

# 2023 北京一七一中高三（上）开学考

## 数学

（考试时间：120 分钟 总分：150 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若集合  $A = \{-2, 0, 1\}$ ,  $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{-2\}$                       B.  $\{1\}$                       C.  $\{-2, 1\}$                       D.  $\{-2, 0, 1\}$

2. 已知  $a = 0.3^{1.5}$ ,  $b = \log_{1.5} 0.3$ ,  $c = 1.5^{0.3}$ , 则 ( )

- A.  $a < b < c$                       B.  $b < a < c$   
C.  $a < c < b$                       D.  $b < c < a$

3. 在复平面内，复数  $z$  所对应的点的坐标为  $(1, -1)$ , 则  $z \cdot \bar{z} =$  ( )

- A. 2                      B.  $-2i$                       C.  $\sqrt{2}$                       D.  $2i$

4. 二项式  $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$  的展开式的第二项是

- A.  $6x^4$                       B.  $-6x^4$                       C.  $12x^4$                       D.  $-12x^4$

5. 设  $0 < a < b$ , 则下列不等式中正确的是

- A.  $a < b < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$                       B.  $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$   
C.  $a < \sqrt{ab} < b < \frac{a+b}{2}$                       D.  $\sqrt{ab} < a < \frac{a+b}{2} < b$

6. 将函数  $y = \sin(2x - \varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 的图象沿  $x$  轴向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位后得到的图象关于原点对称, 则  $\varphi$  的值为 ( )

- A.  $\frac{\pi}{6}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{2\pi}{3}$                       D.  $\frac{5\pi}{6}$

7. “ $m = 5$ ”是“双曲线  $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4-m} = 1$  的虚轴长为 2”的 ( )

- A. 充分但不必要条件                      B. 必要但不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

8. 函数  $f(x) = x|x|$ . 若存在  $x \in [1, +\infty)$ , 使得  $f(x-2k) - k < 0$ , 则  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $(2, +\infty)$                       B.  $(1, +\infty)$                       C.  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$                       D.  $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

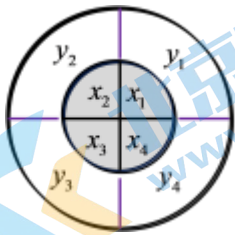
9. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = -9$ ,  $a_5 = -1$  记  $T_n = a_1 a_3 a_5 \dots a_{2n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) . 则数列  $\{T_n\}$  ( )

- A. 有最大项, 有最小项  
 B. 有最大项, 无最小项  
 C. 无最大项, 有最小项  
 D. 无最大项, 无最小项

10. 已知两个半径不等的圆盘叠放在一起 (有一轴穿过它们的圆心), 两圆盘上分别有互相垂直的两条直径将其分为四个区域, 小圆盘上所写的实数分别记为  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 大圆盘上所写的实数分别记为

$y_1, y_2, y_3, y_4$ , 如图所示. 将小圆盘逆时针旋转  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 次, 每次转动  $90^\circ$ , 记  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为转动  $i$  次后各区域内两数乘积之和, 例如  $T_1 = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4 + x_4 y_1$ . 若  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 0$ ,

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 < 0$ , 则以下结论正确的是



- A.  $T_1, T_2, T_3, T_4$  中至少有一个为正数  
 B.  $T_1, T_2, T_3, T_4$  中至少有一个为负数  
 C.  $T_1, T_2, T_3, T_4$  中至多有一个为正数  
 D.  $T_1, T_2, T_3, T_4$  中至多有一个为负数

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

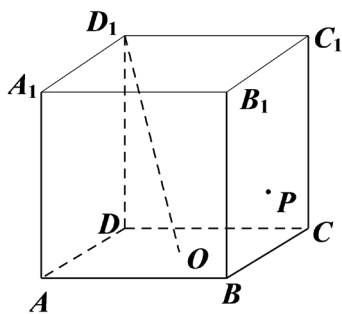
11. 函数  $f(x) = \ln x + \sqrt{1-x}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

12. 在  $\triangle ABC$  中,  $A = 2B$ ,  $2a = 3b$ , 则  $\cos B =$ \_\_\_\_\_.

13. 已知过定点  $P(2,0)$  的直线  $l$  与曲线  $y = \sqrt{2-x^2}$  相交于  $A, B$  两点.  $O$  为坐标原点. 当  $\triangle AOB$  的面积最大时, 直线  $l$  的倾斜角为\_\_\_\_\_.

14. 在四边形  $ABCD$  中,  $AB = 2$ . 若  $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$ \_\_\_\_\_.

