天一大联考
2023—2024 学年高中毕业班阶段性测试(五)
数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 A

命题意图 本题考查集合的表示、集合的运算.

解析 依题意,$A=\{x\in\mathbf{N}|0\leqslant x\leqslant 1\}=\{0,1\}$,$B=\{x|x^3-x=0\}=\{-1,0,1\}$,所以 $A\subsetneqq B$.

2. 答案 B

命题意图 本题考查复数的基本运算.

解析 $z=\dfrac{5+6\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=6-5\mathrm{i}$,虚部为 -5.

3. 答案 D

命题意图 本题考查圆的方程与性质.

解析 因为圆 C 与 x 轴相切,所以$\dfrac{a^2}{4}=a$ 且 $a>0$,解得 $a=4$.

4. 答案 B

命题意图 本题考查三角恒等变换、充要条件的判定.

解析 $5\cos 2\alpha+5\sin 2\alpha+1=0\Leftrightarrow 3\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha=0$,显然 $\cos\alpha\neq 0$,则 $2\tan^2\alpha-5\tan\alpha-3=0$,解得 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$或 $\tan\alpha=3$.

5. 答案 A

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

解析 设 AB 的中点为 M,因为$\overrightarrow{CD}=2(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$,所以$\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{DM}$,所以点 D 是线段 CM 的五等分点,所以$\triangle ABC$ 的面积是$\triangle ABD$ 的面积的 5 倍.

6. 答案 C

命题意图 本题考查排列组合.

解析 1 与 4 相邻,共有 $A_2^2=2$ 种排法,两个 2 之间插入 1 个数,共有 $A_2^1=2$ 种排法,再把组合好的数全排列,共有 $A_3^3=6$ 种排法,则总共有 $2\times2\times6=24$ 种密码.

7. 答案 D

命题意图 本题考查导数的运算、指数的运算.

解析 依题意,$f'(x)=\mathrm{e}^x-2\lambda x$,则$\begin{cases}\mathrm{e}^p-2\lambda p=0,\\ \mathrm{e}^q-2\lambda q=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\mathrm{e}^p=2\lambda p,\\ \mathrm{e}^{2p}=4\lambda p,\end{cases}$显然 $\lambda,p\neq0$,故 $\mathrm{e}^p=2$,则 $p=\ln 2$,代入 $\mathrm{e}^p=2\lambda p$ 中,解得 $\lambda=\dfrac{1}{\ln 2}$,则 $f(0)=1-\dfrac{1}{\ln 2}$.

8. 答案 C

命题意图 本题考查双曲线的方程与性质.

解析 易知 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,不妨设直线 $BD:y=\frac{b}{a}(x-c)$,联立方程得 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}(x-c),\\ y=-\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 得 $x=\frac{c}{2}$,$y=-\frac{bc}{2a}$,则 $D\left(\frac{c}{2},-\frac{bc}{2a}\right)$. 而 $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{BD}$,故 $B\left(\frac{3c}{4},-\frac{bc}{4a}\right)$,代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中,得 $\frac{9c^2}{16a^2}-\frac{c^2}{16a^2}=1$,则 $\frac{c^2}{a^2}=2=1+\frac{b^2}{a^2}$,故所求 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** AB

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 依题意,$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$,则 -12π 为 $f(x)$ 的一个周期,故 A 正确;$f(2\pi)=2$,故 B 正确;$f(x+\pi)=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$,不是偶函数,故 C 错误;$f(x)$ 在 $[2\pi,3\pi]$ 上单调递减,故 D 错误.

10. **答案** BCD

命题意图 本题考查三棱台的结构特征.

