

本试卷共 4 页, 满分 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共 30 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

- (1) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$
 (A) $\{0, 1, 2\}$ (B) $\{1, 2, 3\}$ (C) $\{-1, 3\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
- (2) 不等式 $x^2 - x - 2 > 0$ 的解集是
 (A) $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > -1\}$ (B) $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$
 (C) $\{x | -1 < x < 2\}$ (D) $\{x | -2 < x < 1\}$
- (3) 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是
 (A) $y = \sqrt{x}$ (B) $y = \ln x$ (C) $y = (\frac{1}{2})^x$ (D) $y = x^3$
- (4) 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x - 1 > 0$ ”的否定是
 (A) $\forall x \in \mathbf{R}, x - 1 \leq 0$ (B) $\exists x \in \mathbf{R}, x - 1 \leq 0$
 (C) $\forall x \in \mathbf{R}, x - 1 < 0$ (D) $\exists x \in \mathbf{R}, x - 1 < 0$
- (5) 已知 $a > 0$, 则 $a + \frac{4}{a} + 1$ 的最小值为
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- (6) 函数 $f(x) = x^3 + x$ 的图象关于
 (A) x 轴对称 (B) y 轴对称 (C) 原点对称 (D) 直线 $y = x$ 对称
- (7) “ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”是“ $\alpha = \beta$ ”的
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- (8) 已知函数 $f(x) = |\lg(x+1)|$, 对 a, b 满足 $-1 < a < b$ 且 $f(a) = f(b)$, 则下面结论一定正确的是
 (A) $a + b = 0$ (B) $ab = 1$
 (C) $ab - a - b = 0$ (D) $ab + a + b = 0$

(9) 记地球与太阳的平均距离为 R , 地球公转周期为 T , 万有引力常量为 G , 根据万有引力定律和牛顿运动定律知: 太阳的质量 $M = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$ (kg). 已知 $\lg 2 \approx 0.3, \lg \pi \approx 0.5,$

$\lg \frac{R^3}{GT^2} \approx 28.7$, 由上面的数据可以计算出太阳的质量约为

- (A) 2×10^{30} kg (B) 2×10^{29} kg (C) 3×10^{30} kg (D) 3×10^{29} kg

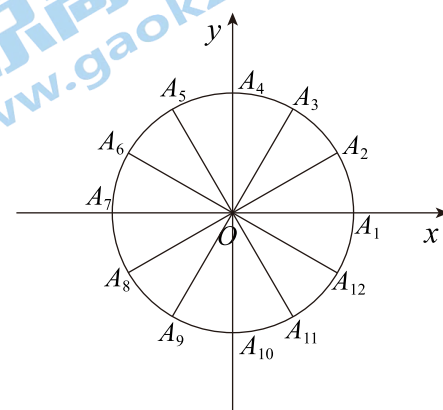
(10) 已知实数 $a_1, a_2, \dots, a_{10}, b_1, b_2, \dots, b_{10}$ 互不相同, 对 $\forall a_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 满足 $(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_{10}) = 2023$, 则对 $\forall b_i (i = 1, 2, \dots, 10), (a_1 + b_i)(a_2 + b_i) \cdots (a_{10} + b_i) =$

- (A) 2022 (B) -2022 (C) 2023 (D) -2023

第二部分(非选择题 共 70 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。

- (11) 函数 $f(x) = \ln(1 - 2x)$ 的定义域是_____.
- (12) $(\frac{1}{2})^{-2} + \log_2 4 =$ _____.
- (13) 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in (0, \pi)$, 则 $\tan \alpha =$ _____.
- (14) 如图, 单位圆被点 A_1, A_2, \dots, A_{12} 分为 12 等份, 其中 $A_1(1, 0)$. 角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合, 若 α 的终边经过点 A_5 , 则 $\cos \alpha =$ _____; 若 $\sin \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{3})$, 则角 α 的终边与单位圆交于点_____ (从 A_1, A_2, \dots, A_{12} 中选择, 写出所有满足要求的点).



- (15) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq a, \\ 2^x - 2, & x < a. \end{cases}$
 ① 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为_____;
 ② 若 $f(x)$ 有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题共 5 小题,共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 10 分)

已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos x$.

