2018北京市西城区高二（上）期末

数　学（理）

2018.1

一.选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1. 直线$x+y+\sqrt{3}=0$的倾斜角为（　　）

A. $30°$　B. $45°$　C. $60°$　D. $135°$

2. 命题“对任意$x>3$，都有$\ln x>1$”的否定是（　　）

A. 存在$x>3$, 使得$\ln x>1$　B. 对任意$x>3$, 都有$\ln x\le 1$

C. 存在$x>3$, 使得$\ln x\le 1$　D. 对任意$x\le 3$, 都有$\ln x>1$

3. 双曲线$x^2-y^2=1$的焦点到其渐近线的距离为（　　）

A. 1　B. $\sqrt{2}$　C. 2　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 设α,β是两个不同的平面，a,b,c是三条不同的直线，（　　）

A. 若$a\perp b$，$b\perp c$，则$a//c$　B. 若$a//\alpha$，$b//\alpha$，则$a//b$

C. 若$a\perp b$，$a\perp\alpha$，则$b//\alpha$　D. 若$a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，则$\alpha//\beta$

5. “$n>m>0$”是“方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$表示的曲线为椭圆”的（　　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

6. 设α,β是两个不同的平面，l是一条直线，若$l//\alpha$，$l//\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，则（　　）

A. l与m平行　B. l与m相交

C. l与m异面　D. 以上三个答案均有可能

7. 设O为坐标原点，P是以F为焦点的抛物线$y^2=2px\,(p>0)$上任意一点，M是线段PF的中点，则直线OM的斜率的最大值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. 1　C. $\sqrt{2}$　D. 2

8. 设α为空间中的一个平面，记正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的八个顶点中到α的距离为$d(d>0)$的点的个数为m，m的所有可能取值构成的集合为M，则有（　　）

A. $4\in M$，$6\notin M$　B. $5\notin M$，$6\notin M$

C. $4\notin M$，$6\in M$　D. $5\notin M$，$6\in M$

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.把答案填在题中横线上.

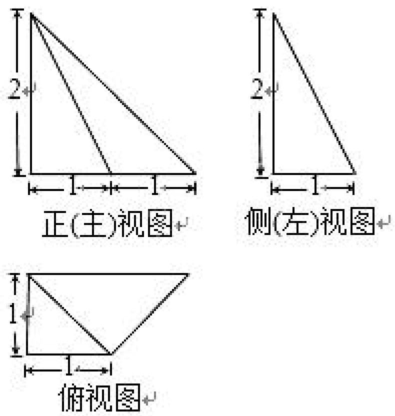
9. 命题“若$a^2-b^2=0$，则$a=b$”的逆否命题为_______.

10. 经过点$M(2,1)$且与直线$3x-y+8=0$垂直的直线方程为_______.

11. 在ΔABC中，$AB=3$，$BC=4$，$AB\perp BC$. 以BC所在的直线为轴将ΔABC旋转一周，则旋转所得圆锥的侧面积为____.

12. 若双曲线C的一个焦点在直线l: $4x-3y+20=0$上，一条渐近线与l平行，且双曲线C的焦点在x轴上，则C的标准方程为_______；离心率为_______.

13. 一个四棱锥的三视图如图所示，那么在这个四棱锥的四个侧面三角形中，有_______个直角三角形.



14. 在平面直角坐标系中，曲线C是由到两个定点$A(1,0)$和点$B(-1,0)$的距离之积等于$\sqrt{2}$的所有点组成的. 对于曲线C，有下列四个结论：

①曲线C是轴对称图形；

②曲线C是中心对称图形；

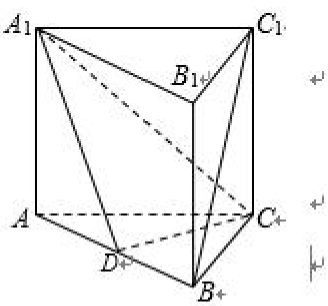
③曲线C上所有的点都在单位圆$x^2+y^2=1$内；

④曲线C上所有的点的纵坐标$y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

其中，所有正确结论的序号是__________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D为AB的中点.



