秘密★启用前

2024届云南三校高考备考实用性联考卷（一）
数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的选项中，只有一个选项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，$B=\{x\mid x(x-3)>0\}$，则集合 $A\cup B=$

A. $\{x\mid -1<x<3\}$　　B. $\{x\mid x<2$ 或 $x>3\}$

C. $\{x\mid 1<x<2\}$　　D. $\{x\mid x<0$ 或 $x>3\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{3+2i}{1+i}$，则 z 的虚部是

A. $-\dfrac{1}{2}i$　　B. $-\dfrac{5}{2}i$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

3. 定义：$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，其中 θ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角. 若 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 等于

A. 6　　B. −6　　C. −8　　D. 8

4. 垃圾分类是指按一定规定或标准将垃圾分类储存、投放和搬运，从而转变成公共资源的一系列活动，做好垃圾分类是每一位公民应尽的义务. 已知某种垃圾的分解率 v 与时间 t（月）近似地满足关系 $v=a\cdot b^{t}$（其中 a，b 为正常数），经过5个月，这种垃圾的分解率为5%，经过10个月，这种垃圾的分解率为10%，那么这种垃圾完全分解大约需要经过（　　）个月.（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

A. 20　　B. 27　　C. 32　　D. 40

5. 某调查机构对某地区互联网行业进行了调查统计，得到如图1甲所示的该地区的互联网行业从业者年龄分布饼状图和图乙所示的90后从事互联网行业的岗位分布条形图，且据统计知该地区互联网行业从业人员中从事运营岗位的人员比例为0.28，现从该地区互联网行业从业人员中选出1人，若此人从事运营岗位，则此人是90后的概率为

（注：90后指1990年及以后出生，80后指1980~1989年之间出生，80前指1979年及以前出生.）

A. 0.28

B. 0.34

C. 0.56

D. 0.61

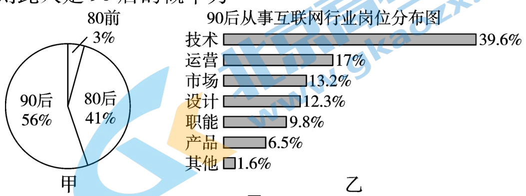


图1

6. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{12}$ 对称，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称　　B. $g(x)$ 是奇函数

C. $g(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$ 上单调递减　　D. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\ 0\right)$ 对称

7. 已知 $a=\log_{16}9$，$b=\log_{25}16$，$c=e^{-2}$，则

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

8. 已知函数 $f(x)=ax^2-4ax+\ln x$，则 $f(x)$ 单调递增的一个充分不必要条件可以是

A. $a\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$　　B. $a\in\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$

C. $a\in\left(\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$　　D. $a\in\left(-\infty,\ \dfrac{1}{4}\right)$

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

9. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数满足 $f(x+2)=f(x-2)$，且当 $x\in[0,\ 2]$ 时，$f(x)$ 是减函数，则下列四个命题中正确的是

A. $T=4$

B. 直线 $x=-2$ 为函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,\ 9]$ 上存在3个零点

D. 若 $f(x)=m$ 在区间 $[-4,\ 0]$ 上的根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-2$

10. 点 P 是直线 $y=3$ 上的一个动点，过点 P 作圆 $x^2+y^2=4$ 上的两条切线，A，B 为切点，则

A. 存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$　　B. 弦长 AB 的最小值为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

C. 点 A，B 在以 OP 为直径的圆上　　D. 线段 AB 经过一个定点

11. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n^2-a_{n-1}^2=p(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*$，$p$ 为非零常数)，则称 $\{a_n\}$ 为“等方差数列”，p 称为“公方差”，下列对“等方差数列”的判断正确的是

A. $\{(-3)^n\}$ 是等方差数列

B. 若正项等方差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且 a_1，a_2，a_4 是等比数列，则 $a_n=\sqrt{n}$

C. 等比数列不可能为等方差数列

D. 存在数列 $\{a_n\}$ 既是等差数列，又是等方差数列

12. 如图2，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，若点 M 在线段 BC_1 上运动，则下列结论正确的是

