牛栏山一中 2023—2024 学年第一学期期中考试

高 二 数 学　　2023.11

第 I 卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，四个选项中只有一个符合题目）

1．若直线 $x+y-3=0$ 与 $2x+ay-1=0$ 垂直，则 $a=$（　　）

A．-2　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

2. 椭圆的两个焦点是（-4,0）和（4,0），椭圆上的点 M 到两个焦点的距离之和等于 10，则椭圆的标准方程是（　）

A．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$　　B．$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$　　C．$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　　D．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

3．若 $x^2+y^2+4x-2y-m=0$ 表示圆的方程，则 m 的取值范围是（　　）

A．$(5,+\infty)$　　B．$(-\infty,5)$　　C．$(-\infty,-5)$　　D．$(-5,+\infty)$

4．若双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{m}=1$ 的焦距长为 8，则该双曲线的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}x$　　B．$y=\pm\frac{5}{4}x$　　C．$y=\pm\frac{4}{3}x$　　D．$y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$

5．已知抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上横坐标为 3 的点 M 到焦点 F 的距离为 6，则 $p=$（　　）

A．2　　B．3　　C．6　　D．8

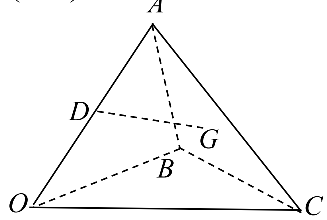
6．已知平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,1)$，若平面 α 外的直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(-1,0,3)$，则可以推断（　　）

A. $l//\alpha$　　B．$l\perp\alpha$　　C．l 与 α 斜交　　D．$l\subset\alpha$

7．已知点 M 的坐标为$(a，b)$，圆 M 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C、D 两点，则“$|AB|=|CD|$”是“$a=b$”的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

8．已知三棱锥 $O-ABC$，点 D 是 OA 的中点，点 G 是△ABC 的重心（三角形三条中线的交点叫三角形的重心）.设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，则向量 $\overrightarrow{DG}$ 用基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 可表示为（　　）



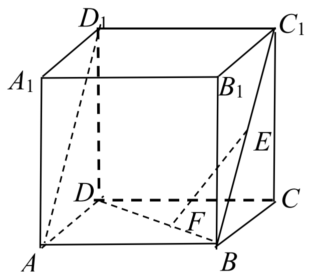
A. $-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　B. $-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$

C. $\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$

9．设点 P 为函数 $y=\sqrt{3}|x|$ 图象上的动点，Q 是圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=3$（其中 $ab=0$）上的动点，若 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，则以所有满足条件的点 C 为顶点的多边形的面积为（　　）

A．$24\sqrt{3}$　　　B．$16\sqrt{3}$　　　C．$8\sqrt{3}$　　　D．$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是线段 BC_1 的**中点**，点 F 是线段 BD 上的**动点**，下列结论中**错误**的是（　　）



A.对于任意的点 F，均有 $EF\perp A_1C$

B.存在点 F，使得 EF//平面 AA_1B_1B

C.存在点 F，使得 EF 与 CC_1 所成角是 60°

D.不存在点 F，使得 EF 与平面 ABC_1D_1 的所成角是 30°

第 II 卷

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．请把结果填在答题纸上的相应位置．）

11．直线 $y=1$ 的倾斜角为________.

12．平面直角坐标系中，已知直线 l 过点(0,4)，与两坐标轴围成的三角形的面积为 4，则直线 l 的方程为___________.

13．已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，则 F 到 l 的距离是______；若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线经过焦点 F 在第一象限与抛物线交于点 M，过 M 作 MN 垂直于 l 于点 N，则△MNF 的面积为________.

14．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 有共同的焦点 F_1,F_2，设两曲线的其中一个交点为 P，且 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{8}$，则双曲线的离心率为_______.

15．关于曲线 $W_1:x^2+y^2=m^2$，$W_2:x^4+y^2=m^2$（$m>0$）.

①曲线 W_2 关于 x 轴、y 轴和原点对称；

②当 $m=1$ 时，两曲线共有四个交点；

③当 $0<m<1$ 时，曲线 W_1 围成的区域面积大于曲线 W_2 所围成的区域面积；

④当 $m=\sqrt{2}$ 时，曲线 W_2 围成的平面区域内（含边界）两点之间的距离的最大值是 3.

上述结论中所有正确命题的序号是__________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明过程或演算步骤．）

16．(本小题满分 13 分)

平面直角坐标系中，已知圆的圆心是 $C\left(0,1\right)$，且经过点 $M(\sqrt{3},0)$，直线 l 的方程为 $x+y+m=0$.

