北京市第八十中学 2020～2021 学年度第一学期期中考试

高 二 数 学 试 卷 2020. 11

(考试时间：120 分钟　总分：150 分)

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．请把答案填在答题卡中相应的位置上）

1．在空间直角坐标系中，已知点 $A(1,-2,3),B(3,2,-5)$，则线段 AB 的中点坐标为

A．$(2,0,-1)$　　B．$(-2,0,1)$　　C．$(2,0,-2)$　　D．$(-1,-2,4)$

2．直线 $\sqrt{3}x-y+a=0(a\in\mathbf{R})$ 的倾斜角为

A．$30°$　　B．$60°$　　C．$120°$　　D．$150°$

3．若原点在直线 l 上的射影是 $P(-2,1)$，则直线 l 的方程为

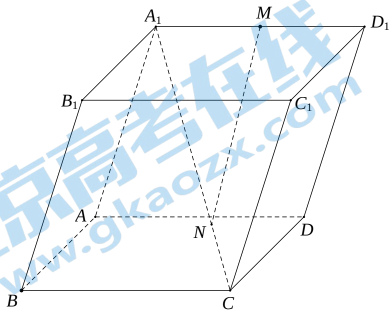
A．$x+2y=0$　　B．$2x+y+3=0$　　C．$2x-y+5=0$　　D．$2x-y+3=0$

4．圆 C_1：$x^2+y^2+2x=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-4x+8y+4=0$ 的位置关系是

A．相交　　B．外切　　C．内切　　D．相离

5．若直线 $l_1:(a-1)x+2y+1=0$ 与直线 $l_2:x+ay+3=0$ 平行，则实数 a 等于

A．-1　　B．2　　C．0 或 -2　　D．-1 或 2



6．如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，$M$ 是 A_1D_1 的中点，点 N 是 CA_1 上的点，且 $\dfrac{CN}{NA_1}=\dfrac{1}{4}$，用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$ 的结果是

A．$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B．$\dfrac{1}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{5}\boldsymbol{b}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{c}$　　C．$\dfrac{1}{5}\boldsymbol{a}-\dfrac{3}{10}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{5}\boldsymbol{c}$　　D．$\dfrac{4}{5}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{10}\boldsymbol{b}-\dfrac{4}{5}\boldsymbol{c}$

7．直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=90°$，M,N 分别是 A_1B_1,A_1C_1 的中点，$BC=CA=CC_1$，则异面直线 BM 与 AN 所成的角的余弦值为

A．$\dfrac{1}{10}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8．已知椭圆 $C:x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点分别为 F_1,F_2,P 是椭圆 C 上的动点，则下列结论正确的是

A．$|PF_1|+|PF_2|=2$　　B．ΔPF_1F_2 面积的最大值是 $\sqrt{2}$

C．椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　　D．以线段 F_1F_2 为直径的圆与直线 $x+y-\sqrt{2}=0$ 相切

9．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点为 F_1,F_2，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A,B 两点．若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$，则椭圆 C 的方程为

A．$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　B．$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　　C．$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　　D．$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

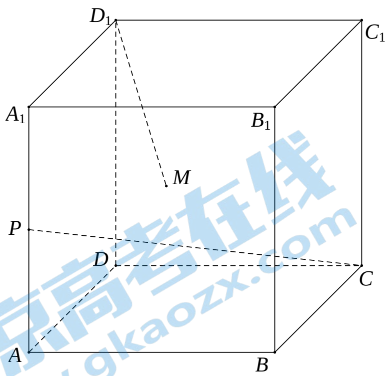
10．直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是

A．$[2,6]$　　B．$[4,8]$　　C．$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　D．$[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

11．已知函数 $f(x)=\log_3(x+2)$，若 $a>b>c>0$，则 $\dfrac{f(a)}{a},\dfrac{f(b)}{b},\dfrac{f(c)}{c}$ 的大小关系为

A．$\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}<\dfrac{f(c)}{c}$　　B．$\dfrac{f(c)}{c}<\dfrac{f(b)}{b}<\dfrac{f(a)}{a}$

C．$\dfrac{f(c)}{c}<\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(b)}{b}$　　D．$\dfrac{f(a)}{a}<\dfrac{f(c)}{c}<\dfrac{f(b)}{b}$



