绝密★启用前

2023—2024 高三省级联测考试
数学试卷

班级__________ 姓名__________

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x>-2\}$，$B=\{x||x|\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1,2,3,4\}$　　B. $\{x|-2<x<4\}$

C. $\{0,1,2,3,4\}$　　D. $\{x|-2<x\leqslant 4\}$

2. 已知复数 z 满足 $z(\mathrm{i}+1)=1+2\mathrm{i}$，则 $\bar{z}$ 的虚部为

A. $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知 $a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$，则“直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $(a+1)x-2ay+1=0$ 垂直”是“$a=0$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 垃圾分类是指按一定规定或标准将垃圾分类储存、投放和搬运，从而转变成公共资源的一系列活动的总称. 垃圾分类的目的是提高垃圾的资源价值和经济价值，减少垃圾处理量和处理设备的使用，降低处理成本，减少土地资源的消耗，具有社会、经济、生态等方面的效益. 已知某种垃圾的分解率 v 与时间 t（月）满足函数关系式 $v(t)=a\cdot b^t$（其中 a，b 为非零常数）. 若经过 12 个月，这种垃圾的分解率为 20%，经过 24 个月，这种垃圾的分解率为 40%，那么这种垃圾完全分解（分解率为 100%）至少需要经过（参考数据 $\lg 2\approx 0.3$）

A. 64 个月　　B. 40 个月　　C. 52 个月　　D. 48 个月

5. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=$

A. $-\frac{2\sqrt{14}}{9}$　　B. $\frac{2\sqrt{14}}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{9}$　　D. $-\frac{\sqrt{7}}{9}$

6. 在某次围棋比赛中，甲、乙两人进入最后决赛. 比赛采取三局两胜制，即先胜两局的一方获得比赛冠军，比赛结束. 假设每局比赛甲胜出的概率都为 $\frac{2}{3}$，比赛不设平局，且各局比赛的胜负互不影响. 在甲第一局胜出的情况下，甲获得冠军的概率为

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{5}{27}$　　D. $\frac{2}{3}$

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$，$f(2)-f(4)=4$，且 $f(x)$在$[2,4]$上单调. 设函数 $g(x)=f(x)-\frac{3}{2}$，且 $g(x)$的定义域为$(-5,8)$，则函数 $g(x)$的所有零点之和等于

A. 7　　B. 9　　C. 10　　D. 12

8. 某正三棱锥的外接球的表面积为 16π，则当此三棱锥的体积最大时，底面所在平面截球的截面面积是

A. 2π　　B. 4π　　C. $\frac{32\pi}{7}$　　D. $\frac{32\pi}{9}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$，若圆 $M:(x-2)^2+y^2=1$ 与双曲线 C 的渐近线相切，则

A. 双曲线 C 的渐近线方程为 $x\pm\sqrt{3}y=0$

B. 双曲线 C 的实轴长为 6

C. 双曲线 C 的离心率 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. 过双曲线 C 的右焦点的直线与圆 M 交于 A，B 两点，则弦长 $|AB|=2$

10. 下列说法正确的是

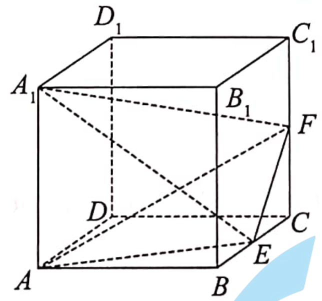
A. 互斥事件一定是对立事件，对立事件不一定是互斥事件

B. 若 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$P(X\geqslant 2)=0.2$，则 $P(0<X<1)=0.3$

C. 已知 $0<P(M)<1$，$0<P(N)<1$，若 $P(M|N)+P(\overline{M})=1$，则事件 M，N 相互独立

D. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2=3.712$，依据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验（$\chi_{0.05}=3.841$），可判断 X 与 Y 有关且犯错误的概率不超过 0.05

11. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E，F 分别为棱 BC，CC_1 的中点，则



A. 直线 A_1F 与 AE 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. 直线 A_1F 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. 平面 AEF 截正方体所得截面周长为 $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

D. 三棱锥 A_1-AEF 的体积为$\frac{3}{4}$

12. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+2, n \text{ 为奇数},\\ 2a_n, n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 设 $b_n=a_{2n}$，记数列$\{a_n\}$的前 $2n$ 项和为 S_{2n}，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，则