（Ⅰ）求证：$CD\perp$平面ABB_1A_1；

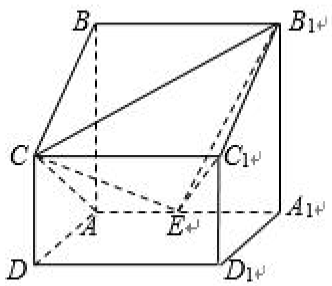
（Ⅱ） 求证：$BC_1//$平面A_1CD.

16. 已知圆$C:x^2+y^2-6x-8y+m=0$，其中$m\in R$.

（Ⅰ）如果圆C与圆$x^2+y^2=1$相外切，求m的值；

（Ⅱ）如果直线$x+y-3=0$与圆C相交所得的弦长为$2\sqrt{7}$，求m的值.

17. 如图，在四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1\perp$平面ABCD，$AB//CD$，$AB\perp AD$， $AD=CD=1$，$AA_1=AB=2$， E为AA_1的中点.



（Ⅰ）求四棱锥$C-AEB_1B$的体积；

（Ⅱ）设点M在线段C_1E上，且直线AM与平面BCC_1B_1所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$，求线段AM的长度；

（III）判断线段B_1C上是否存在一点N，使得NE//CD？（结论不要求证明）

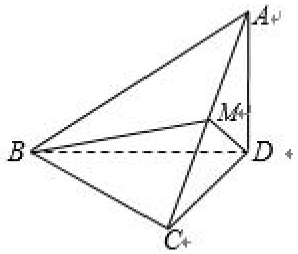
18. 设F为抛物线$C:y^2=2x$的焦点，A,B是抛物线C上的两个动点，O为坐标原点.

（Ⅰ）若直线AB经过焦点F，且斜率为 2，求$|AB|$；

（Ⅱ）当$OA\perp OB$时，证明：求$|OA|\cdot|OB|$的最小值.

19. 如图，在四面体A−BCD中，$AD\perp$平面BCD，$BC\perp CD$，$BC=CD=AD=2$，

M为AC的中点.



（Ⅰ）求证：$BC\perp MD$；

（Ⅱ）求二面角B−MD−C的余弦值.

（III）求四面体A−BCD的外接球的表面积.

（注：如果一个多面体的顶点都在球面上，那么常把该球称为多面体的外接球．球的表面积$S=4\pi R^2$）

20．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为$(\sqrt{5},0)$，离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$．点P为圆$M:x^2+y^2=13$上任意一点，O为坐标原点.

（I）求椭圆C的标准方程；

（II）记线段OP与椭圆C交点为Q，求$|PQ|$的取值范围；

（III）设直线l经过点P且与椭圆C相切，l与圆M相交于另一点A，点A关于原点O的对称点为B，试判断直线PB与椭圆C的位置关系，并证明你的结论.

数学试题答案

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1. 【答案】D

【解析】直线$x+y+\sqrt{3}=0$可化为：$y=-x-\sqrt{3}$.

斜率为-1，所以倾斜角为$135°$.

故选 D.

2. 【答案】C

【解析】根据命题的否定的写法，只否结论，不改变条件，且转化其中的量词，将任意改为存在。即存在$x>3$,使得$\ln x\le 1$.

故答案为：C。

3. 【答案】A

【解析】根据双曲线的方程得到焦点为$(\sqrt{2},0)$，渐近线为：$y=\pm x$，根据点到直线的距离得到焦点到渐近线的距离为$d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.

故答案为：A。

4. 【答案】D

【解析】A. 垂直于同一条直线的两条直线，可能是互相垂直的，比如墙角模型。故不正确。

B. 平行于同一个平面的两条直线可以是平行的，垂直的，共面异面都有可能。故不正确。

C. 直线 b 有可能在平面α内。故不正确。

D. 垂直于同一条直线的两个平面是平行的。正确。

故答案为：D。

5. 【答案】A

【解析】易知“$n>m>0$”时，方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$表示的曲线为椭圆成立，充分性成立

但当方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$表示的曲线为椭圆时，$m>n>0$或$n>m>0$，必要性不成立.

所以“$n>m>0$” 是“方程$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$表示的曲线为椭圆”的充分不必要条件.

故选 A.

6. 【答案】A

【解析】过 l 作平面与α、β相交，交线分别为 a，b，利用线面平行的性质，可得 l∥a，l∥b，∴a∥b，∵a⊄β， b⊂β，∴a∥β，∵a⊂α，α∩β=m，∴l∥m.

故选 A.