(I) 求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值;

(II) 当 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ 时,求 $f(x)$ 的值域.

(17)(本小题 10 分)

已知关于 x 的不等式 $a(x-1)(x-2) > 2x^2 - 8x + 8$ 的解集为 A .

(I) 当 $a=1$ 时,求集合 A ;

(II) 若集合 $A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$,求 a 的值;

(III) 若 $3 \notin A$,直接写出 a 的取值范围.

(18)(本小题 10 分)

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,若对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$,均有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.

(I) 若 $f(1) > 0$,证明: $f(2) > 0$;

(II) 若对 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) > 0$,证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

(III) 若 $f(1) = 0$,直接写出一个满足已知条件的 $f(x)$ 的解析式.

(19)(本小题 10 分)

已知函数 $f(x) = 2^x + a \cdot 2^{-x} (a \neq 0)$.

(I) 若 $f(x)$ 为偶函数,求 a 的值.

(II) 从以下三个条件中选择两个作为已知条件,记所有满足条件的 a 值构成集合 A ,若 $A \neq \emptyset$,求 A .

条件①: $f(x)$ 是增函数;

条件②: 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$ 恒成立;

条件③: $\exists x_0 \in [-1, 1]$,使得 $f(x_0) \leq 4$.

注:如果选择的条件不符合要求,第(II)问得 0 分;如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答计分.

(20)(本小题 10 分)

对于非空数集 A ,若其最大元素为 M ,最小元素为 m ,则称集合 A 的幅值为 $T_A = M - m$,若集合 A 中只有一个元素,则 $T_A = 0$.

(I) 若 $A = \{2, 3, 4, 5\}$,求 T_A ;

(II) 若 $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $A_i = \{a_i, b_i, c_i\} \subseteq A$, $A_i \cap A_j = \emptyset (i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$,求 $T_{A_1} + T_{A_2} + T_{A_3}$ 的最大值,并写出取最大值时的一组 A_1, A_2, A_3 ;

(III) 若集合 \mathbf{N}^* 的非空真子集 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 两两元素个数均不相同,且 $T_{A_1} + T_{A_2} + T_{A_3} + \dots + T_{A_n} = 55$,求 n 的最大值.

(考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效)

高一数学参考答案及评分标准

2023. 1

一、选择题(共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

- (1)A (2)B (3)C (4)A (5)D
 (6)C (7)B (8)D (9)A (10)D

二、填空题(共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

- (11) $(-\infty, \frac{1}{2})$ (12)6
 (13) $2\sqrt{2}$ (14) $-\frac{1}{2}; A_3, A_9$
 (15) $-1; (-\infty, 0] \cup (1, 2]$

三、解答题(共 5 小题,共 50 分)

(16)(本小题 10 分)

解:(I)因为 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos x$,

所以 $f(x) = 2\cos x$.

所以 $f(\frac{\pi}{6}) = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ 5 分

(II)当 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ 时, $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$,

所以 $-1 \leq 2\cos x \leq 2$.

所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$ 10 分

(17)(本小题 10 分)

解:(I)当 $a=1$ 时,化简,得 $x^2 - 5x + 6 < 0$,即 $(x-3)(x-2) < 0$,解得 $2 < x < 3$.

所以集合 $A = \{x | 2 < x < 3\}$ 4 分

(II)原不等式等价于 $(x-2)[(a-2)x - (a-4)] > 0$.

因为集合 $A = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$,

所以 $a-2 > 0$.

所以原不等式等价于 $(x-2)(x - \frac{a-4}{a-2}) > 0$.

所以 $\frac{a-4}{a-2} = -1$.

解得 $a=3$ 8 分

(III) a 的取值范围是 $\{a | a \leq 1\}$ 10 分

(18)(本小题 10 分)

解:(I)令 $s=t=1$,得 $f(1+1) > f(1)+f(1)$,所以 $f(2) > 2f(1) > 0$ 3 分

(II)设 $0 < x_1 < x_2$,原式中令 $s=x_1, t=x_2-x_1$,

代入可得 $f(x_1+x_2-x_1) - f(x_1) > f(x_2-x_1)$,即 $f(x_2) - f(x_1) > f(x_2-x_1)$.