解析 对于 A,根据条件可得 $A_1B_1=4$,$AB=6$,所以等腰梯形 ABB_1A_1 的高为 $\sqrt{2^2-\left(\frac{6-4}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$,面积为 $\frac{(6+4)\times\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$,所以该三棱台的侧面积为 $5\sqrt{3}\times3=15\sqrt{3}$,故 A 错误;

对于 B,设 $\triangle ABC$ 的中心为 O,$\triangle A_1B_1C_1$ 的中心为 O_1,可知 OAA_1O_1 是直角梯形,$OA=2\sqrt{3}$,$O_1A_1=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,$OO_1=\sqrt{2^2-\left(2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,故 B 正确;

对于 C,分别延长棱 AA_1,BB_1,CC_1 交于点 P,易知 $\triangle PBC$ 为等边三角形,四面体 $PABC$ 为正四面体,M 恰好为 $\triangle PBC$ 的中心,所以 $AM\perp$ 平面 BCC_1B_1,故 C 正确;

对于 D,二面角 A_1-AB-C 即正四面体相邻侧面的夹角,由正四面体的性质可知其余弦值为 $\frac{1}{3}$,故 D 正确.

11. **答案** ACD

命题意图 本题考查条件概率、全概率公式.

解析 记甲负责工序 A 为事件 M_1,甲负责工序 B 为事件 M_2,甲负责工序 C 为事件 M_3,该项目达标为事件 N.

对于 A,该项目达标的概率为 $P(N)=P(M_1)P(N|M_1)+P(M_2)P(N|M_2)+P(M_3)P(N|M_3)=0.5\times0.6+0.3\times0.8+0.2\times0.7=0.68$,故 A 正确;

对于 B,$P(N|(M_1+M_2))=\frac{P(M_1)P(N|M_1)+P(M_2)P(N|M_2)}{P(M_1)+P(M_2)}=\frac{0.5\times0.6+0.3\times0.8}{0.5+0.3}=\frac{27}{40}$,故 B 错误;

对于 C,$P(M_1|N)=\frac{P(M_1)P(N|M_1)}{P(N)}=\frac{0.5\times0.6}{0.68}=\frac{15}{34}$,故 C 正确;

对于 D,$P(M_1|\overline{N})=\dfrac{P(M_1)P(\overline{N}|M_1)}{P(\overline{N})}=\dfrac{0.5\times(1-0.6)}{1-0.68}=\dfrac{5}{8}$,故 D 正确.

12. **答案** BCD

命题意图 本题考查抛物线的方程、抛物线的性质、直线与抛物线的综合性问题.

解析 由题可得抛物线 $C:y^2=2x$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

对于 A,直线 $l':y=k\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$过 C 的焦点,则以 MN 为直径的圆与 l 相切,故 A 错误;

对于 B,直线 $l':y=kx-2k$,将 $x=\dfrac{y^2}{2}$代入,得 $ky^2-2y-4k=0$,则 $y_1y_2=-4$,故$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{y_1^2y_2^2}{4}+y_1y_2=0$,故 B 正确;

对于 C,抛物线 C 在点 M 处的切线方程为 $y_1y=x_1+x$,抛物线 C 在点 N 处的切线方程为 $y_2y=x_2+x$,联立两式,解得 $y_A=\dfrac{y_1+y_2}{2}=y_P$,故 $AP\perp l$,故 C 正确;

对于 D,由抛物线的对称性进行临界分析,可知当 $MN\perp x$ 轴时,点 P 到直线 l 的距离最小,此时 $x_M=x_N=\dfrac{1}{8}$,点 P 到直线 l 的距离为$\dfrac{5}{8}$,故 D 正确.

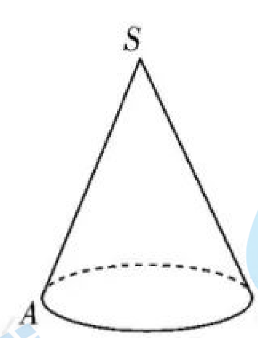
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\dfrac{2\pi}{3}$

命题意图 本题考查空间几何体的结构特征.

解析 设圆锥(如图所示)的高为 h. 因为$\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot h=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$,所以 $h=2\sqrt{2}$,母线 $SA=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$.

将圆锥沿 SA 展开所得扇形的弧长为 2π,则扇形的圆心角为$\dfrac{2\pi}{3}$.