7. 【答案】B

【解析】设$P(x_0,y_0)$，$F(\frac{p}{2},0)$，M是线段PF的中点，所以$M(\frac{x_0+\frac{p}{2}}{2},\frac{y_0}{2})$.

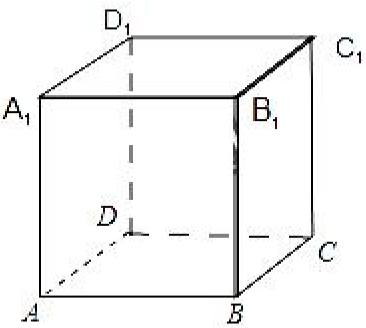
直线OM的斜率为：$k=\frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{x_0+\frac{p}{2}}{2}}=\frac{y_0}{x_0+\frac{p}{2}}=\frac{y_0}{\frac{y_0^2}{2p}+\frac{p}{2}}=\frac{1}{\frac{y_0}{2p}+\frac{p}{2y_0}}$.

显然$y_0>0$时的斜率较大，此时$k=\frac{1}{\frac{y_0}{2p}+\frac{p}{2y_0}}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{y_0}{2p}\cdot\frac{p}{2y_0}}}=1$，当且仅当$\frac{y_0}{2p}=\frac{p}{2y_0}$，$y_0=p$时，斜率最大为 1.

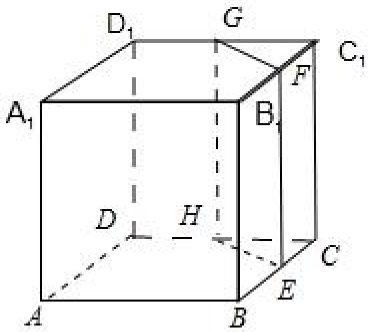
故选 B.

8. 【答案】D

【解析】



当α为面BB_1D_1D时，A, C, C_1, A_1到面α的距离相等，即4∈M，排除 C；



取 E, F, G, H 为BC，B_1C_1，C_1D_1，CD的中点，记α为EFGH时，点B,B_1,D_1,D,C,C_1，六个点到面α的距离相等，即6∈M，排除 A, B.

故选 D.

点睛：两点到面的距离相等分为两种情况：

（1）两点连线与平面平行；

（2）两点连线的中点在面上.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在题中横线上.

9. 【答案】若$a\neq b$，则$a^2-b^2\neq 0$

【解析】逆否命题即调换结论和条件的位置，并且将两者都否定。根据这个原则得到题干的逆否命题为若$a\neq b$，则$a^2-b^2\neq 0$.

故答案为：若$a\neq b$，则$a^2-b^2\neq 0$。

10. 【答案】$x+3y-5=0$

【解析】和直线垂直则直线的斜率为$k=-\frac{1}{3}$，代入已知点得到直线为$y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\Rightarrow x+3y-5=0$.

故答案为：$x+3y-5=0$。

11. 【答案】15π

【解析】这个三角形是以角 B 为直角的三角形，BC 为较长的直角边，以BC所在的直线为轴将ΔABC旋转一周，得到一个高为 5 的圆锥，底面是半径为 3 的园面。故体积为15π.

故答案为：15π。

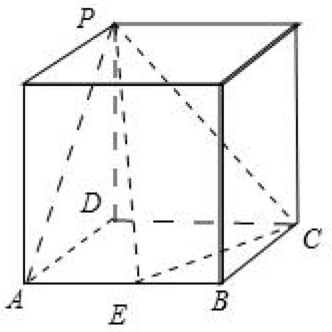
12. 【答案】 （1）. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ （2）. $\frac{5}{3}$

【解析】双曲线C的一条渐近线与l平行。故渐近线为$4x\pm 3y=0$，双曲线方程为：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=a$。双曲线C的焦点在$x$轴上，一个焦点在直线l：$4x-3y+20=0$上，可求得一个焦点为$(-5,0)$，故得到双曲线方程为$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$。离心率为$\frac{5}{3}$。

故答案为：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$，$\frac{5}{3}$。

13. 【答案】4

【解析】由三视图可知几何体如图所示：



四棱锥P - ADCE即为所求.

由长方体的性质已知，$\Delta PDA,\Delta PDC,\Delta PAE$为直角三角形，

$AD = AE = 1$,所以$DE = \sqrt{2}$, 所以$PE = \sqrt{PD^2 + DE^2} = \sqrt{6}$,

$BE = BC = 1$,所以$CE = \sqrt{2}$, $PC = 2\sqrt{2}$.