（I）求圆 C 的标准方程；

（II）若 l 与圆 C 相切，求 m 的值；

（III）若直线 l 被圆截得的弦长 $\left|MN\right|=2\sqrt{3}$，求 m 的值.

17.（本小题满分 14 分）

已知抛物线的顶点在原点，对称轴是 x 轴，且经过点 P（1,2）.

（I）求抛物线的标准方程、焦点坐标；

（II）经过焦点 F 且斜率是 1 的直线 l，与抛物线交于 A、B 两点，求$|AB|$以及$\triangle OAB$ 的面积.

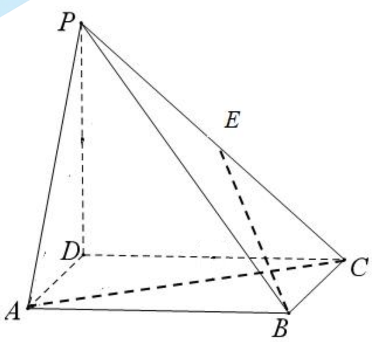
18.（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PD=2$，点 E 是 PC 的中点.

（I）求证：$BC//$平面 PAD；

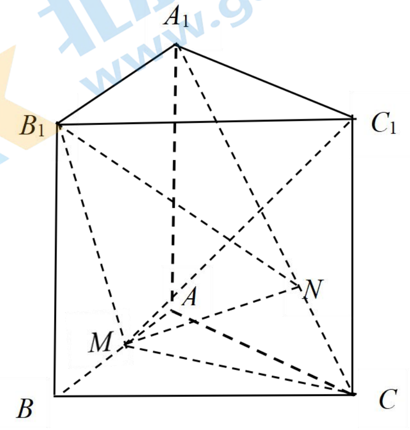
（II）求直线 AC 与 EB 所成角的余弦值；

（III）求直线 EB 与平面 PAD 所成角的正弦值.



19. (本小题满分 16 分)

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=\sqrt{5}$，$AB=2$，$AA_1=3$，M 为棱 AB 的中点，点 N 是 A_1C 上靠近 C 的三等分点.



（I）求证：$AB\perp$平面 MCC_1；

（II）求二面角 N-B_1M-A 的余弦值；

（III）棱 AC 上是否存在点 P，使得点 P 在平面 B_1MN 内？若存在，求 $\dfrac{AP}{AC}$ 的值；若不存在，说明理由.

20.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{2}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过右焦点且与 x 轴不垂直的直线 l 与椭圆相交于 A，B 两点，点 M 的坐标为(2,1)，记直线 MA，MB 的斜率分别为 k_1，k_2.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）当 $|AB|=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ 时，求直线 l 的方程；

（III）求证：k_1+k_2 为定值.

21.（本小题满分 13 分）

对于空间向量 $\vec{m}=(a,b,c)$，定义 $\|\vec{m}\|=\max\{|a|,|b|,|c|\}$，其中 $\max\{x,y,z\}$ 表示 x,y,z 这三个数的最大值。

（I）已知 $\vec{a}=(3,-4,2)$，$\vec{b}=(x,-x,2x)$.

①直接写出 $\|\vec{a}\|$ 和 $\|\vec{b}\|$ (用含 x 的式子表示)；

②当 $0\le x\le 4$，写出 $\|\vec{a}-\vec{b}\|$ 的最小值及此时 x 的值；

（II）设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，求证：$\|\vec{a}+\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$ ；

（III）在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,2)$，点 Q 是 $\triangle ABC$ 内部的动点，直接写出 $\|\overrightarrow{OQ}\|$ 的最小值（无需解答过程）.

高二数学参考答案

一、选择题：1.A；2.C; 3.D; 4.D;　5.C;　6.C；7. B;　8. B;　9. A; 10.D .

二、填空题:

11.0(或 0°);12. $y=\pm 2x+4$；13.4（3 分）；$16\sqrt{3}$　（2 分）　14. $\frac{4}{3}$　15.①②④（2,4,5 给分）

三、解答题

16. （本题 13 分）解：（I）由题意知，r=|CA|=2　---------------------------------2 分

所以圆 C 的方程为 $x^2+(y-1)^2=4$．---------------------------4 分

（Ⅱ）圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|0+1+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|m+1|}{\sqrt{2}}=2$　---------------------------------2 分

解得 $m=2\sqrt{2}-1$ 或 $-2\sqrt{2}-1$　---------------------------------4 分

（Ⅲ）设圆心 C 到直线 l 的距离为 d'，有 $(d')^2+\left(\frac{|MN|}{2}\right)^2=4$　----------------------------1 分

