2019 北京市第八中学高二（下）期末

数　　学

2019.7

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。

一、选择题：

本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1. 复数 $\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数是（　　）

（A）$1+\mathrm{i}$　　（B）$1-\mathrm{i}$　　（C）$-1+\mathrm{i}$　　（D）$-1-\mathrm{i}$

2. 已知 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=$（　　）

（A）$\cos x$　　（B）$-\cos x$　　（C）$\sin x$　　（D）$-\sin x$

3. 用 0，1，2，3，4，5 这 6 个数字，可以组成没有重复数字的四位数的个数是(　　)

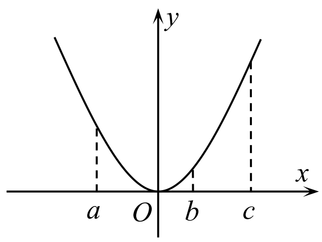
（A）360　　（B）300　　（C）240　　（D）180

4. 曲线 $y=x^3+x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为（　　）

（A）$y=-2x$　　（B）$y=-x$　　（C）$y=2x$　　（D）$y=x$

5. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有导函数，$f(x)$ 图象如图所示，

则下列不等式正确的是（　　）



（A）$f'(a)<f'(b)<f'(c)$　　（B）$f'(b)<f'(c)<f'(a)$

（C）$f'(a)<f'(c)<f'(b)$　　（D）$f'(c)<f'(a)<f'(b)$

6. 某班级要从 4 名男生、2 名女生中选派 4 人参加某次社区服务，要求必须有女生，那么不同的选派方案种数为（　　）

（A）14　　（B）24　　（C）28　　（D）48

	甲	乙	丙	丁
甲	:	0.3	0.3	0.8
乙	0.7	:	0.6	0.4
丙	0.7	0.4	:	0.5

7. 甲、乙、丙、丁 4 个人进行网球比赛，首先甲、乙一组，丙、丁一组进行比赛，两组的胜者进入决赛，决赛的胜者为冠军、败者为亚军．4 个人相互比赛的胜率如右表所示，表中的数字表示所在行选手击败其所在列选手的概率．

丁	0.2	0.6	0.5	:

那么**甲得冠军且丙得亚军**的概率是（　　）

（A）0.15　　（B）0.105　　（C）0.045　　（D）0.21

8. 设 $0<p<1$，随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{p}{3}$	$\frac{3-2p}{3}$	$\frac{p}{3}$

那么，当 p 在 $(0,1)$ 内增大时，$D(\xi)$ 的变化是（　　）

（A）减小　　（B）增大

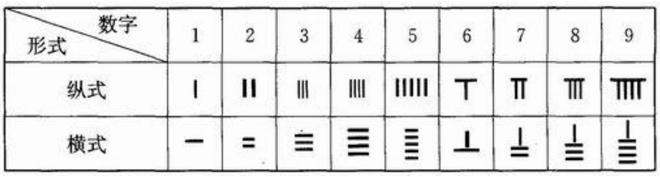
（C）先减小后增大　　（D）先增大后减小

9. 已知函数 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=\ln x$，下列说法中正确的是（　　）

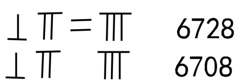
（A）$f(x),g(x)$ 在点 $(1,0)$ 处有相同的切线　　（B）对于任意 $x>0$ $f(x)\geq g(x)$ 恒成立

（C）$f(x),g(x)$ 的图象有且只有一个交点　　（D）$f(x),g(x)$ 的图象有且只有两个交点

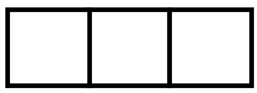
10. 算筹是在珠算发明以前我国独创并且有效的计算工具，为我国古代数学的发展做出了很大贡献. 在算筹计数法中，以“纵式”和“横式”两种方式来表示数字，如下图：



表示多位数时，个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，以此类推，遇零则置空，如下图：



如果把 5 根算筹**以适当的方式全部**放入右面的表格中，那么**可以表示的三位数的个数为**（　　）



（A）46　　（B）44　　（C）42　　（D）40

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 已知函数 $y=\dfrac{e^x}{x}$，则 $f'(1)=$_______.