所以$CE^2 + PE^2 = PC^2$，所以ΔPEC也为直角三角形，

那么在这个四棱锥的四个侧面三角形中，有 4 个直角三角形.

答案为：4.

点睛：思考三视图还原空间几何体首先应深刻理解三视图之间的关系，遵循"长对正，高平齐，宽相等"的基本原则，其内涵为正视图的高是几何体的高，长是几何体的长；俯视图的长是几何体的长，宽是几何体的宽；侧视图的高是几何体的高，宽是几何体的宽.由三视图画出直观图的步骤和思考方法：1、首先看俯视图，根据俯视图画出几何体地面的直观图；2、观察正视图和侧视图找到几何体前、后、左、右的高度；3、画出整体，然后再根据三视图进行调整.

14. 【答案】①②

【解析】设$P(x,y)$满足$|PA| \cdot |PB| = \sqrt{2}$，则$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2}$

整理得：$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = 2$.

①点$P(x,y)$关于 x 轴得对称点为$P(x,-y)$满足方程，所以曲线C是关于 x 轴对称的轴对称图形，

②点$P(x,y)$关于原点得对称点为$P(-x,-y)$，曲线C是中心对称图形，

③由$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = 2$，令$x = 1$，得$y^2 = \sqrt{6} - 2$，所以$x^2 + y^2 = \sqrt{6} - 1 > 1$，不在单位圆$x^2 + y^2 = 1$内；

④已知点$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$满足方程，不满足$y \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，.

综上：正确结论的序号是①②.

答案为：①②.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 【答案】(Ⅰ)见解析 (Ⅱ)见解析

【解析】试题分析：(1) 先由图形特点得到$AA_1 \perp CD$，$CD \perp AB$，由线面垂直的判定定理得到结论；(2) 构造三角形的中位线，得到线线平行，进而得到线面平行。.

解析：

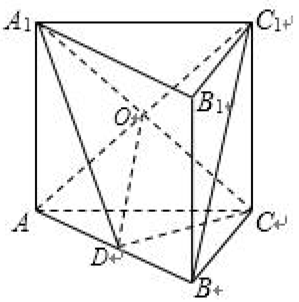
(Ⅰ)因为正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，D为AB的中点，

所以$CD \perp AB$，$AA_1 \perp$底面ABC. 又因为$CD \subset$底面ABC，

所以$AA_1 \perp CD$.

又因为$AA_1 \cap AB = A$，$AB \subset$平面ABB_1A_1，$AA_1 \subset$平面ABB_1A_1，

所以$CD \perp$平面ABB_1A_1.



(Ⅱ)连接AC_1，设$A_1C \cap AC_1 = O$，连接OD，

由正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，得$AO = OC_1$，

又因为在ΔABC_1中，$AD = DB$，

所以$OD // BC_1$，

又因为$BC_1 \not\subset$平面A_1CD，$OD \subset$平面A_1CD，

所以$BC_1 //$平面A_1CD.

16. 【答案】(Ⅰ) $m = 9$ (Ⅱ) $m = 10$.

【解析】试题分析：(1) 根据两圆相切满足的条件：圆心距等于两半径的和，得到$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2} = 1+\sqrt{25-m}$，解出方程即可；(2) 根据垂径定理，和三角形勾股定理得到$r^2 = 25 - m = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2$，解得最终结果。

解析：

(Ⅰ) 将圆C的方程配方，得$(x-3)^2+(y-4)^2 = 25-m$，

所以圆C的圆心为$(3,4)$，半径$r = \sqrt{25-m}$ $(m < 25)$.

因为圆C与圆$x^2+y^2 = 1$相外切，

所以两圆的圆心距等于其半径和，即$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=1+\sqrt{25-m}$，

解得$m=9$.

（Ⅱ）圆C的圆心到直线$x+y-3=0$的距离$d=\frac{|3+4-3|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

因为直线$x+y-3=0$与圆C相交所得的弦长为$2\sqrt{7}$，

所以由垂径定理，可得$r^2=25-m=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2$，

解得$m=10$.

