2018 北京人大附中高三 2 月份内部特供卷

数　　学（理）（二）

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

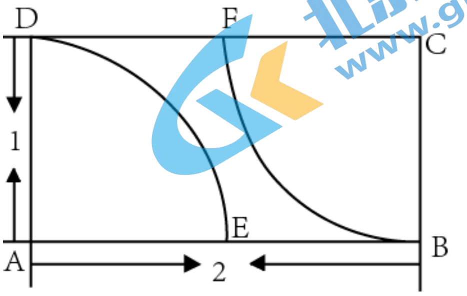
3．非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．如图，在矩形区域 $ABCD$ 的 A，C 两点处各有一个通信基站，假设其信号覆盖范围分别是扇形区域 ADE 和扇形区域 CBF（该矩形区域内无其他信号来源，基站工作正常），若在该矩形区域内随机地选一地点，则该地点无信号的概率是（　　）



A．$1-\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}-1$　　C．$2-\dfrac{\pi}{2}$　　D．$\dfrac{\pi}{4}$

2．已知复数 $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $\bar{z}+|z|=$（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B．$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　C．$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

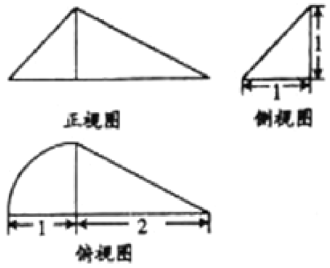
3．若 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sin\alpha$ 的值为（　　）

A．$\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$　　B．$\dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$　　C．$\dfrac{7}{18}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

4．集合 $A=\{x\mid x^2-1>0\}$，$B=\{y\mid y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$（　　）

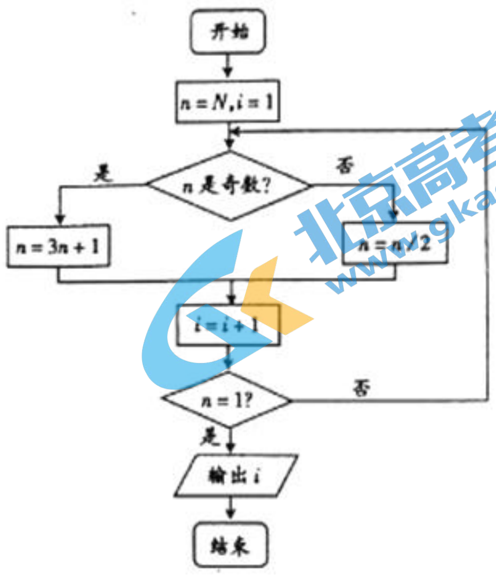
A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

5．已知一几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



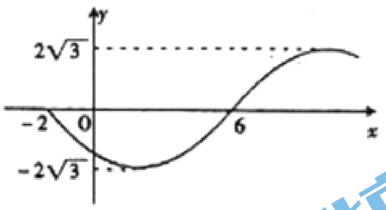
A．$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}$　　　B．$\dfrac{\pi}{12}+1$　　　C．$\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{3}$　　　D．$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{3}$

6．世界数学名题“$3x+1$问题”：任取一个自然数，如果它是偶数，我们就把它除以 2，如果它是奇数，我们就把它乘 3 再加上 1，在这样一个变换下，我们就得到了一个新的自然数，如果反复使用这个变换，我们就会得到一串自然数，猜想：反复进行上述运算后，最后结果为 1，现根据此问题设计一个程序框图如下图，执行该程序框图，若输入的$N=5$，则输出$i=$（　　）