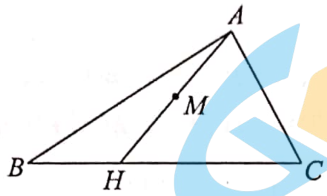
A. $a_5=20$　　B. $b_n=3\times 2^n$

C. $T_n=-2n-6+3\times 2^{n+1}$　　D. $S_{2n}=-6n-12+3\times 2^{n+2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若$(1+ex)^{2023}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2023}x^{2023}$，则 $a_0-\frac{a_1}{e}+\frac{a_2}{e^2}-\frac{a_3}{e^3}+\frac{a_4}{e^4}-\cdots-\frac{a_{2023}}{e^{2023}}=$________.

14. 在$\triangle ABC$ 中，H 为 BC 的三等分点(靠近 B 点)，M 为 AH 的中点，若 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda-\mu=$________.



15. 函数 $f(x)=|x-1|+x\ln x$ 的最小值为________.

16. 已知直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$在第二象限交于 A，B 两点，l 与 x 轴，y 轴分别交于 M，N 两点，且$|MB|=|NA|$，$|MN|=2\sqrt{2}$，则直线 l 在 y 轴上的截距为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知公比大于 1 的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_2+a_4=90$，$a_3=27$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

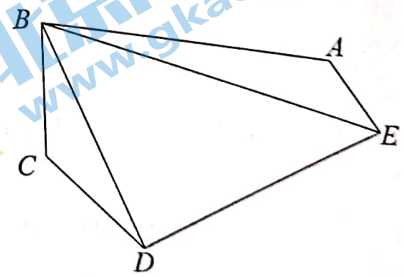
(2)记 b_m 为数列$\{a_n\}$在区间$(0,m](m\in\mathbf{N}^*)$中的项的个数，求数列$\{b_m\}$的前 100 项和 S_{100}.

18.（本小题满分 12 分）

如图，$\triangle BCD$ 为等腰三角形，$BC=\sqrt{3}$，点 A，E 在$\triangle BCD$ 外，且 $DE=4$，$\angle BCD=\angle CDE=\angle BAE=\frac{2\pi}{3}$.

(1)求 BE 的长度；

(2)求 $AB+AE$ 的最大值.



19.(本小题满分 12 分)

甲、乙、丙三人进行网球比赛，约定赛制如下：累计负两场被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两个人，另一个人当裁判，没有平局；每场比赛结束时，负的一方在下一场当裁判；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获得冠军，比赛结束. 已知在每场比赛中，双方获胜的概率都为$\frac{1}{2}$，各局比赛的结果相互独立. 经抽签，第一场比赛甲当裁判.

(1)求前三场比赛结束后，丙被淘汰的概率；

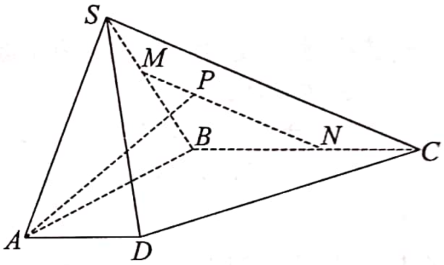
(2)求只需四场比赛就决出冠军的概率.

20.(本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AD//BC$，$AB\perp BC$，$\triangle SAB$ 是等边三角形，侧面 $SAB\perp$底面 $ABCD$，$AB=2$，$BC=3$，$AD=1$，点 M，N 分别在棱 SB，CB 上，且 $BM=2MS$，$BN=2NC$，点 P 是线段 MN 上的任意一点.

(1)求证：$AP//$平面 SCD；

(2)求平面 SCD 与平面 BCD 所成角的余弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$上一点 $A(a,a)(a\neq0)$到焦点 F 的距离为$\frac{5}{2}$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 P，Q 两点，直线 OP，OQ 与圆 $E:(x-2)^2+y^2=4$ 的另一交点分别为 M，N，O 为坐标原点，求$\triangle OPQ$与$\triangle OMN$ 面积之比的最小值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\sin(x-1)-\ln x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数.

(1)证明：$f'(x)$在区间$\left(0,1+\frac{\pi}{2}\right)$上存在唯一极大值点；

(2)求函数 $f(x)$的零点个数.