14. **答案** -6

命题意图 本题考查数列的周期性、分组求和.

解析 依题意 $a_n\neq-1$,故 $a_{n+1}=-\dfrac{1}{a_n+1}$,所以 $a_2=-\dfrac{1}{2}$,$a_3=-2$,$a_4=1$,$\cdots$,故$\{a_n\}$的前 12 项和为 $\left(1-\dfrac{1}{2}-2\right)\times4=-6$.

15. **答案** 2

命题意图 本题考查基本不等式及其应用.

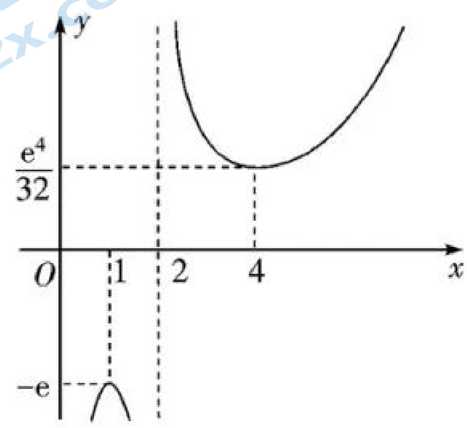
解析 依题意得 $m^2+n^2-(m+n)+mn=1$,则 $1=(m+n)^2-(m+n)-mn\geqslant(m+n)^2-(m+n)-\dfrac{1}{4}(m+n)^2=$

$\frac{3}{4}(m+n)^2-(m+n)$，当且仅当 $m=n$ 时等号成立，则 $3(m+n)^2-4(m+n)-4\leqslant0$，解得 $0<m+n\leqslant2$，则 $m+n$ 的最大值为 2.

16. **答案** $\left(-\mathrm{e},\frac{\mathrm{e}^4}{32}\right)$

命题意图 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 令 $f(x)=0$，显然 $x\neq2$，则 $\lambda=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2(x-2)}$，令 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2(x-2)}$，$x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)(x-4)\mathrm{e}^x}{x^3(x-2)^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x_1=4$，$x_2=1$，易知函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 和 $(2,4)$ 上单调递减，且极大值为 $g(1)=-\mathrm{e}$，极小值为 $g(4)=\frac{\mathrm{e}^4}{32}$. 由图象可知，当 $-\mathrm{e}<\lambda<\frac{\mathrm{e}^4}{32}$ 时，直线 $y=\lambda$ 与曲线 $y=g(x)$ 没有交点，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点.



四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正余弦定理及其应用、三角恒等变换.

解析 （Ⅰ）由正弦定理及条件可得 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-4\cos C=0$，…………（1 分）

由余弦定理可得 $\frac{b^2+a^2}{ab}-4\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$，…………（3 分）

化简得 $a^2+b^2=2c^2$. …………（4 分）

（Ⅱ）由 $\cos B=\frac{\sin^2B}{\sin A\sin C}$ 得 $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2}{ac}$，

化简得 $a^2+c^2=3b^2$，…………（6 分）

又 $a^2+b^2=2c^2$，故 $b=\frac{\sqrt3}{2}c$，…………（7 分）

所以 $a=\frac{\sqrt5}{2}c$，…………（8 分）

故 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt3}{6}$. …………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查空间面面的位置关系，向量法求空间角.

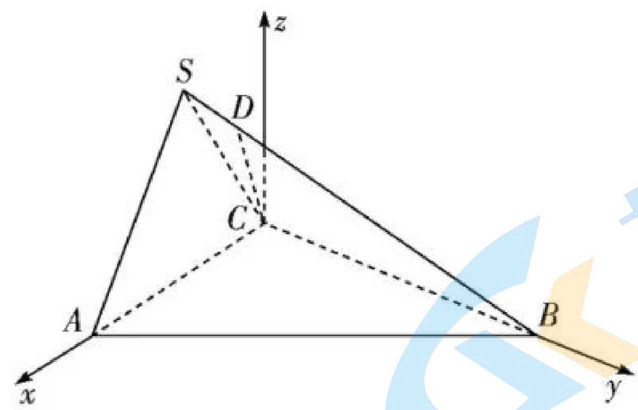
解析 （Ⅰ）因为 $AC^2+BC^2=16=AB^2$，所以 $BC\perp AC$，…………（1 分）