因为 $|MN|=2\sqrt{3}$，所以 $d'=1$　----------------------------3 分

即有 $d'=\frac{|0+1+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|m+1|}{\sqrt{2}}=1$　解得 $m=-1+\sqrt{2}$ 或 $-1-\sqrt{2}$　--------------------------5 分

17.（本题 14 分）解：（I）由题设方程为 $y^2=-2px$，　-------------------------1 分

将 P（1,2）代入，解得 $p=2$　--------------------2 分

所以抛物线的标准方程为 $y^2=4x$.　------------------------3 分

焦点坐标为（1,0）.　----------------------------5 分

（II）因为直线 $k=1$，过点 F（-1，0），所以直线 l 的方程为 $y=x-1$，　---------------2 分

法一：$\begin{cases} y=x-1 \\ y^2=4x \end{cases}$，　消 y 得 $x^2-6x+1=0$　----------------------3 分

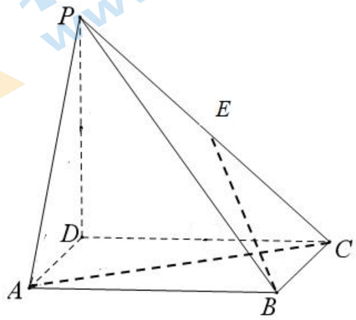
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$．　-----------------------5 分

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8$　（或 $|AB|=x_1+x_2+p=6+2=8$）　-----------------------7 分

$h=d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$　--8 分

所以 $S=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ --9 分

18.（本题 14 分）解：（I）证明：因为 $ABCD$ 为正方形，所 BF//AD， --------------2 分



因为 BC $\not\subset$ 平面 PCB，AD $\subset$ 平面 PAD ---------------------3 分

所以 BC//平面 PAD ------------------------4 分

（II）因为 $PD\perp$ 平面$ABCD$，所以 $PD\perp AD$，$PD\perp DC$

又因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AD\perp DC$，

如图，以 DA、DC、DP 分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系-------1 分

则 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{EB}=(2,1,-1)$， ----------------------2 分

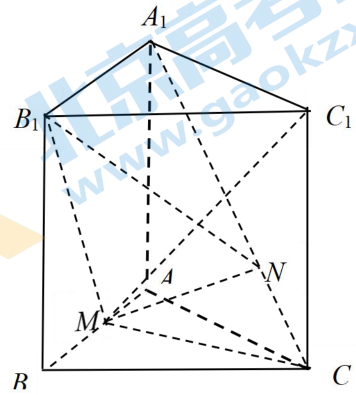
所以 $\cos<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EB}>=\frac{\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{EB}|}=\frac{-2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$， ----------------------------4 分

所以线线所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$. ---------------------------------5 分

（III）平面 PAD 的法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$ -------------------------2 分

$\overrightarrow{EB}=(2,1,-1)$，设直线 EB 与平面 PAD 所成角为θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{EB},\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{EB}\bullet\vec{n}|}{|\overrightarrow{EB}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ ------5 分

19.(本小题满分 16 分)



解：（I）证明：连接 AC_1, BC_1，

由于 $AM=MB$，$AC=BC$，所以 $AB\perp CM$ ----------------------2 分

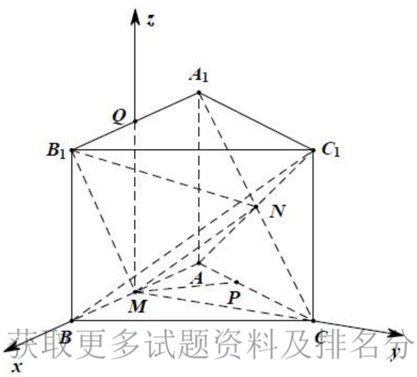
在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$CC_1\perp$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp AB$， ------------------3 分

又 $CM\cap CC_1=C$,所以 $AB\perp$ 平面 CC_1M --------------------------4 分

（II）如图，取 A_1B_1，中点 Q，由于 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$MQ//AA_1$，因此 $MQ\perp$ 平面 ABC，又因为 $AC=BC$，

所以 $MB\perp MC$，故 MB，MC，MQ 两两垂直，以 M 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MQ}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $M-xyz$ ----------------------1 分



则 $A_1(-1,0,3), C(0,2,0), B_1(1,0,3), M(0,0,0), N\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},1\right)$.