12．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，P 是 AA_1 的中点，点 M 在侧面 AA_1B_1B（含边界）内，若 $D_1M\perp CP$，则 ΔBCM 面积的最小值为

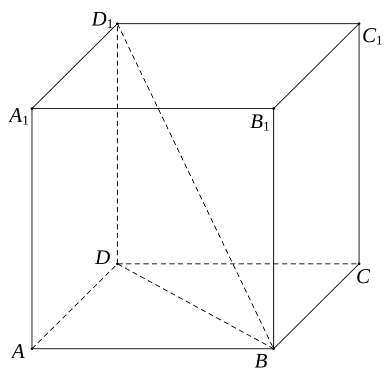
A．8　　B．4　　C．$8\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请把答案填在答题卡中相应的位置上）

13．已知曲线 $x^2+my-3=0$ 过点 $(1,1)$，则 $m=$____.

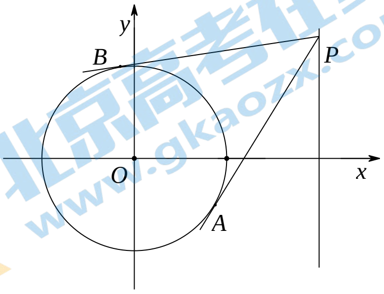
14．已知点 $A(0,2)$，点 B 是直线 $x+y=0$ 上的动点，则 $|AB|$ 的最小值是____.

15．若圆 $C:x^2+(y+1)^2=1$ 被直线 $l:x+y+a=0$ 所截得的弦长为 $\sqrt{2}$，则实数 a 的值是______.



16．在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为1的正方形，D_1B 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$，则棱 AA_1 的长为______；点 C_1 到平面 BDD_1 的距离为____.

17. 已知点 $A(-1,0)$，点 B 是圆 $C:(x-1)^2+y^2=16$ 上一动点，线段 AB 的垂直平分线交 BC 于 P，则动点 P 的轨迹方程为_____.



18. 已知圆 O 的圆心为坐标原点，且与直线 $x+y+4\sqrt{2}=0$ 相切，则圆 O 的方程为_____. 若点 P 在直线 $x=8$ 上，过点 P 引圆 O 的两条切线 PA,PB，切点分别为 A,B，如图所示，则直线 AB 恒过定点_____.

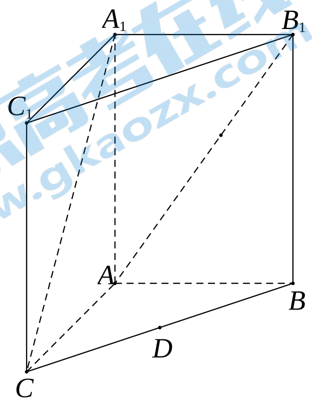
三、解答题（本大题共 5 小题，共 72 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 请把答案填在答题卡中相应的位置上）

19.（本小题满分 12 分）已知 ΔABC 的顶点 $C(4,3)$，边 AC 上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$，点 $(2,-1)$ 是边 AB 的中点.

（1）求边 AC 所在直线的方程；

（2）求点 B 的坐标.

20.（本小题满分 15 分）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AC=4$，$AB=3, BC=5$，点 D 是线段 BC 的中点.



（1）求证：$AB\perp A_1C$；

（2）试求二面角 $D-CA_1-A$ 的余弦值；

（3）求点 B_1 到平面 A_1CD 的距离.

21.（本小题满分 13 分）已知圆 $C:x^2+y^2-2x-4y+m=0$.

（1）求圆 C 的圆心坐标及实数 m 的取值范围；

（2）若圆 C 与直线 $x+2y-4=0$ 相交于 M,N 两点，且 $OM\perp ON$（O 为坐标原点），求 m 的值.