同理可得 $BC^2+SC^2=SB^2$，故 $BC\perp SC$，…………（2 分）

因为 $SC\cap AC=C$，所以 $BC\perp$ 平面 SAC，…………（4 分）

因为 $BC \subset$ 平面 ABC，故平面 $SAC \perp$ 平面 ABC. ······ (5 分)

(Ⅱ) 以 C 为坐标原点，CA，CB 所在直线分别为 x 轴、y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $C(0,0,0)$，$A(2\sqrt{2},0,0)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$，$S(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$D\left(\frac{4\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$，······ (6 分)

所以 $\overrightarrow{SA}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BS}=(\sqrt{2},-2\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{4\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$. ······ (7 分)

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 SAB 的法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BS}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-z=0,\\ x-2y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. ······ (9 分)

设直线 CD 与平面 SAB 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{6\sqrt{2}}{5}\times\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$，

所以直线 CD 与平面 SAB 所成角的正弦值为 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. ······ (12 分)

19. **命题意图** 本题考查等差数列的定义、通项公式、裂项相消法求和.

解析 (Ⅰ) 由 $a_{n+1}=2a_n+3\cdot 2^n$，可得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{2}$，······ (2 分)

故数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 1 为首项，$\frac{3}{2}$ 为公差的等差数列，······ (3 分)

故 $\frac{a_n}{2^n}=1+(n-1)\cdot\frac{3}{2}=\frac{3n-1}{2}$，······ (5 分)

则 $a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-1}$. ······ (6 分)

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 可知 $b_n=\dfrac{(3n-1)\cdot 2^n\cdot(1-n)}{(3n-1)(n^2+n)}=\dfrac{(1-n)\cdot 2^n}{n(n+1)}=\dfrac{2^n}{n}-\dfrac{2^{n+1}}{n+1}$，······ (9 分)

故 $T_n=\frac{2^1}{1}-\frac{2^2}{2}+\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}-\frac{2^{n+1}}{n+1}=2-\frac{2^{n+1}}{n+1}$. ······ (12 分)

20. **命题意图** 本题考查二项分布、相互独立事件的概率、互斥事件的概率.

解析 (Ⅰ) 依题意，$X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，······ (1 分)

则 $P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$，$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{81}$，

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$，$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$，

$P(X=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$, ……………………………………………………………… (4 分)

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

…………………………………………………………………………………………………… (5 分)

故 $E(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$. ……………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)方法一：设 A = "停止试验时试验总次数不大于 n"，

则 $\sum_{i=2}^{n}P(Y=i)=P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)+\cdots+P(Y=n)=P(A)$,

$\overline{A}$ = "n 次试验中，成功了 0 次或 1 次"，……………………………………………… (7 分)

"n 次试验中，成功了 0 次"的概率 $P_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$; ……………………………… (8 分)

"n 次试验中，成功了 1 次"的概率 $P_2=C_n^1\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2^n}$. ……………… (10 分)

所以 $\sum_{i=2}^{n}P(Y=i)=1-P_1-P_2=\frac{2^n-n-1}{2^n}$. ……………………………………… (12 分)

方法二：事件"$Y=n$"表示前 $n-1$ 次试验只成功了 1 次，且第 n 次试验成功，

故 $P(Y=n)=C_{n-1}^1\times\frac{1}{2^n}=\frac{n-1}{2^n}$, ……………………………………………… (8 分)

所以 $\sum_{i=2}^{n}P(Y=i)=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}$,

利用错位相减法可得该式的结果为$\frac{2^n-n-1}{2^n}$. …………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)依题意，$f'(x)=e^{x-1}-1$, ……………………………………………………… (1 分)

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$,

所以当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$,

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，……………………………… (3 分)