17. 【答案】（Ⅰ）1（Ⅱ）$|\vec{AM}|=\sqrt{2}$（Ⅲ）见解析

【解析】试题分析：（Ⅰ）易证得$AD\perp$平面ABB_1A_1，利用$V_{C-AEB_1B}=\frac{1}{3}\cdot S_{四边形AEB_1B}\cdot AD$求解即可；

（Ⅱ）分别以AD，AA_1，AB所在直线为x轴，y轴，z轴，如图建立空间直角坐标系，求出平面BCC_1B_1的一个法向量为$\overrightarrow{m}$，设$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EC_1}=(\lambda,\lambda,\lambda)$，由$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AM},\overrightarrow{m}>|$求解即可；

（Ⅲ）易得对于线段B_1C上任意一点N，直线NE与直线CD都不平行.

试题解析：

（Ⅰ）因为$AA_1\perp$平面ABCD，$AD\subset$平面ABCD，

所以$AA_1\perp AD$.

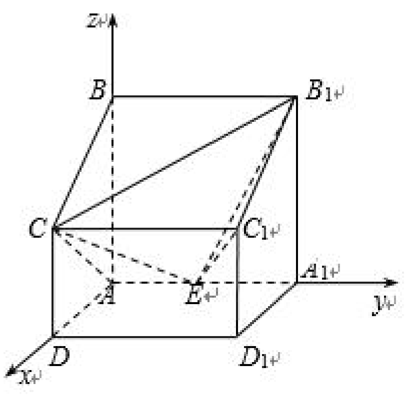
又因为$AB\perp AD$，$AA_1\cap AB=A$，

所以$AD\perp$平面ABB_1A_1.

因为AB//CD，

所以四棱锥$C-AEB_1B$的体积$V_{C-AEB_1B}=\frac{1}{3}\cdot S_{四边形AEB_1B}\cdot AD=\frac{1}{3}\times[\frac{1}{2}\times(1+2)\times2]\times1=1$.

（Ⅱ）由$AA_1\perp$平面ABCD，$AB\perp AD$，可得AD，AA_1，AB两两垂直，所以分别以AD，AA_1，AB所在直线为x轴，y轴，z轴，如图建立空间直角坐标系，



则$A(0,0,0)$，$B(0,0,2)$，$C(1,0,1)$，$E(0,1,0)$，$C_1(1,2,1)$.

所以$\vec{AE}=(0,1,0)$，$\vec{EC_1}=(1,1,1)$，$\vec{BC}=(1,0,-1)$，$\vec{CC_1}=(0,2,0)$.

设平面BCC_1B_1的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

由$m\cdot\vec{BC}=0$，$\vec{m}\cdot\vec{CC_1}=0$，得$\begin{cases}x-z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$

令$x=1$，得$\vec{m}=(1,0,1)$.

设$\vec{EM}=\lambda\vec{EC_1}=(\lambda,\lambda,\lambda)$，其中$0\le\lambda\le1$，

则$\vec{AM}=\vec{AE}+\vec{EM}=(\lambda,\lambda+1,\lambda)$，

记直线AM与平面BCC_1B_1所成角为θ，

则$\sin\theta=|\cos<\vec{AM},\vec{m}>|=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+2\lambda+1}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$，

解得$\lambda=-\dfrac{1}{5}$（舍），或$\lambda=\dfrac{1}{3}$.

所以$\vec{AM}=(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$，

故线段AM的长度为$|\vec{AM}|=\sqrt{2}$.

（III）对于线段B_1C上任意一点N，直线NE与直线CD都不平行.

18. 【答案】（Ⅰ）$\dfrac{5}{2}$（Ⅱ）8.

【解析】试题分析：（Ⅰ）直线AB的方程与抛物线联立得$4x^2-6x+1=0$，设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$|AB|=\sqrt{5}|x_1-x_2|$，结合韦达定理求解即可；

（Ⅱ）设$A(\dfrac{t^2}{2},t)$，$B(\dfrac{s^2}{2},s)$，由$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\dfrac{(st)^2}{4}+st=0$，得$s=-\dfrac{4}{t}$，进而得$B(\dfrac{8}{t^2},-\dfrac{4}{t})$，直接带入求解即可.

试题解析：

（Ⅰ）由题意，得$F(\dfrac{1}{2},0)$，则直线AB的方程为$y=2(x-\dfrac{1}{2})$.