15. 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2, 点  $O$  为底面  $ABCD$  的中心, 点  $P$  在侧面  $BB_1C_1C$  的边界及其内部运动. 给出下列四个结论:



①  $D_1O \perp AC$ ;

② 存在一点  $P$ ,  $D_1O \parallel B_1P$ ;

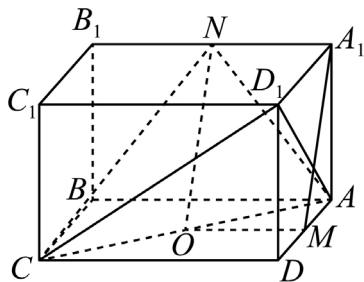
③ 若  $D_1O \perp OP$ , 则  $\triangle D_1C_1P$  面积的最大值为  $\sqrt{5}$ ;

④ 若  $P$  到直线  $D_1C_1$  的距离与到点  $B$  的距离相等, 则  $P$  的轨迹为抛物线的一部分.

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 如图, 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 四边形  $BCC_1B_1$  是边长为 1 的正方形,  $AB=2$ ,  $M, N, O$  分别是  $AD, A_1B_1, AC$  的中点



(1) 求证:  $MA_1 \parallel$  平面  $ANC$ ;

(2) 求直线  $CN$  与平面  $D_1AC$  所成角的正弦值.

17. 已知函数  $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

(I) 求  $f(x)$  的定义域;

(II) 设  $\beta \in (0, \pi)$ , 且  $f(\beta) = 2\cos\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)$ , 求  $\beta$  的值.

18. 天文学上用星等表示星体亮度, 星等的数值越小, 星体越亮. 视星等是指观测者用肉眼所看到的星体亮度; 绝对星等是假定把恒星放在距地球 32.6 光年的地方测得的恒星的亮度, 反映恒星的真实发光本领. 下表列出了 (除太阳外) 视星等数值最小的 10 颗最亮恒星的相关数据, 其中  $a \in [0, 1.3]$ .

星名	天狼星	老人星	南门二	大角星	织女一	五车二	参宿七	南河三	水委一	参宿四
视星等	-1.47	-0.72	-0.27	-0.04	0.03	0.08	0.12	0.38	0.46	$a$
绝对星等	1.42	-5.53	4.4	-0.38	0.6	0.1	-6.98	2.67	-2.78	-5.85
赤纬	$-16.7^\circ$	$-52.7^\circ$	$-60.8^\circ$	$19.2^\circ$	$38.8^\circ$	$46^\circ$	$-8.2^\circ$	$5.2^\circ$	$-57.2^\circ$	$7.4^\circ$

(1) 从表中随机选择一颗恒星，求它的绝对星等的数值小于视星等的数值的概率；

(2) 已知北京的纬度是北纬  $40^\circ$ ，当且仅当一颗恒星的“赤纬”数值大于  $-50^\circ$  时，能在北京的夜空中看到它。现从这 10 颗恒星中随机选择 4 颗，记其中能在北京的夜空中看到的数量为  $X$  颗，求  $X$  的分布列和数学期望；

(3) 记  $a = 0$  时 10 颗恒星的视星等的方差为  $s_1^2$ ，记  $a = 1.3$  时 10 颗恒星的视星等的方差为  $s_2^2$ ，判断  $s_1^2$  与  $s_2^2$  之间的大小关系。（结论不需要证明）

19. 已知函数  $f(x) = 1 - x^2$

(1) 已知直线  $l$  与曲线  $y = f(x)$  相切，且与坐标轴围成等腰三角形，求直线  $l$  的方程；

(2) 已知  $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ，设曲线  $y = f(x)$  在点  $(t, f(t))$  处的切线被坐标轴截得的线段长度为  $L(t)$ ，求  $L(t)$

的最大值。

20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率是  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且过点  $P(\sqrt{2}, 1)$ 。直线  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + m$  与椭圆  $C$

相交于  $A, B$  两点。

(I) 求椭圆  $C$  的方程；

(II) 求  $\Delta PAB$  的面积的最大值；

(III) 设直线  $PA, PB$  分别与  $y$  轴交于点  $M, N$ 。判断  $|PM|, |PN|$  大小关系，并加以证明。

21. 设数集  $S$  满足：①任意  $x \in S$ ，有  $x \geq 0$ ；②任意  $x, y \in S$ ，有  $x + y \in S$  或  $|x - y| \in S$ ，则称数集  $S$  具有性质  $P$ 。

(1) 判断数集  $A = \{0, 1, 2, 4\}$  是否具有性质  $P$ ，并说明理由；

(2) 若数集  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  且  $a_i < a_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 具有性质  $P$ .

(i) 当  $n = 2021$  时, 求证:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是等差数列;

(ii) 当  $a_1, a_2, \dots, a_n$  不是等差数列时, 写出  $n$  的最大值. (结论不需要证明)



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