A. 直线 A_1M 可能与平面 ACD_1 相交

B. 三棱锥 $A-MCD$ 与三棱锥 D_1-MCD 的体积之和为 $\dfrac{4}{3}$

C. $\triangle AMC$ 的周长的最小值为 $8+4\sqrt{2}$

D. 当点 M 是 BC_1 的中点时，CM 与平面 AD_1C_1 所成角最大

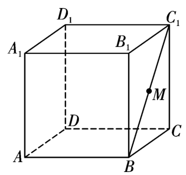


图2

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 某次数学考试中，学生成绩 X 服从正态分布$(105, \delta^2)$. 若 $P(90\leqslant X\leqslant 120)=\dfrac{1}{2}$，则从参加这次考试的学生中任意选取 3 名学生，恰有 2 名学生的成绩高于 120 的概率是________.

14. 已知 $f(x)=\log_2 x(1\leqslant x\leqslant 16)$，设 $g(x)=f^2(x)+f(x^2)$，则函数 $y=g(x)$ 的最大值为________.

15. 曲线 $y=(x-4)e^x$ 过坐标原点的切线方程为________.

16. 已知双曲线方程为 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$，左焦点 F_1 关于一条渐近线的对称点在另一条渐近线上，则该双曲线的离心率为________.

四、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$是等比数列，满足 $a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_2=4$，且 $1+a_2$ 是 a_1 与 a_3 的等差中项.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2 a_n$，S_n 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，记 $T_n=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}$，求 T_n 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $c\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin C$.

（1）求角 A；

（2）若 $a=\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$ 周长的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

如图 3，在四棱锥 $P-OABC$ 中，已知 $OA=OP=1$，$CP=2$，$AB=4$，$\angle CPO=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle AOC=\dfrac{\pi}{2}$.

（1）证明：$CO\perp$平面 AOP；

（2）若 $PA=\sqrt{3}$，求平面 POC 与平面 PAB 所成夹角的余弦值.

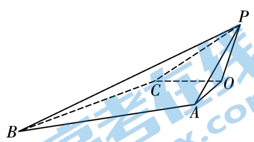


图 3

20.（本小题满分 12 分）

某企业拥有甲、乙两条零件生产线，为了解零件质量情况，采用随机抽样方法从两条生产线共抽取 180 个零件，测量其尺寸（单位：mm）得到如下统计表，其中尺寸位于［55，58）的零件为一等品，位于［54，55）和［58，59）的零件为二等品，否则零件为三等品.

生产线	［53，54）	［54，55）	［55，56）	［56，57）	［57，58）	［58，59）	［59，60］
甲	4	9	23	28	24	10	2
乙	2	14	15	17	16	15	1

（1）完成 2×2 列联表，依据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验能否认为零件为一等品与生产线有关联？

	一等品	非一等品	合计
甲			
乙			
合计			

（2）将样本频率视为概率，从甲、乙两条生产线中分别随机抽取 1 个零件，每次抽取零件互不影响，以 ξ 表示这 2 个零件中一等品的数量，求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$；

（3）已知该企业生产的零件随机装箱出售，每箱 60 个. 产品出厂前，该企业可自愿选择是否对每箱零件进行检验. 若执行检验，则每个零件的检验费用为 5 元，并将检验出的三等品更换为一等品或二等品；若不执行检验，则对卖出的每个三等品零件支付 120 元赔偿费用. 现对一箱零件随机检验了 20 个，检出了 1 个三等品. 将从两条生产线抽取的所有样本数据的频率视为概率，以整箱检验费用与赔偿费用之和的期望作为决策依据，是否需要对该箱余下的所有零件进行检验？请说明理由.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$；$x_{0.05}=3.841$.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为 M_1，M_2，T 为椭圆上异于 M_1，M_2 的动点，设直线 TM_1，TM_2 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{3}{4}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设动直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，O 为坐标原点，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，$\triangle OAB$ 的面积是否存在最小值？若存在，求出这个最小值；若不存在，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=(x-1)^2e^x-\dfrac{a}{3}x^3+ax$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $a=0$ 时，证明：函数 $g(x)=f(x)+\ln x-\dfrac{1}{2}x^2$ 有且仅有一个零点.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

2024届云南三校高考备考实用性联考卷（一）
数学参考答案

一、**单项选择题**（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	B	B	D	A	B

二、**多项选择题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AB	BCD	BC	BD

三、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\dfrac{9}{64}$	8	$y=-e^2x$	2

