{8}{3}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{8}{3},4\right)$ 上单调递减，则当 $x=\frac{8}{3}$ 时，$f(x)$ 取得极大值，也就是最大值，此时 $h=\frac{8}{3}$.

16. $\frac{\pi}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3n+4}{9}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{4}{9}\right]$　易知 $S_1=\frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi$，在第 n 个图中，从第 2 个半圆起，每个半圆的面

积为前一个半圆面积的$\frac{1}{4}$，

则 $S_n=\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]S_1=\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}S_1=\frac{\pi}{6}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

$\sum\limits_{i=1}^{n}iS_i=1\times S_1+2\times S_2+\cdots+n\times S_n=\frac{\pi}{6}\left[1+2+\cdots+n-\frac{1}{4}-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-\cdots-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

$=\frac{\pi}{6}\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4}-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-\cdots-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

设 $T_n=\frac{1}{4}+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$，①

$\frac{1}{4}T_n=\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$，②

由①－②得，$\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

所以 $T_n=\frac{4}{9}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]-\frac{n}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{4}{9}-\frac{3n+4}{9}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}iS_i=\frac{\pi}{6}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3n+4}{9}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{4}{9}\right]$.

17. (1)证明：由题知，$(\sin B\cos C-\cos B\sin C)\frac{\sin A}{\cos A}=\sin B\sin C$，

所以 $\sin A\sin B\cos C=\sin C(\sin B\cos A+\cos B\sin A)$，

则 $\sin A\sin B\cos C=\sin C\sin(A+B)=\sin^2 C$，

由正弦定理得，$ab\cos C=c^2$，………………………………………………………………………………………… 3 分

由余弦定理得，$ab\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c^2$，

整理得，$3c^2=a^2+b^2$，$\frac{a^2+b^2}{c^2}=3$，

故$\frac{a^2+b^2}{c^2}$为定值，得证. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)解：由 $c=\sqrt{3}$，$\cos C=\frac{3}{4}$ 及余弦定理可知，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

又 $3c^2=a^2+b^2$，所以 $c^2=3c^2-\frac{3}{2}ab$，则 $c^2=\frac{3}{4}ab$. …………………………………………………… 9 分

又 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=3c^2+\frac{8c^2}{3}=\frac{17c^2}{3}=17$，所以 $a+b=\sqrt{17}$，

故$\triangle ABC$的周长为$\sqrt{3}+\sqrt{17}$. ………………………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)由频率分布表可知，$m=1-0.15-0.25-0.30-0.10=0.20$. ………………………………… 2 分

这 200 份问卷得分的平均值估计为 $55\times0.15+65\times0.25+75\times0.20+85\times0.30+95\times0.10=74.5$. ……… 4 分

(2)从该校学生中随机抽取 1 人，此人得分在$[70,100]$的概率为$\frac{3}{5}$.

由题意可知，$X\sim B\left(4,\frac{3}{5}\right)$，$X$ 的所有可能取值为 0，1，2，3，4. ………………………………… 5 分

$P(X=0)=C_4^0\left(1-\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{16}{625}$，$P(X=1)=C_4^1\left(1-\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{96}{625}$，

$P(X=2)=C_4^2\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$，$P(X=3)=C_4^3\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$，

$P(X=4)=C_4^4\left(1-\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$

所以 X 的分布列为

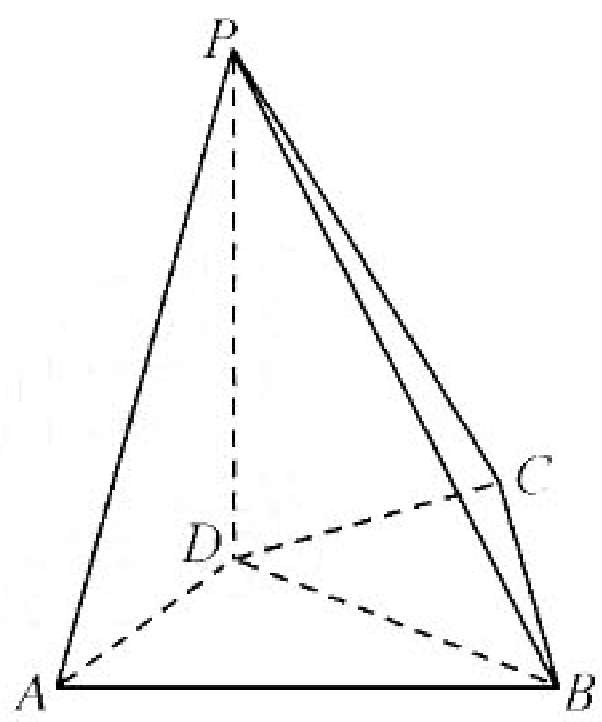
X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