由$\begin{cases}y=2(x-\dfrac{1}{2}),\\ y^2=2x,\end{cases}$消去y，得$4x^2-6x+1=0$.

设点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\Delta>0$，且$x_1+x_2=\dfrac{3}{2}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{4}$，

所以$|AB|=\sqrt{5}|x_1-x_2|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{5}{2}$.

（Ⅱ）因为A,B是抛物线C上的两点，所以设$A(\frac{t^2}{2},t)$，$B(\frac{s^2}{2},s)$，

由$OA\perp OB$，得$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\frac{(st)^2}{4}+st=0$，

所以$st=-4$，即$s=-\frac{4}{t}$.

则点B的坐标为$B(\frac{8}{t^2},-\frac{4}{t})$.

所以$|OA|\cdot|OB|=\sqrt{\frac{t^4}{4}+t^2}\cdot\sqrt{\frac{64}{t^4}+\frac{16}{t^2}}=\sqrt{32+4t^2+\frac{64}{t^2}}\geq 8$，

当且仅当$t=\pm 2$时，等号成立.

所以$|OA|\cdot|OB|$的最小值为8.

19. 【答案】（Ⅰ）见解析（Ⅱ）$\frac{\sqrt{3}}{3}$（Ⅲ）12π.

【解析】试题分析：（Ⅰ）易证$BC\perp$平面ACD，进而得$BC\perp MD$；

（Ⅱ）以OC，OD，OE所在直线为x轴，y轴，z轴，如图建立空间直角坐标系，分别求出平面CMD的一个法向量为$\vec{n}$和平面BMD的一个法向量为$\vec{m}$，利用法向量求二面角即可；

（Ⅲ）取AB的中点为E，由线段长相等即可证得E为四面体$A-BCD$的外接球的球心，进而可求球的表面积.

试题解析：

（Ⅰ）因为$AD\perp$平面BCD，$BC\subset$平面BCD，

所以$AD\perp BC$.

又因为$BC\perp CD$，$AD\cap CD=D$，

所以$BC\perp$平面ACD.

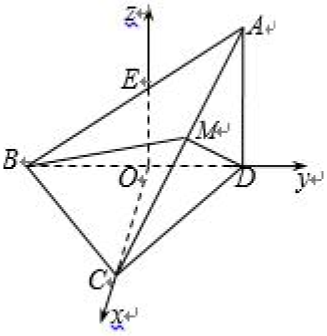
又因为$MD\subset$平面ACD，

所以$BC\perp MD$.

（Ⅱ）如图，设BD的中点为O，AB的中点为E，连接OC，OE，

因为$AD\perp$平面BCD，

所以$EO\perp$平面BCD，由$BC\perp CD$，且$BC=CD$，可得OC，OD，OE两两垂直，所以分别以OC，OD，OE所在直线为x轴，y轴，z轴，如图建立空间直角坐标系，



则$A(0,\sqrt{2},2)$，$B(0,-\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},0,0)$，$D(0,\sqrt{2},0)$，$M(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1)$.

所以$\vec{DM}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$，$\vec{BD}=(0,2\sqrt{2},0)$，$\vec{CD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$.

设平面BMD的一个法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

由$m\cdot\vec{DM}=0$，$m\cdot\vec{BD}=0$，得$\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2z=0,\\ 2\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令$x=\sqrt{2}$，得$\vec{m}=(\sqrt{2},0,-1)$.

设平面CMD的一个法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由$n\cdot\vec{DM}=0$，$n\cdot\vec{CD}=0$，得$\begin{cases}\sqrt{2}x_1-\sqrt{2}y_1+2z_1=0,\\ -\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0,\end{cases}$

令$x_1=1$，得$\vec{n}=(1,1,0)$.

所以$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由图可知，二面角$B-MD-C$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（III）根据（II），记AB的中点为E，

由题意，ΔABD为直角三角形，斜边$AB=2\sqrt{3}$，

所以$EA=EB=ED=\sqrt{3}$.

由（I），得$BC\perp$平面ACD，

所以$BC\perp AC$.

在直角ΔABC中，E为斜边AB的中点，

所以$EA=EB=EC$.

所以E为四面体$A-BCD$的外接球的球心，

故四面体$A-BCD$的外接球的表面积$S=4\pi\cdot EA^2=12\pi$.