四、**解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）由题意设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

由题意得 $\begin{cases}q>1,\\ a_1q=4,\\ 2(1+a_1q)=a_1+a_1q^2,\end{cases}$ ……………………（2 分）

解得 $q=2$ 或 $q=\dfrac{1}{2}$(舍去)，……………………（3 分）

故 $a_n=2^n$． ……………………（4 分）

（2）由（1）得 $a_n=a_2q^{n-2}=2^n$，则 $b_n=\log_2 a_n=n$，所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，

故 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，……………………（6 分）

所以 $T_n=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}$

$=\dfrac{2}{1\times2}+\dfrac{2}{2\times3}+\cdots+\dfrac{2}{n(n+1)}$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$. ……………………………………………………………………（8 分）

由于 $n\geqslant 1$，得 $0<\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$，

所以 $1\leqslant T_n<2$，

故 T_n 的取值范围是 $[1,\ 2)$. ……………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $c\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin C$，可得 $c\sin\left(\dfrac{\pi-A}{2}\right)=c\cos\dfrac{A}{2}=a\sin C$，

所以由正弦定理可得 $\sin C\cos\dfrac{A}{2}=\sin A\sin C$，……………………………………（1 分）

又 C 为三角形内角，$\sin C\neq 0$，

所以 $\cos\dfrac{A}{2}=\sin A=2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，……………………………………（2 分）

因为 $A\in(0,\ \pi)$，$\dfrac{A}{2}\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\dfrac{A}{2}>0$，

所以 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}$，……………………………………………………（3 分）

可得 $\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………（4 分）

（2）由（1）知 $A=\dfrac{\pi}{3}$，又 $a=\sqrt{3}$，

由正弦定理得 $\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2$，……………………………………（5 分）

则 $b=2\sin B$，$c=2\sin C$，

$\therefore a+b+c$

$=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin C$

$=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+B\right)$

$=\sqrt{3}+2\sin B+2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B\right)$……………………………………（7 分）

$=\sqrt{3}+2\sin B+\sqrt{3}\cos B+\sin B$

$=\sqrt{3}+3\sin B+\sqrt{3}\cos B$

$=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)$，……………………………………………（9 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$\because B\in\left(0,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore B+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore \sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right]$， $2\sqrt{3}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\in(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}]$，

$\therefore a+b+c\in(2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}]$． ……………………………………………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

（1）证明：在$\triangle POC$中，$\angle CPO=\dfrac{\pi}{3}$，$CP=2$，$OP=1$，

所以$CO^2=CP^2+OP^2-2CP\cdot OP\cdot\cos\angle CPO=4+1-2\times2\times1\times\dfrac{1}{2}=3$．

所以，$CO=\sqrt{3}$． ………………………………………………………………………（1 分）

故$\triangle POC$为 Rt△，$\angle POC=90°$，

可得$CO\perp OP$． ………………………………………………………………………（2 分）

又$\angle AOC=\dfrac{\pi}{2}$，即$CO\perp OA$．

$OP\cap OA=O$，OP，$OA\subset$平面AOP，

所以，$CO\perp$平面AOP． ………………………………………………………………（4 分）

（2）解：由（1）知$OC\perp$平面AOP，

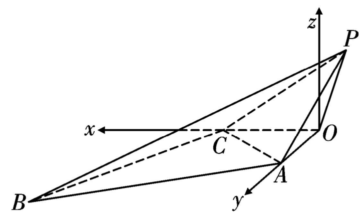
又$\because OC\subset$平面$OABC$，

所以平面$AOP\perp$平面$OABC$，

又$\because OP=OA=1$，$PA=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle POA=\dfrac{2\pi}{3}$， ……………………………………………………………………（5 分）

以OC为x轴，OA为y轴，过O且垂直于平面$OABC$的直线为z轴建立如图所示的空间直角坐标系．



在 Rt$\triangle AOC$中，$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{1+3}=2$，

在$\triangle ABC$中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$\therefore \sin\angle ACB=\dfrac{AB\sin\angle ABC}{AC}=\dfrac{4\times\frac{1}{2}}{2}=1$，