而 $f(1)=0$，故 $f(x)$ 的极小值为 0，无极大值. ………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知，当 $x>0$ 时，$e^{x-1}\geqslant x$，则 $x-1\geqslant\ln x$. ……………………………… (5 分)

令 $h(x)=(x-1)e^{x-a}-\ln x+1-a(x>0)$,

则 $h'(x)=xe^{x-a}-\frac{1}{x}$，易知 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… (6 分)

因为 $a\in(0,1]$，所以 $h'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}-a}-2<0$，$h'(1)=e^{1-a}-1\geqslant0$,

故 $\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $x_0e^{x_0-a}=\frac{1}{x_0}$①. ………………………… (8 分)

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

故$[h(x)]_{\min}=h(x_0)=(x_0-1)e^{x_0-a}-\ln x_0+1-a$②. ……………………………………………… (9分)

由①可得$e^{x_0-a}=\frac{1}{x_0^2}$,$x_0-a=-2\ln x_0$, ……………………………………………… (10分)

代入②,得$h(x_0)=\frac{x_0-1}{x_0^2}-3\ln x_0-x_0+1\geqslant\frac{x_0-1}{x_0^2}-3(x_0-1)-x_0+1=\frac{(1-x_0)(2x_0-1)(2x_0+1)}{x_0^2}$,

……………………………………………………………………………………………………… (11分)

而$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,故$h(x_0)\geqslant 0$,故$h(x)\geqslant 0$,

即原命题得证. ……………………………………………………………………………… (12分)

22. **命题意图** 本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题.

解析 (Ⅰ)设椭圆的半焦距为$c(c>0)$.依题意,离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$a=2b$,$c=\sqrt{3}b$①.

……………………………………………………………………………………………………… (1分)

直线$l:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,即$bx+ay-ab=0$,由题可知$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$②. ……………………………… (3分)

联立①②,解得$a=2$,$b=1$,故C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………… (4分)

(Ⅱ)(ⅰ)设过点A且与圆O相切的直线的方程为$y-y_0=k(x-x_0)(k\neq 0)$,

则$\frac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,整理得$(5x_0^2-4)k^2-10x_0y_0k+5y_0^2-4=0$, …………………………… (5分)

记直线AM,AN的斜率分别为k_1,k_2,则$k_1k_2=\frac{5y_0^2-4}{5x_0^2-4}=\frac{5\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)-4}{5x_0^2-4}=-\frac{1}{4}$,为定值. ………… (7分)

(ⅱ)由(ⅰ)的过程可知直线$AM:y-y_0=k_1(x-x_0)$,联立方程得$\begin{cases}y-y_0=k_1(x-x_0),\\x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$

则有$(1+4k_1^2)x^2+8k_1(y_0-k_1x_0)x+4(y_0-k_1x_0)^2-4=0$,

故$x_1+x_0=\frac{8k_1(k_1x_0-y_0)}{1+4k_1^2}$. ……………………………………………………………… (8分)

直线$AN:y-y_0=k_2(x-x_0)$,同理可得$x_2+x_0=\frac{8k_2(k_2x_0-y_0)}{1+4k_2^2}$. …………………………………… (9分)

$$\begin{aligned}故\ x_1+x_0+x_2+x_0&=\frac{8k_1(k_1x_0-y_0)}{1+4k_1^2}+\frac{8k_2(k_2x_0-y_0)}{1+4k_2^2}\\&=\frac{8k_1(k_1x_0-y_0)}{1+4k_1^2}+\frac{8\left(-\frac{1}{4k_1}\right)\left(-\frac{1}{4k_1}x_0-y_0\right)}{1+4\left(-\frac{1}{4k_1}\right)^2}\\&=\frac{8k_1^2x_0-8k_1y_0}{1+4k_1^2}+\frac{2x_0+8k_1y_0}{1+4k_1^2}\\&=\frac{2x_0+8k_1^2x_0}{1+4k_1^2}=2x_0,\end{aligned}$$

则$x_1+x_2=0$. ……………………………………………………………………………… (12分)