22．（本小题满分 16 分）如图1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，D，E 分别为 AC，AB 的中点，点 F 为线段 CD 上的一点．将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使 $A_1F\perp CD$，如图2．

（1）求证：$DE\,//$ 平面 A_1CB；

（2）求证：$A_1F\perp BE$；

（3）线段 A_1B 上是否存在点 Q，使面 $A_1CB\perp$ 平面 DEQ？说明理由．

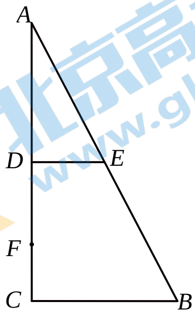


图 1

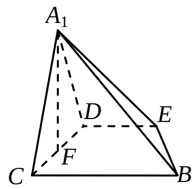


图 2

23．（本小题满分 16 分）阿基米德（公元前 287 年-公元前 212 年，古希腊）不仅是著名的哲学家、物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率 π 等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积．在平面直角坐标系 Oxy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的面积为 $2\sqrt{3}\pi$，两焦点与短轴的一个顶点构成等边三角形．过点 $(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A,B．

（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）设椭圆 C 的左、右顶点分别为 P,Q，直线 PA 与直线 $x=4$ 交于点 F，试证明 B,Q,F 三点共线;

（3）求 ΔAOB 面积的最大值．

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	B	D	D	C	D	A	A	A	D

二、填空题

题号	13	14	15	16	17	18
答案	2	$\sqrt{2}$	0 或 2	$\sqrt{6};\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$	$x^2+y^2=16;(2,0)$

（注：两个空的，前 2 后 3）

三、解答题（本大题共 5 小题，共 60 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．请把答案填在答题卡中相应的位置上）

19．（本小题满分 12 分）已知 ΔABC 的顶点 $C(4,3)$，边 AC 上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$，点 $(2,-1)$ 是边 AB 的中点．

（1）求边 AC 所在直线的方程；

（2）求点 B 的坐标．

解：（1）因为边 AC 上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$，

所以边 AC 所在直线的斜率为 -2．

所以边 AC 所在直线的方程为 $y-3=-2(x-4)$．

即边 AC 所在直线的方程为 $2x+y-11=0$．　　…5 分

（2）设点 B 的坐标为 (x_0,y_0)．

因为边 AC 上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$，所以 $x_0-2y_0-5=0$．

又因为点 $(2,-1)$ 是边 AB 的中点，所以点 A 的坐标为 $(4-x_0,-2-y_0)$．

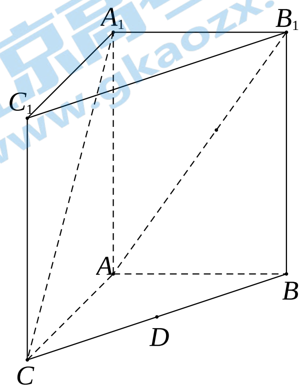
又因为边 AC 所在直线的方程为 $2x+y-11=0$，

所以 $2(4-x_0)-(2+y_0)-11=0$．即 $2x_0+y_0+5=0$．

由 $\begin{cases}2x_0+y_0+5=0,\\ x_0-2y_0-5=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_0=-1,\\ y_0=-3.\end{cases}$

所以点 B 的坐标为 $(-1,-3)$．　　…12 分

20.（本小题满分 15 分）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1=AC=4$， $AB=3, BC=5$，点 D 是线段 BC 的中点.



（1）求证： $AB\perp A_1C$；

（2）试求二面角 $D-CA_1-A$ 的余弦值;

（3）求点 B_1 到平面 A_1CD 的距离.

证明:（1）在 ΔABC 中，因为 $AC=4$， $AB=3, BC=5$，

所以 $AB\perp AC$.

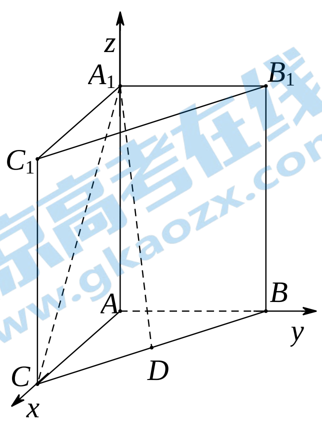
在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC. 所以 $AA_1\perp AB$.

又因为 $AA_1\cap AC=A$，所以 $AB\perp$ 平面 A_1ACC_1.

所以 $AB\perp A_1C$. …5 分

（2）由（1）可知， $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AB, AA_1\perp AC$.