…… 10 分

所以 $E(X)=0\times\frac{16}{625}+1\times\frac{96}{625}+2\times\frac{216}{625}+3\times\frac{216}{625}+4\times\frac{81}{625}=\frac{12}{5}$，

(或 $E(X)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$). ………………………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：连结 BD，



因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$， ………………………… 1 分

因为 $AB\perp AD$，$AB=4$，$AD=\sqrt{2}$，所以 $BD^2=AD^2+AB^2=18$，

又 $BC=2\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{6}$，

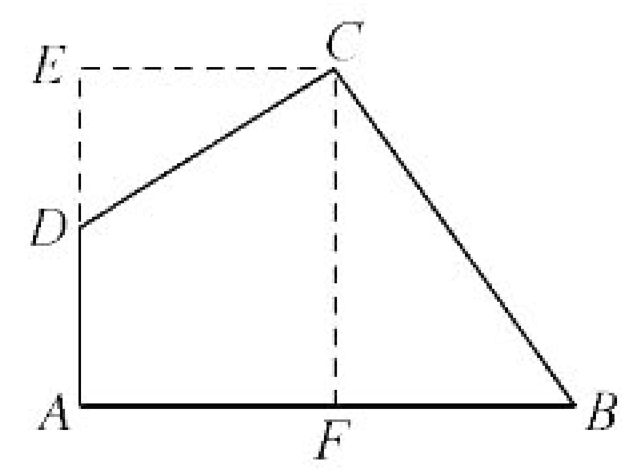
所以 $BD^2=CD^2+BC^2$，则 $BC\perp CD$. ………………………………………………………… 2 分

又 $PD\cap CD=D$，$PD\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $BC\perp$ 平面 PCD. ………………………………………………………………………………… 3 分