12. 二项式 $(2x^2-\dfrac{1}{x})^6$ 的展开式中的常数项是_______.（用数字作答）

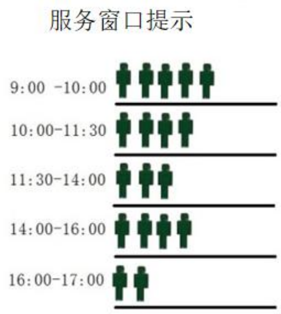
13. 若复数 z 满足 $i\cdot z=1+2i$，则 $|z|=$_________.

14. 能说明“若 $f'(0)=0$，则 $x=0$ 是函数 $y=f(x)$ 极值点”为假命题的一个函数是

______________.

15. 北京市某银行营业点在银行大厅悬挂着不同营业时间段服务窗口个数的提示牌，如图所示.

设某人到达银行的时间是随机的，记其到达银行时服务窗口的个数为 X，则 $E(X)=$______________.



16. 容器中有 A,B,C 3 种粒子，若相同种类的两颗粒子发生碰撞，则变成一颗 B 粒子；不同种类的两颗粒子发生碰撞，会变成另外一种粒子．例如，一颗 A 粒子和一颗 B 粒子发生碰撞则变成一颗 C 粒子.

现有 A 粒子 10 颗，B 粒子 8 颗，C 粒子 9 颗，如果经过各种两两碰撞后，只剩 1 颗粒子．给出下列结论：

① 最后一颗粒子可能是 A 粒子

② 最后一颗粒子一定是 C 粒子

③ 最后一颗粒子一定不是 B 粒子

④ 以上都不正确

其中正确结论的序号是________.（写出所有正确结论的序号）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+bx$，且 $f'(2)=-3$.

（Ⅰ）求 b；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间.

18.（本小题满分 13 分）

某工厂生产一种汽车的元件，该元件是经过 A 、B 、C 三道工序加工而成的，A 、B 、C 三道工序加工的元件合格率分别为 $\frac{1}{2}$ 、$\frac{2}{3}$ 、$\frac{3}{4}$ ．已知每道工序的加工都相互独立，三道工序加工都合格的元件为一等品；恰有两道工序加工合格的元件为二等品；其它的为废品，不进入市场．

（Ⅰ）生产一个元件，求该元件为二等品的概率；

（Ⅱ）若从该工厂生产的这种元件中任意取出 3 个元件进行检测，求至少有 2 个元件是一等品的概率．

19．（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=(x+a)e^x$ ．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上**的最小值.**

20．（本小题满分 13 分）

某校在学年期末举行“我最喜欢的文化课”评选活动，投票规则是一人一票，高一（1）班 44 名学生和高一（7）班 45 名学生的投票结果如下表（无废票）：

	语文	数学	外语	物理	化学	生物	政治	历史	地理
高一（1）班	6	9	7	5	4	5	3	3	2
高一（7）班	a	6	b	4	5	6	5	2	3

该校把上表的数据作为样本，把两个班同一学科的得票之和定义为该年级该学科的“好感指数”．

（Ⅰ）如果数学学科的“好感指数”比高一年级其他文化课都高，求 a 的所有取值；

（Ⅱ）从高一（1）班投票给政治、历史、地理的学生中任意选取 3 位同学，设随机变量 X 为投票给地理学科的人数，求 X 的分布列和期望；

（Ⅲ）当 a 为何值时，高一年级的语文、数学、外语三科的“好感指数”的方差最小？（结论不要求证明）

21．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=e^x-a\ln x-x$ ．

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在极值点，求 a 的取值范围．

22.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+a(x-1)$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若在区间 $(1,+\infty)$ 上 $f(x)<0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）判断函数 $f(x)$ 的零点个数.（直接写出结论）

2019 北京市第八中学高二（下）期末

数学参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. B　2. D　3. B　4. D　5. A　6. A　7. C　8. B　9. D　10. B

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. 0　　12. 60

13. $\sqrt{5}$　　14. $f(x)=x^3$ 或 $f(x)=1$ 等，答案不唯一

15. 3.5625　　16. ①③

注：16 题选对一个正确结论得 3 分，错选不得分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

17. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由已知 $f'(x)=x^2-2x+b$，　　　　……………………3 分

所以 $f'(2)=4-4+b=-3$，

所以 $b=-3$.　　　　……………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f'(x)=x^2-2x-3$，

解 $f'(x)>0$，得 $x<-1$ 或 $x>3$，

解 $f'(x)<0$，得 $-1<x<3$.　　　　……………………9 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,3)$.