又 $AB\perp AC$，如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$， 则 $D(2,\dfrac{3}{2},0)$， $C(4,0,0), A_1(0,0,4)$.

因为 $AB\perp$ 平面 A_1ACC_1，

所以平面 A_1AC 的一个法向量是 $\overrightarrow{AB}=(0,3,0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 DA_1C 的一个法向量.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x+\dfrac{3}{2}y=0,\\ -4x+4z=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y=\dfrac{4}{3}x,\\ z=x.\end{cases}$

令 $x=3$，则 $\boldsymbol{n}=(3,4,3)$.

设二面角 $D-CA_1-A$ 的夹角为 θ，则 $|\cos\theta|=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\right\rangle\right|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{12}{3\times\sqrt{34}}=\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$.

由图可知，二面角 $D-CA_1-A$ 为锐角，所以二面角 $D-CA_1-A$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. …12 分

（3）设点 B_1 到平面 A_1CD 的距离为 d．因为 $\overrightarrow{A_1B_1}=(0,3,0)$，

所以 $d=\left|\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1}\cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\dfrac{12}{\sqrt{34}}=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$．

所以点 B_1 到平面 A_1CD 的距离为 $\dfrac{6\sqrt{34}}{17}$．　　　　---15 分

21.（本小题满分 13 分）已知圆 $C: x^2+y^2-2x-4y+m=0$．

（1）求圆 C 的圆心坐标及实数 m 的取值范围；

（2）若圆 C 与直线 $x+2y-4=0$ 相交于 M,N 两点，且 $OM\perp ON$（O 为坐标原点），求 m 的值．

解：（1）因为圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2x-4y+m=0$，

所以圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=5-m$．

所以圆 C 的圆心坐标为 $(1,2)$．实数 m 的取值范围为 $(-\infty,5)$．···5 分

（2）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y+m=0,\\ x+2y-4=0\end{cases}$ 得 $5x^2-8x+4m-16=0$．

因为圆 C 与直线 $x+2y-4=0$ 相交于 M,N 两点，

所以 $\Delta=(-8)^2-4\times5\times(4m-16)>0$．

所以 $m<\dfrac{24}{5}$．

所以 $x_1+x_2=\dfrac{8}{5}, x_1\cdot x_2=\dfrac{4m-16}{5}$．

又因为 $OM\perp ON$，

所以 $x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\dfrac{4-x_1}{2}\cdot\dfrac{4-x_2}{2}=\dfrac{5}{4}x_1x_2-(x_1+x_2)+4$

$=\dfrac{5}{4}\times\dfrac{4m-16}{5}-\dfrac{8}{5}+4=m-\dfrac{8}{5}=0$．

解得 $m=\dfrac{8}{5}$．…13 分

22.（本小题满分 16 分）如图1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D，E 分别为 AC，AB 的中点，点 F 为线段 CD 上的一点．将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使 $A_1F\perp CD$，如图2．

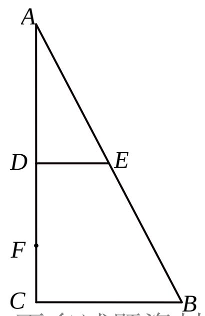


图1

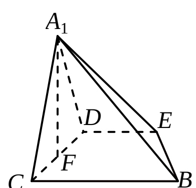


图2

（1）求证：$DE//$ 平面 A_1CB；

（2）求证：$A_1F \perp BE$；

（3）线段 A_1B 上是否存在点 Q，使面 $A_1CB \perp$ 平面 DEQ？说明理由.

解：（1）因为 D，E 分别为 AC，AB 的中点，

所以 $DE//BC$.

又因为 $DE \not\subset$ 平面 A_1CB，

所以 $DE//$ 平面 A_1CB.　　　…4 分

（2）由已知得 $AC \perp BC$ 且 $DE//BC$，

所以 $DE \perp AC$.

所以 $DE \perp A_1D$，$DE \perp CD$.

所以 $DE \perp$ 平面 A_1DC.