$\therefore \triangle ABC$ 为 Rt△，可得 $B(2\sqrt{3},\ 3,\ 0)$． ……………………………………………………（7 分）

又 $O(0,\ 0,\ 0)$， $A(0,\ 1,\ 0)$， $C(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$， $P\left(0,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

设平面 POC 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$， $\overrightarrow{OP}=\left(0,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0,\\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\\ x_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，

$\therefore \overrightarrow{n_1}=(0,\ \sqrt{3},\ 1)$， ……………………………………………………………………（9 分）

设平面 PAB 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$， $\overrightarrow{AP}=\left(0,\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3},\ 2,\ 0)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_2}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{3}x_2+2y_2=0,\\ -\dfrac{3}{2}y_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$，则 $y_2=-\sqrt{3}$， $z_2=-3$，

$\therefore \overrightarrow{n_2}=(1,\ -\sqrt{3},\ -3)$， ……………………………………………………………（10 分）

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\rangle=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}=-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$， ………………………………………………（11 分）

$\therefore$ 平面 POC 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$． ………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意得列联表如下：

	一等品	非一等品	合计
甲	75	25	100
乙	48	32	80
合计	123	57	180

………………………………………………………………………………………………（2 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{180\times(75\times32-48\times25)^2}{123\times57\times100\times80}\approx4.621,$$

$\because 4.621>3.841=x_{0.05}$， ……………………………………………………………（4 分）

依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可以认为零件是否为一等品与生产线有关联.

……………………………………………………………………………………（5 分）

（2）由已知任取一个甲生产线零件为一等品的概率为 $\frac{23+28+24}{100}=\frac{3}{4}$，

任取一个乙生产线零件为一等品的概率为 $\frac{15+17+16}{80}=\frac{3}{5}$，

ξ 的所有可能取值为 0，1，2，

$P(\xi=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$，

$P(\xi=1)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$，

$P(\xi=2)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$，

$\therefore\xi$ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$

……………………………………………………………………………………（8 分）

$E(\xi)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}=\frac{27}{20}$. ……………………………………（9 分）

（3）由已知零件为三等品的频率为 $\frac{4+2+2+1}{180}=\frac{1}{20}$，

设余下的 40 个零件中三等品个数为 X，则 $X\sim B\left(40,\ \frac{1}{20}\right)$，

$\therefore E(X)=40\times\frac{1}{20}=2$，…………………………………………………………（10 分）

设检验费用与赔偿费用之和为 Y，

若不对余下的所有零件进行检验，则 $Y=20\times5+120X$，

所以 $E(Y)=100+120\times E(X)=100+240=340$，……………………………（11 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

若对余下的所有零件进行检测，则检验费用为$60\times 5=300$元，

$\because 340>300$，

$\therefore$应对剩下零件进行检验. ……………………………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）不妨设T的坐标为(x_0, y_0)，则$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，

又$M_1(-a, 0)$，$M_2(a, 0)$，

则$k_1\cdot k_2=\dfrac{y_0}{x_0+a}\times\dfrac{y_0}{x_0-a}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\dfrac{3-\dfrac{3x_0^2}{a^2}}{x_0^2-a^2}=-\dfrac{3}{a^2}=-\dfrac{3}{4}$. ……………………………（2 分）

故可得$\dfrac{3}{a^2}=\dfrac{3}{4}$；

可得$a^2=4$，

故可得椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………（4 分）

（2）①若直线AB斜率存在，不妨设其方程为$y=kx+b$，$b\neq 0$，

联立椭圆方程$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$可得：

$(3+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-12=0$，

则$\Delta=64k^2b^2-4(3+4k^2)(4b^2-12)>0$，

整理得$4k^2-b^2+3>0$，

设点A，B的坐标为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，

故可得$x_1+x_2=-\dfrac{8kb}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4b^2-12}{3+4k^2}$， ……………………………………………（5 分）

$y_1y_2=(kx_1+b)(kx_2+b)=k^2x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2=\dfrac{3b^2-12k^2}{3+4k^2}$.