……………………13 分

18. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）不妨设元件经 A,B,C 三道工序加工合格的事件分别为 A,B,C.

所以 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，$P(C)=\frac{3}{4}$. $P(\bar{A})=\frac{1}{2}$，$P(\bar{B})=\frac{1}{3}$，$P(\bar{C})=\frac{1}{4}$.　　…………2 分

设事件 D 为“生产一个元件，该元件为二等品”.

由已知 A,B,C 是相互独立事件.

根据事件的独立性、互斥事件的概率运算公式，

$P(D)=P(\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C})=P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})$ ………………6 分

$=(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{3}{4})$

$=\frac{11}{24}$.

所以生产一个元件，该元件为二等品的概率为 $\frac{11}{24}$. ……………………8 分

（Ⅱ）生产一个元件，该元件为一等品的概率为

$p=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. ……………………9 分

设事件 E 为“任意取出 3 个元件进行检测，至少有 2 个元件是一等品”，则

$P(E)=C_3^2(\frac{1}{4})^2\times\frac{3}{4}+(\frac{1}{4})^3$ ……………………12 分

$=\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$.

所以至少有 2 个元件是一等品的概率为 $\frac{5}{32}$. ……………………13 分

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$. ……………………2 分

由 $f'(x)>0$，解得 $x>-a-1$；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<-a-1$.

所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,-a-1)$，单调增区间为 $(-a-1,+\infty)$. ………4 分

（Ⅱ）① 当 $-a-1\geq 4$，即 $a\leq -5$ 时，

$f(x)$ 在 $[0,4]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(4)=(a+4)e^4$. ……………………7 分

② 当 $-a-1\leq 0$，即 $a\geq -1$ 时，

$f(x)$ 在 $[0,4]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=a$. ……………………10 分

③ 当 $-5<a<-1$ 时，

x	$(0,-a-1)$	$-a-1$	$(-a-1,4)$

$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)_{\min}=f(-a-1)=-e^{-a-1}=-\dfrac{1}{e^{a+1}}$.　　　　…………………………13 分

综上，当 $a\le -5$ 时， $f(x)_{\min}=(a+4)e^{4}$；当 $a\ge -1$ 时， $f(x)_{\min}=a$；当 $-5<a<-1$ 时， $f(x)_{\min}=-\dfrac{1}{e^{a+1}}$.

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由已知 $a+b=14$ ，所以 $b=14-a$. ························1 分

依题意，$\begin{cases}9+6>6+a,\\9+6>7+b,\end{cases}$ ························3 分

即 $\begin{cases}9+6>6+a,\\9+6>7+(14-a),\end{cases}$ 解得 $6<a<9$，又 $a\in\mathbf{N}$，

所以 $a=7$，$a=8$. ························4 分

（Ⅱ）由已知，随机变量 X 是高一（1）班同学中投票给地理学科的人数，

所以 $X=0,1,2$. ························5 分

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{14}$， ························6 分

$P(X=1)=\dfrac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$， ························7 分

$P(X=2)=\dfrac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\dfrac{3}{28}$. ························8 分

X	0	1	2
P	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{28}$

························9 分

$E(X)=0\times\dfrac{5}{14}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{3}{28}=\dfrac{3}{4}$. ························10 分

（Ⅲ）$a=7$ 或 $a=8$. ························13 分

21.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x+\ln x-x$，$x>0$.

所以 $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}-1$， ························2 分

所以 $f(1)=e-1$，$f'(1)=e$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e-1)=e(x-1)$，

整理得 $ex-y-1=0$. ························4 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=e^x-a\ln x-x$，$x>0$.

所以 $f'(x)=e^x-\dfrac{a}{x}-1=\dfrac{xe^x-x-a}{x}$， ························6 分

依题意，$f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在变号零点. ························7 分

因为 $x>0$，设 $g(x)=xe^x-x-a$，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在变号零点. ······8 分

因为 $g'(x)=e^x(x+1)-1$， ……………………9 分

所以，当 $x\in(0,1)$ 时， $e^x>1$， $x+1>1$，所以 $e^x(x+1)>1$，即 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上为单调递增函数， ……………………12 分

依题意， $\begin{cases} g(0)<0, \\ g(1)>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -a<0, \\ e-1-a>0. \end{cases}$ ……………………13 分