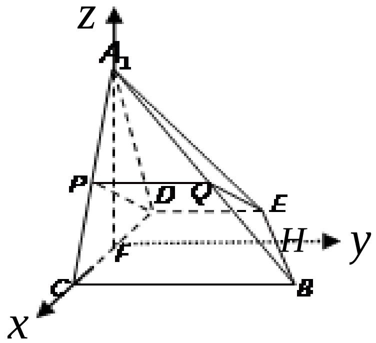
而 $A_1F \subset$ 平面 A_1DC，

所以 $DE \perp A_1F$.

又因为 $A_1F \perp CD$，

所以 $A_1F \perp$ 平面 $BCDE$.

所以 $A_1F \perp BE$.　…9 分



（3）如图，作 $FH//BC$ 交 BE 于 H，则 $FH \perp CD$. 由（2）可知，$A_1F \perp$ 平面 $BCDE$，所以 $A_1F \perp BE, A_1F \perp FH$. 建立空间直角坐标系 $F-xyz$.

（法 1）设 $BC=2b, FC=n, DF=m, A_1F=c$，则 $DE=b$.

所以 $A_1(0,0,c), B(n,2b,0), D(-m,0,0), E(-m,b,0)$.

假设在线段 A_1B 上存在点 Q，且 $\dfrac{A_1Q}{A_1B}=\lambda(\lambda\in[0,1])$，使得平面 $A_1CB \perp$ 平面 DEQ.

因为 $\dfrac{A_1Q}{A_1B}=\lambda$，所以 $\overrightarrow{A_1Q}=\lambda\overrightarrow{A_1B}$.

所以 $\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1Q}=\overrightarrow{DA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1B}=(m,0,c)+\lambda(n,2b,-c)$

$=(m+\lambda n,2\lambda b,c-\lambda c)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 DEQ 的一个法向量.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}by=0,\\ (m+\lambda n)x+2\lambda by+(c-\lambda c)z=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases} y=0, \\ (m+\lambda n)x+(c-\lambda c)z=0. \end{cases}$

令 $x=c(\lambda-1)$，则 $\boldsymbol{n}=((\lambda-1)c,0,m+\lambda n)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 A_1CB 的一个法向量.

由$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0 \end{cases}$得$\begin{cases} 2by_0=0, \\ -nx_0+cz_0=0. \end{cases}$解得$\begin{cases} y_0=0, \\ nx_0=cz_0. \end{cases}$

令 $x_0=c$，则 $\boldsymbol{m}=(c,0,n)$.

由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(c,0,n)\cdot((\lambda-1)c,0,m+\lambda n)=(c^2(\lambda-1)+n(m+\lambda n)=0$，

所以 $\lambda(c^2+n^2)=c^2-mn$.

又因为 $(m+n)^2-c^2=m^2$，所以 $c^2=n^2+2mn$.

所以 $\lambda=\dfrac{n^2+mn}{n^2+2mn+n^2}=\dfrac{1}{2}$.

所以当点 Q 是线段 A_1B 中点时，平面 $A_1CB\perp$ 平面 DEQ.　　…16 分

（法 2）线段 A_1B 上存在点 Q，使得平面 $A_1CB\perp$ 平面 DEQ. 理由如下：

如图，分别取 A_1C，A_1B 的中点 P，Q，则 $PQ//BC$.

又因为 $DE//BC$，

所以 $DE//PQ$.

所以平面 DEQ 即为平面 DEP.

由（II）知，$DE\perp$ 平面 A_1DC，

所以 $DE\perp A_1C$.

又因为 P 是等腰三角形 DA_1C 底边 A_1C 的中点，

所以 $A_1C\perp DP$.

所以 $A_1C\perp$ 平面 DEP.

从而 $A_1C\perp$ 平面 DEQ. 所以面 $A_1CB\perp$ 平面 DEQ.