$\overrightarrow{A_1C}=(1,2,-3)$，$\overrightarrow{MB_1}=(1,0,3)$，$\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},1\right)$ -------2 分

设平面 B_1MN 的法向量为 $n_1=(x,y,z)$，

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MB_1}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MN}=0\end{cases}，即\begin{cases}x+3z=0\\ -\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}y+z=0\end{cases}，取\begin{cases}x=3\\ y=\frac{3}{2}\\ z=-1\end{cases}，则\overrightarrow{n_1}=\left(3,\frac{3}{2},-1\right)$$ ----------------------4 分

平面 B_1MA 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$ ----------------------5 分

设所求二面角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}\right|=\left|\frac{(3,\frac{3}{2},-1)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{3^2+(\frac{3}{2})^2+(-1)^2}}\right|=\frac{3}{7}$ ------------------8 分

（III）设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(1,2,0)=(\lambda,2\lambda,0)(0\le\lambda\le1)$， -----------------------------1 分

则 $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=(-1,0,0)+\lambda(1,2,0)=(\lambda-1,2\lambda,0)$ ---------------------------------2 分

因为平面 B_1MN 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(3,\frac{3}{2},-1)$，若点 P 在平面 B_1MN 内，则 $\overrightarrow{MP}$ 垂直于 $\overrightarrow{n_2}$ --------------3 分

所以 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{n_2}=(\lambda-1,2\lambda,0)\cdot(3,\frac{3}{2},-1)=6\lambda-3=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}\in[0,1]$，

所以棱 AC 上是否存在点 P，使得点 P 在平面 B_1MN 内，此时 $\frac{AP}{AC}=\frac{1}{2}$ --------------------------------4 分

20.（本小题满分 15 分）

（Ⅰ）解：依题意 $2a=2\sqrt{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$. ······················1 分

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c=1$. ·····················2 分

所以 $b^2=1$， ·····················3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ·····················4 分

（Ⅱ）解：椭圆得右焦点 $F(1,0)$.

由已知可知，直线 l 的斜率存在，设直线 l：$y=k(x-1)$， ··················1 分

联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$， 消 y 得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$，$\Delta>0$ 成立. …………3 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$. ……………4 分

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ ……………………5 分

$\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\dfrac{4k^2}{1+2k^2})^2-4\cdot\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$，所以 $\dfrac{2(1+k^2)}{1+2k^2}=\dfrac{5}{4}$，所以 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ……………6 分

（III）证明：由上问可知 $y=k(x-1)$， $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

$k_1+k_2=\dfrac{1-y_1}{2-x_1}+\dfrac{1-y_2}{2-x_2}=\dfrac{(1-y_1)(2-x_2)+(1-y_2)(2-x_1)}{4-2(x_1+x_2)+x_1x_2}$. ……………………1 分

分子化为 $4-(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)+x_2y_1+x_1y_2=2kx_1x_2-(1+3k)(x_1+x_2)+4k+4$. --------3 分

$$所以\ k_1+k_2=\frac{2k\times\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}-(1+3k)\times\dfrac{4k^2}{1+2k^2}+4k+4}{4-2\times\dfrac{4k^2}{1+2k^2}+\dfrac{2(k^2-1)}{1+2k^2}}$$

$$=\frac{2k\times2(k^2-1)-4k^2(1+3k)+4(k+1)(1+2k^2)}{4(1+2k^2)-8k^2+2(k^2-1)}=\frac{4k^2+4}{2k^2+2}=2$$

综上所述，k_1+k_2 为定值 2 . ……………………5 分

21．(本小题满分 13 分)

解：（I）① $\|a\|=4$，----------------------------1 分 $\|b\|=|2x|$；----------------------------3 分

② $\|a-b\|=\begin{cases}-x+4,0\le x\le 4\\ 2x-2,2<x\le 4\end{cases}$，$\|a-b\|_{\min}=2$，此时 $x=2$ ----------------------------6 分

（II）$\|a+b\|=\max\{|x_1+x_2|,|y_1+y_2|,|z_1+z_2|\}$

$\leqslant\max\{|x_1|+|x_2|,|y_1|+|y_2|,|z_1|+|z_2|\}$----------------------------2 分

因为 $\|a\|=\max\{|x_1|,|y_1|,|z_1|\}$，$\|b\|=\max\{|x_2|,|y_2|,|z_2|\}$，

所以 $|x_1|,|y_1|,|z_1|\leqslant\|a\|$，$|x_2|,|y_2|,|z_2|\leqslant\|b\|$ ----------------------------3 分

所以$\|a+b\| \leqslant \max\{\|a\|+\|b\|,\|a\|+\|b\|,\|a\|+\|b\|\}=\|a\|+\|b\|$ ----------------------------4 分

（III）$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|_{\min}=\frac{2}{3}$ ----------------------------3 分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！