解得 $0<a<e-1$． ……………………14 分

所以，若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在极值点， a 的取值范围是 $(0,e-1)$．

22.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，定义域为 $\{x\,|\,x>0\}$．

因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$． ……………………1 分

令 $f'(x)=0$，解得 $x=e$，

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,e)$ 上单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递减. ……………3 分

所以 $f(x)$ 有极大值，极大值为 $f(e)=\dfrac{1}{e}$；没有极小值. ……………………4 分

（Ⅱ）因为 $x>0$，所以在 $(1,+\infty)$ 上 $f(x)<0$ 恒成立，即 $\ln x+ax^2-ax<0$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立. ……………………5 分

设 $g(x)=\ln x+ax^2-ax$.

①当 $a\geq 0$ 时， $g(2)=\ln 2+2a>0$，不符合题意. ……………………7 分

②当 $a<0$ 时，

$$g'(x)=\frac{1}{x}+2ax-a=\frac{2ax^2-ax+1}{x}.$$ ……………………8 分

令 $g'(x)=0$，即 $2ax^2-ax+1=0$，

因为方程 $2ax^2-ax+1=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-8a>0$，两根之积 $\dfrac{1}{2a}<0$．所以 $g'(x)=0$ 有两个异号根．设两根为 x_1,x_2，且 $x_1<0<x_2$， ……………………9 分

i）当 $x_2>1$ 时，

x	$(1,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

$g(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,x_2)$ 上单调递增，在区间 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x_2)>g(1)=0$，不符合题意；　　　　　　………………………10 分

ii）当 $x_2\le 1$ 时，$g'(1)\le 0$，即 $a\le -1$ 时，

$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<g(1)=0$，符合题意.

综上，$a\le -1$.　　　　　　………………………11 分（III）当 $a\ge 0$ 或 $a=-1$ 时，$f(x)$ 有1个零点；当 $a<0$ 且 $a\ne -1$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

………………………14 分

16 题提示：

1、最后剩下的可能是 A 粒子

10 颗 A 粒子两两碰撞，形成 5 颗 B 粒子；
9 颗 C 粒子中的 8 个两两碰撞，形成 4 颗 B 粒子；
所有的 17 颗 B 粒子两两碰撞，剩下一颗 B 粒子；
这个 B 粒子与剩下的一颗 C 粒子碰撞形成 A 粒子。

2、最后剩下的可能是 C 粒子

10 颗 A 粒子中的 9 颗与 9 颗 C 粒子两两碰撞，形成 9 颗 B 粒子；
所有的 17 颗 B 粒子两两碰撞，最后剩一颗 B 粒子；
这个 B 粒子与剩下的一颗 A 粒子碰撞形成 C 粒子。

3、最后剩下的不可能是 B 粒子

A、B、C 三种粒子每一次碰撞有以下 6 种可能的情况：
A 与 A 碰撞，会产生一颗 B 粒子，减少两颗 A 粒子；（B 多 1 个，AC 共减少两个）
B 与 B 碰撞，会产生一颗 B 粒子，减少两颗 B 粒子；（B 少 1 个，AC 总数不变）
C 与 C 碰撞，会产生一颗 B 粒子，减少两颗 C 粒子；（B 多 1 个，AC 共减少两个）
A 与 B 碰撞，会产生一颗 C 粒子，减少 A、B 各一颗粒子。（B 少 1 个，AC 总数不变）
A 与 C 碰撞，会产生一颗 B 粒子，减少 A、C 各一颗粒子。（B 多 1 个，AC 共减少两个）
B 与 C 碰撞，会产生一颗 A 粒子，减少 B、C 各一颗粒子。（B 少 1 个，AC 总数不变）
可以发现如下规律：

（1）从 B 粒子的角度看：每碰撞一次，B 粒子的数量增多一个或减少一个。题目中共有 27 颗粒子，经过 26 次碰撞剩一颗粒子，整个过程变化了偶数次，由于开始 B 粒子共有 8 颗，所以 26 次碰撞之后，剩余的 B 粒子个数必为偶数，不可能是 1 个。所以，最后剩下的不可能是 B 粒子。

（2）从 A、C 粒子的角度看：每次碰撞之后，A、C 粒子总数或者不变、或者减少两个。题目中 A、C 粒子之和为 19 个，无论碰撞多少次，A、C 粒子都没了是不可能的。所以，剩下的最后一颗粒子一定是 A 或 C.