又 $BC\subset$ 平面 PBC，故平面 $PCD\perp$ 平面 PBC. ………………………………………………… 4 分

(2)解：延长 AD 与过 C 且平行于 AB 的直线交于点 E，

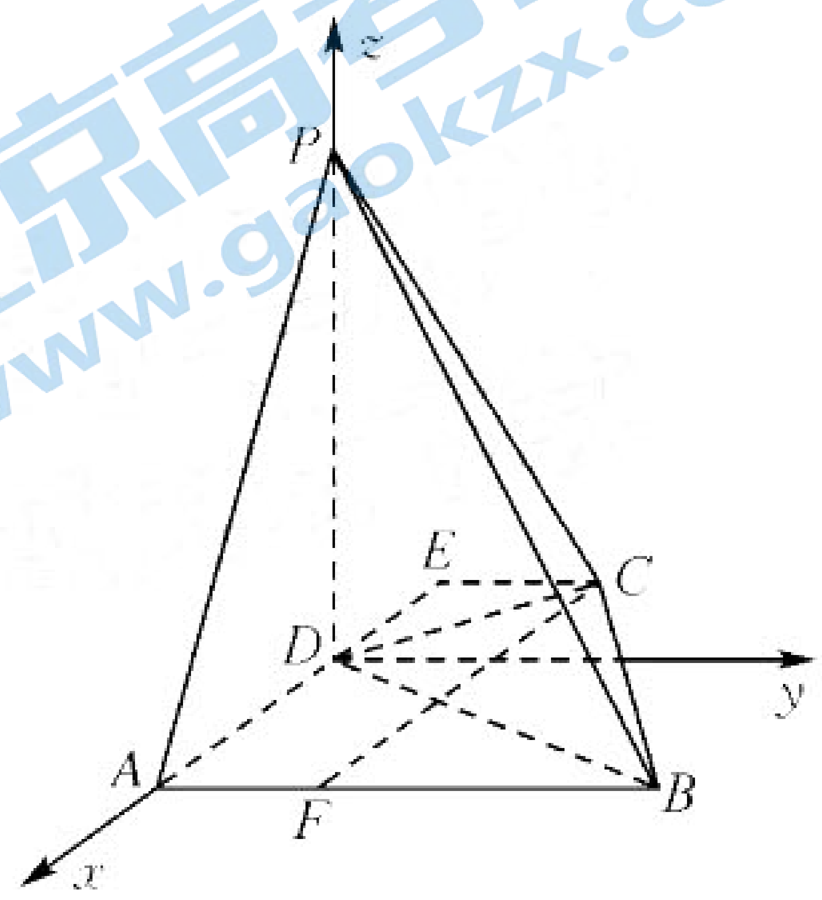


设 $DE=a$，$CE=b(a,b>0)$，则 $a^2+b^2=6$，

过 C 作 $CF\perp AB$，则 $CF=a+\sqrt{2}$，$BF=4-b$，所以 $(a+\sqrt{2})^2+(4-b)^2=12$，

联立解得 $\begin{cases}a=-\frac{5\sqrt{2}}{3},\\ b=\frac{2}{3}\end{cases}$ (舍去)，或 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=2.\end{cases}$ ………………………………………… 6 分

以 D 为坐标原点，以 DA，DP 所在直线分别为 x 轴，z 轴，以过 D 点且平行于 AB 的直线为 y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，



则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$B(\sqrt{2},4,0)$，$P(0,0,4)$，$C(-\sqrt{2},2,0)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},4,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},-2,0)$， ………………………… 8 分

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1+4y_1-4z_1=0,\\ 4y_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(2\sqrt{2},0,1)$， ……………… 9 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{2}x_2+4y_2-4z_2=0,\\ 2\sqrt{2}x_2+2y_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=\sqrt{2}$，则 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{2},-2,-\frac{3}{2}\right)$， … 10 分

于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{5}{2}}{3\times\sqrt{\frac{33}{4}}}=\frac{5\sqrt{33}}{99}$，

故二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $\frac{5\sqrt{33}}{99}$. ………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)设 E 的方程为 $sx^2+ty^2=1(s>0,t>0,s\neq t)$，

由题意可知，$\begin{cases}s=1,\\ \frac{s}{2}+t=1,\end{cases}$ 解得 $s=1$，$t=\frac{1}{2}$， ………………………………………………………… 2 分

故 E 的方程为 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$. ………………………………………………………………………… 3 分

(2)由椭圆的对称性,不妨设 F 为下焦点,则 $F(0,-1)$,所以$\overrightarrow{AF}=(1,-1)$,

因为$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AF}=0$,所以直线 MN 的斜率为 1.

设直线 MN 的方程为 $y=x+m(m\neq0)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$. ············ 4 分

由$\begin{cases}\dfrac{y^2}{2}+x^2=1,\\ y=x+m,\end{cases}$消去 y 并整理得 $3x^2-2mx+m^2-2=0$.

则 $\Delta=4m^2-4\times3\times(m^2-2)=8(3-m^2)>0$,所以 $m^2<3$ 且 $m\neq0$. ············ 6 分

$x_1+x_2=-\dfrac{2m}{3}$,$x_1x_2=\dfrac{m^2-2}{3}$,

所以 $|MN|=\sqrt{1+1^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{\left(-\dfrac{2m}{3}\right)^2-4\times\dfrac{m^2-2}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3-m^2}}{3}$. ············ 8 分

原点 O 到直线 MN 的距离为 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$. ············ 9 分

则$\triangle MON$ 的面积为 $S_{\triangle MON}=\dfrac{1}{2}\times|MN|\times d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3-m^2}}{3}\times\dfrac{|m|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{m^2(3-m^2)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{m^2+(3-m^2)}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $m^2=\dfrac{3}{2}$,即 $m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时,$\triangle MON$ 的面积最大. ············ 11 分

显然 $m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 满足 $m^2<3$ 且 $m\neq0$.

所以$\triangle MON$ 的面积的最大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ············ 12 分

21. 解:(1)易知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{ax^2-ax+4}{x^3}$, ············ 1 分

当 $a<0$ 时,由 $f'(x)=0$,得 $ax^2-ax+4=0$,由 $\Delta=a^2-16a>0$,解得 $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-16a}}{2a}>0$,$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16a}}{2a}<0$(舍去).

$x\in(0,x_1)$时,$f'(x)>0$,$x\in(x_1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16a}}{2a}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16a}}{2a},+\infty\right)$上单调递减. ············ 2 分

当 $a=0$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ············ 3 分

当 $0<a\leqslant16$ 时,$f'(x)\geqslant0$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ············ 4 分

当 $a>16$ 时,由 $f'(x)=0$,得 $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-16a}}{2a}$,$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16a}}{2a}$.