点睛：本题考查了球与几何体的问题，是高考中的重点问题，要有一定的空间想象能力，这样才能找准关系，得到结果，一般外接球需要求球心和半径，首先应确定球心的位置，借助于外接球的性质，球心到各顶点距离相等，这

样可先确定几何体中部分点组成的多边形的外接圆的圆心，过圆心且垂直于多边形所在平面的直线上任一点到多边形的顶点的距离相等，然后同样的方法找到另一个多边形的各顶点距离相等的直线（这两个多边形需有公共点），这样两条直线的交点，就是其外接球的球心，再根据半径，顶点到底面中心的距离，球心到底面中心的距离，构成勾股定理求解，有时也可利用补体法得到半径，例：三条侧棱两两垂直的三棱锥，可以补成长方体，它们是同一个外接球.

20. 【答案】（Ⅰ）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$（Ⅱ）$|PQ|\in[\sqrt{13}-3,\sqrt{13}-2]$Ⅲ）**见解析**

【解析】试题分析：（Ⅰ）由焦点及离心率求解方程组即可；

（Ⅱ）由$|PQ|=|OP|-|OQ|=\sqrt{13}-|OQ|$，设$Q(x_1,y_1)$，利用$|OQ|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$进行求解即可；

（Ⅲ）先讨论 PA 直线斜率不存在和为 0 时的特殊情况，得相切的结论，再计算一般情况，设点$P(x_0,y_0)$，直线PA的斜率为k，则$k\neq0$，直线PA：$y-y_0=k(x-x_0)$，进而得直线PB与椭圆联立，通过计算判别式即可证得.

试题解析：

（Ⅰ）由题意，知$c=\sqrt{5}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以$a=3$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=2$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）由题意，得$|PQ|=|OP|-|OQ|=\sqrt{13}-|OQ|$.

设$Q(x_1,y_1)$，则$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$.

所以$|OQ|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+(4-\frac{4}{9}x_1^2)}=\sqrt{4+\frac{5}{9}x_1^2}$，

因为$x_1\in[-3,3]$，

所以当$x_1=0$时，$|OQ|_{min}=2$；当$x_1=\pm3$时，$|OQ|_{max}=3$.

所以$|PQ|\in[\sqrt{13}-3,\sqrt{13}-2]$.

（Ⅲ）**结论**：直线PB与椭圆C相切.

证明：由题意，点B在圆M上，且线段AB为圆M的直径，

所以$PA\perp PB$.

当直线$PA\perp x$轴时，易得直线PA的方程为$x=\pm3$，

由题意，得直线PB的方程为$y=\pm2$，

显然直线PB与椭圆C相切.

同理当直线$PA//x$轴时，直线PB也与椭圆C相切.

当直线PA与x轴既不平行也不垂直时，

设点$P(x_0,y_0)$，直线PA的斜率为k，则$k\neq 0$，直线PB的斜率$-\frac{1}{k}$，

所以直线PA：$y-y_0=k(x-x_0)$，直线PB：$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$，

由$\begin{cases} y-y_0=k(x-x_0), \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 消去y，

得$(9k^2+4)x^2+18(y_0-kx_0)kx+9(y_0-kx_0)^2-36=0$.

因为直线PA与椭圆C相切，

所以$\Delta_1=[18(y_0-kx_0)k]^2-4(9k^2+4)[9(y_0-kx_0)^2-36]=0$，

整理，得$\Delta_1=-144[(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-4]=0$.　　（1）

同理，由直线PB与椭圆C的方程联立，

得$\Delta_2=-144[(x_0^2-9)\frac{1}{k^2}+2x_0y_0\frac{1}{k}+y_0^2-4]$.　　（2）

因为点P为圆$M: x^2+y^2=13$上任意一点，

所以$x_0^2+y_0^2=13$，即$y_0^2=13-x_0^2$.

代入（1）式，得$(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+(9-x_0^2)=0$，

代入（2）式，得$\Delta_2=-\frac{144}{k^2}[(x_0^2-9)+2x_0y_0k+(y_0^2-4)k^2]$

$=-\frac{144}{k^2}[(x_0^2-9)+2x_0y_0k+(9-x_0^2)k^2]$

$=\frac{144}{k^2}[(x_0^2-9)k^2-2x_0y_0k+(9-x_0^2)]$

$=0$.

所以此时直线PB与椭圆C相切.

综上，直线PB与椭圆C相切.