故线段 A_1B 上存在点 Q，使得面 $A_1CB\perp$ 平面 DEQ.　　…16 分

23.（本小题满分 16 分）阿基米德（公元前 287 年-公元前 212 年，古希腊）不仅是著名的哲学家、物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率 π 等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 在平面直角坐标系 Oxy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的面积为 $2\sqrt{3}\pi$，两焦点与短轴的一个

顶点构成等边三角形．过点 $(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A,B．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设椭圆 C 的左、右顶点分别为 P,Q，直线 PA 与直线 $x=4$ 交于点 F，试证明 B,Q,F 三点共线；

（3）求 ΔAOB 面积的最大值．

解：（1）由已知得 $\begin{cases}\pi ab=2\sqrt{3}\pi,\\ b^2+c^2=4c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3}.\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．…4 分

（2）（ⅰ）当直线 l 的斜率不存在时，易知 $A(1,\dfrac{3}{2}),B(1,-\dfrac{3}{2})$ 或 $A(1,-\dfrac{3}{2}),B(1,\dfrac{3}{2})$．

当 $A(1,\dfrac{3}{2}),B(1,-\dfrac{3}{2})$ 时，直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}(x+2)$，所以点 $F(4,3)$．

此时，$\overrightarrow{QB}=(-1,-\dfrac{3}{2}),\overrightarrow{QF}=(2,3)$，显然 B,Q,F 三点共线．

同理，当 $A(1,-\dfrac{3}{2}),B(1,\dfrac{3}{2})$ 时，B,Q,F 三点共线．

（ⅱ）当直线 l 的斜率存在时，显然斜率 $k\neq 0$．设直线 $l:y=k(x-1),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+(4k^2-12)=0$．

显然 $\Delta>0$ 成立．所以 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$．

由题意可知，椭圆 C 的左、右顶点分别为 $P(-2,0),Q(2,0)$．

直线 PA 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$．

又因为直线 PA 与直线 $x=4$ 交于点 F，所以 $F(4,\dfrac{6y_1}{x_1+2})$．

所以 $\overrightarrow{QB}=(x_2-2,y_2),\overrightarrow{QF}=(2,\dfrac{6y_1}{x_1+2})$．

因为 $(x_2-2)\dfrac{6y_1}{x_1+2}-2y_2=\dfrac{6y_1(x_2-2)-2y_2(x_1+2)}{x_1+2}=\dfrac{6k(x_1-1)(x_2-2)-2k(x_2-1)(x_1+2)}{x_1+2}$

$$=2k\times\frac{2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8}{x_1+2},$$

又 $2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=2\times\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}-5\times\dfrac{8k^2}{3+4k^2}+8=\dfrac{8k^2-24-40k^2+24+32k^2}{3+4k^2}=0$，

所以 $(x_2-2)\dfrac{6y_1}{x_1+2}-2y_2=0$.

所以 $\overrightarrow{QB}//\overrightarrow{QF}$.

所以 B,Q,F 三点共线. …10 分

（3）（ⅰ）当直线 l 的斜率不存在时，易知 $|AB|=3$，此时 ΔAOB 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times3\times1=\dfrac{3}{2}$.

（ⅱ）当直线 l 的斜率存在时，显然斜率 $k\neq0$.

所以 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+k^2)[(\dfrac{8k^2}{3+4k^2})^2-4\times\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}}=12\times\dfrac{1+k^2}{3+4k^2}$.

又因为 $d_{O\to l}=\dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

所以 ΔAOB 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d_{O\to l}=\dfrac{1}{2}\times12\times\dfrac{1+k^2}{3+4k^2}\times\dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$

$$=6\sqrt{\frac{(1+k^2)k^2}{(3+4k^2)^2}}.$$

令 $3+4k^2=t$，则 $k^2=\dfrac{t-3}{4}(t>3)$.

所以 $\dfrac{(1+k^2)k^2}{(3+4k^2)^2}=\dfrac{(1+\frac{t-3}{4})\frac{t-3}{4}}{t^2}=\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{t^2-2t-3}{t^2}=\dfrac{1}{16}(-\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{2}{t}+1)$

$$=\frac{1}{16}[-3(\frac{1}{t}+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}].$$

因为 $t>3$，所以 $0<\dfrac{1}{t}<\dfrac{1}{3}$. 所以 $\dfrac{(1+k^2)k^2}{(3+4k^2)^2}\in(0,\dfrac{1}{16})$. 所以 $\sqrt{\dfrac{(1+k^2)k^2}{(3+4k^2)^2}}\in(0,\dfrac{1}{4})$

所以 $S\in(0,\dfrac{3}{2})$.

综上所述，当直线 $l\perp x$ 轴时，ΔAOB 的面积取得最大值 $\dfrac{3}{2}$. …16 分

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多