由于 $x_2-x_1 > 0$,所以 $f(x_2-x_1) > 0$.

因此 $f(x_2) - f(x_1) > f(x_2-x_1) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 8 分

(III) $f(x) = x-1, x \in (0, +\infty)$. (答案不唯一) 10 分

(19)(本小题 10 分)

解:(I)若 $f(x)$ 为偶函数,则对 $\forall x \in \mathbf{R}$,有 $f(-x) = f(x)$.

所以 $2^x + a \cdot 2^{-x} = 2^{-x} + a \cdot 2^x$. 整理,得 $a(2^{-x} - 2^x) = 2^{-x} - 2^x$,

解得 $a=1$ 4 分

(II)选择条件①③:

因为 $y=2^x$ 是增函数, $y=2^{-x}$ 是减函数,

当 $a < 0$ 时, $f(x) = 2^x + a \cdot 2^{-x}$ 是增函数.

当 $a > 0$ 时,令 $4^{x_1} = a, x_2 = x_1 - 1$,则 $f(x_1) = 2\sqrt{a}$.

因为 $f(x_2) = 2^{x_2} + a \cdot 2^{-x_2} = \frac{5\sqrt{a}}{2} > 2\sqrt{a} = f(x_1)$,

所以 $a > 0$ 时, $f(x) = 2^x + a \cdot 2^{-x}$ 不是增函数.

所以 $a < 0$.

又因为 $\exists x_0 \in [-1, 1]$,使得 $f(x_0) \leq 4$,

所以 $f(-1) = \frac{1}{2} + 2a \leq 4$,

解得 $a \leq \frac{7}{4}$.

综上, $A = (-\infty, 0)$ 10 分

选择条件②③:

因为对于 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) > 0$ 恒成立, 即对 $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x + a \cdot 2^{-x} > 0$.

即对 $\forall x \in \mathbf{R}, a > -4^x$, 所以 $a > 0$.

又因为 $\exists x_0 \in [-1, 1]$, 使得 $f(x_0) \leq 4$, 即 $2^{x_0} + a \cdot 2^{-x_0} \leq 4$.

所以 $a \leq 4 \times 2^{x_0} - (2^{x_0})^2$. 令 $t = 2^{x_0}$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$, $g(t) = 4t - t^2$.

因为 $g(t)_{\max} = g(2) = 4$, 所以 $a \leq 4$.

综上, $A = (0, 4]$ 10 分

(20) (本小题 10 分)

解: (I) $T_A = 5 - 2 = 3$ 2 分

(II) 因为 $A_i = \{a_i, b_i, c_i\} \subseteq A$, 不妨设 $a_i < b_i < c_i$,

由于要求 $T_{A_1} + T_{A_2} + T_{A_3}$ 的最大值, 且 $A_i \cap A_j = \emptyset (i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$,

所以只需 $\{c_1, c_2, c_3\} = \{7, 8, 9\}$, $\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 2, 3\}$.

因此 $T_{A_1} + T_{A_2} + T_{A_3}$ 的最大值为 $(7+8+9) - (1+2+3) = 18$.

可取 $A_1 = \{1, 4, 9\}, A_2 = \{2, 5, 8\}, A_3 = \{3, 6, 7\}$. (答案不唯一) 6 分

(III) 设集合 A_k 的元素个数为 $r_k (k = 1, 2, \dots, n)$.

因为 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 两两元素个数均不相同, 不妨设 $r_1 < r_2 < \dots < r_n$.

因为 A_k 为集合 \mathbf{N}^* 的非空真子集, 则有 $r_k \geq k$.

所以 $T_{A_k} \geq k - 1 (k = 1, 2, \dots, n)$.

于是 $T_{A_1} + T_{A_2} + T_{A_3} + \dots + T_{A_n} \geq 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$.

因为 $T_{A_1} + T_{A_2} + T_{A_3} + \dots + T_{A_n} = 55$,

所以 $n \leq 11$.

又 $A_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}, k = 1, 2, 3, \dots, 11$ 符合题意,

所以 n 的最大值为 11. 10 分