因为$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$，故可得$x_1x_2+y_1y_2=0$，

即可得$\dfrac{4b^2-12}{3+4k^2}+\dfrac{3b^2-12k^2}{3+4k^2}=0$，

则$7b^2=12k^2+12$，结合$4k^2-b^2+3>0$，可得$16k^2+9>0$，

故$k\in\mathbf{R}$. ……………………………………………………………………………………（7 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

又$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{12k^2-3b^2+9}}{3+4k^2}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\bullet\dfrac{4\sqrt{12k^2-3b^2+9}}{3+4k^2}$，

原点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$．

故可得 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d=\sqrt{1+k^2}\bullet\dfrac{2\sqrt{12k^2-3b^2+9}}{3+4k^2}\bullet\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$．

将 $7b^2=12k^2+12$ 代入上式可得：$S_{\triangle OAB}=\dfrac{6}{7}\times\sqrt{\dfrac{(16k^2+9)(4k^2+4)}{(3+4k^2)^2}}$，

令 $3+4k^2=t(t\geqslant 3)$，

则 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{6}{7}\sqrt{\dfrac{(4t-3)(t+1)}{t^2}}=\dfrac{6}{7}\sqrt{-3\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{49}{12}}\geqslant\dfrac{6}{7}\sqrt{-3\times\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{49}{12}}=\dfrac{12}{7}$，

………………………………………………………………………………………………（10 分）

当且仅当 $t=3$，$k=0$，$b^2=\dfrac{12}{7}$ 时取得最小值．

②当直线的斜率不存在时，则 $OA=OB$，又 $\overline{OA}\bullet\overline{OB}=0$，所以 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形．

设直线为 $x=t$，$t\in(-2,0)\cup(0,2)$，

联立椭圆方程 $\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t^2}{3}=1$ 可得 $t^2=\dfrac{12}{7}$，

故 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times|t||2t|=t^2=\dfrac{12}{7}$，

此时 $\triangle OAB$ 的面积为定值 $\dfrac{12}{7}$．

综上所述，$\triangle OAB$ 的面积存在最小值，最小值为 $\dfrac{12}{7}$． ………………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

（1）解：由题知，当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-1)^2e^x-\dfrac{1}{3}x^3+x$．

则 $f'(x)=(x^2-1)(e^x-1)$， ………………………………………………………………（1 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

由 $f'(x)>0$ 得 $\begin{cases}x^2-1>0,\\ e^x-1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2-1<0,\\ e^x-1<0,\end{cases}$

解得 $x>1$或$-1<x<0$，……（2 分）

故函数的单调递增区间为$x>1$或$-1<x<0$，……（3 分）

又函数的定义域为 **R**，故单调递减区间为$x<-1$或$0<x<1$．……（4 分）

（2）证明：由（1）知，$g(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2+(x-1)^2e^x$，定义域为$(0,+\infty)$，

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}-x+(x^2-1)e^x=(x+1)(x-1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$，……（5 分）

设 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}(x>0)$，

$\therefore h'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，$\therefore h(x)$ 在区间$(0,+\infty)$上是增函数，……（6 分）

$\because h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$h(1)=e-1>0$，

$\therefore$ 存在唯一 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $h(x_0)=0$，

即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$-x_0=\ln x_0$，……（7 分）

当$0<x<x_0$时，$h(x)<0$，即 $g'(x)>0$；

当$x_0<x<1$时，$h(x)>0$，即 $g'(x)<0$；……（8 分）

当$x>1$时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，……（9 分）

$\therefore g(x)$ 在区间$(0,x_0)$上是增函数，在区间$(x_0,1)$上是减函数，在区间$(1,+\infty)$上是增函数，

$\therefore$ 当$x=x_0$时，$g(x)$ 取极大值为 $g(x_0)=\ln x_0-\frac{1}{2}x_0^2+(x_0-1)^2e^{x_0}=-\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{x_0}-2$，

……（10 分）

设 $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}-2\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$，其知 $F(x)$ 在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$上是减函数．

$\therefore g(x_0)<g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}<0$，$\therefore g(x)$ 在$(0,1)$内无零点，……（11 分）

$\because g(1)=-\frac{1}{2}<0$，$g(2)=e^2-2+\ln 2>0$，

$\therefore g(x)$ 在$(1,+\infty)$内有且只有一个零点，

综上所述，$g(x)$ 有且只有一个零点．……（12 分）

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！