$x\in(0,x_1)\cup(x_2,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16a}}{2a}\right)$上单调递增,在$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16a}}{2a},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16a}}{2a}\right)$上单调递减,在$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16a}}{2a},+\infty\right)$上单调递增. ············ 5 分

(2)由(1)可知,$a>16$.

x_1,x_2 是方程 $ax^2-ax+4=0$ 的两根,则 $x_1+x_2=1$,$x_1x_2=\dfrac{4}{a}$, ············ 6 分

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{a(\ln x_2-\ln x_1)+\dfrac{2}{x_1^2}-\dfrac{2}{x_2^2}+\dfrac{a}{x_2}-\dfrac{a}{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{a(\ln x_2-\ln x_1)+\dfrac{2(x_2^2-x_1^2)}{x_1^2x_2^2}+\dfrac{a(x_1-x_2)}{x_1x_2}}{x_2-x_1}$$

将 $x_1+x_2=1$,$x_1x_2=\dfrac{4}{a}$代入上式可得$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{a(\ln x_2-\ln x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{a^2}{8}$. ············ 7 分

要证明$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{8}a^2$,需证$\dfrac{a(\ln x_2-\ln x_1)}{x_2-x_1}<\dfrac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}$.

即证$\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}<\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$. ………………………………………… 8分

因为$0<x_1<x_2$,所以$x_2-x_1>0$,只需证明$\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$.

设$\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=t$,则$t>1$,只需证明$\ln t^2<t-\frac{1}{t}$,即证$2\ln t-t+\frac{1}{t}<0(t>1)$. ………………………… 10分

令$g(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}(t>1)$,则$g'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0$,

所以$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减,可得$g(t)<2\ln 1-1+\frac{1}{1}=0$,所以$2\ln t-t+\frac{1}{t}<0(t>1)$.

故$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}a^3$. ………………………………………… 12分

22. 解:(1)因为$x=\frac{1}{2}\left(3^t+\frac{1}{3^t}\right)\geqslant 1$,且$x^2=\frac{1}{4}\left(3^{2t}+\frac{1}{3^{2t}}+2\right)$,$y^2=3^{2t}+\frac{1}{3^{2t}}-2$, ………………………… 2分

所以$4x^2-y^2=4$,则曲线C的普通方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1(x\geqslant 1)$. ………………………………………… 5分

(2)由$m\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-1=0$,化为直角坐标方程为$mx+y-1=0$. ………………………………………… 6分

由$\begin{cases}mx+y-1=0,\\ x^2-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$消去$y$并整理得$(4-m^2)x^2+2mx-5=0$, ………………………………………… 8分

则$\begin{cases}4-m^2\neq 0,\\ \Delta=4m^2+20(4-m^2)>0,\\ -\frac{2m}{4-m^2}>0,\\ \frac{-5}{4-m^2}>0,\end{cases}$ 解得$2<m<\sqrt{5}$,

故m的取值范围为$(2,\sqrt{5})$. ………………………………………… 10分

23. 解:(1)$f(x)=\begin{cases}-2x-\frac{1}{2},x<-1,\\ \frac{3}{2},-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2x+\frac{1}{2},x>\frac{1}{2},\end{cases}$ ………………………………………… 2分

当$x<-1$时,由$-2x-\frac{1}{2}\leqslant 3$,得$-\frac{7}{4}\leqslant x<-1$;

当$-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时,$f(x)\leqslant 3$恒成立;

当$x>\frac{1}{2}$时,由$2x+\frac{1}{2}\leqslant 3$,得$\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{5}{4}$.

综上,$f(x)\leqslant 3$的解集为$\left\{x\middle|-\frac{7}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4}\right\}$. ………………………………………… 5分

(2)因为对任意$x_1\in\mathbf{R}$,都存在$x_2\in\mathbf{R}$,使得$f(x_1)=g(x_2)$,

所以$\{y|y=f(x)\}\subseteq\{y|y=g(x)\}$. ………………………………………… 6分

又$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x+1|\geqslant\left|x-\frac{1}{2}-(x+1)\right|=\frac{3}{2}$,$g(x)=|x-a|+|x-2|\geqslant|a-2|$,等号都能取到, …… 8分

所以$\frac{3}{2}\geqslant|a-2|$,解得$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{7}{2}$,

所以实数a的取值范围是$\left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$. ………………………………………… 10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。