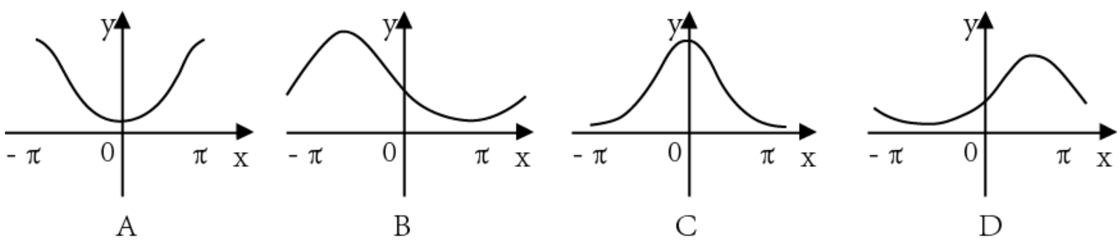
A．3　　　B．5　　　C．6　　　D．7

7．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,|\phi|<\pi)$的部分图象如图所示，则函数$g(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$图象的一个对称中心可能为（　　）



A．$(-2,0)$　　　B．$(1,0)$　　　C．$(10,0)$　　　D．$(14,0)$

8．函数$y=e^{\sin x}(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$的大致图象为（　　）



9．已知点 A，B，C，D 在同一个球的球面上，$AB=BC=\sqrt{2}$，$AC=2$，若四面体 $ABCD$ 的体积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，球心 O 恰好在棱 DA 上，则这个球的表面积为（　　）

A．$\dfrac{25\pi}{4}$　　B．4π　　C．8π　　D．16π

10．F 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 右焦点，M，N 为双曲线上的点，四边形 $OFMN$ 为平行四边形，且四边形 $OFMN$ 的面积为 bc，则双曲线的离心率为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

11．已知不等式组 $\begin{cases} x-y+k\geqslant 0 \\ 3x-y-6\leqslant 0 \\ x+y+6\geqslant 0 \end{cases}$ 表示的平面区域恰好被圆 $C:(x-3)^2+(y-3)^2=r^2$ 所覆盖，则实数 k 的值是（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

12．已知 x_0 是方程 $2x^2\mathrm{e}^{2x}+\ln x=0$ 的实根，则关于实数 x_0 的判断正确的是（　　）

A．$x_0\geqslant \ln 2$　　B．$x_0<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　C．$2x_0+\ln x_0=0$　　D．$2\mathrm{e}^{x_0}+\ln x_0=0$

第 II 卷

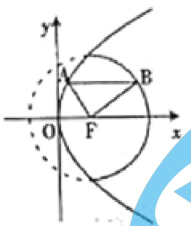
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13．$(x+1)(x-1)^5$ 展开式中含 x^3 项的系数为________．（用数字表示）

14．已知 $\vec{a}=(1,\lambda)$，$\vec{b}=(2,1)$，若向量 $2\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{c}=(8,6)$ 共线，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为______．

15．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$b\tan B+b\tan A=-2c\tan B$，且 $a=8$，$\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$，则 $b+c$ 的值为________．

16．如图所示，点 F 是抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，点 A，B 分别在抛物线 $y^2=8x$ 及圆 $(x-2)^2+y^2=16$ 的实线部分上运动，且 AB 总是平行于 x 轴，则 $\triangle FAB$ 的周长的取值范围是_________．



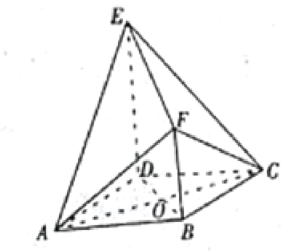
三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1$，$na_{n+1}=(n+2)S_n+n(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$．

（1）证明：数列 $\{\dfrac{S_n}{n}+1\}$ 为等比数列；

（2）求 $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$.

18．如图所示的几何体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， $AB = 2a$ ， $\angle ABC = 120°$ ， AC 与 BD 相交于 O 点，四边形 $BDEF$ 为直角梯形， $DE // BF$ ， $BD \perp DE$ ， $DE = 2BF = 2\sqrt{2}a$ ，平面 $BDEF \perp$ 底面 $ABCD$.



（1）证明：平面 $AEF \perp$ 平面 AFC ；

（2）求二面角 $E-AC-F$ 的余弦值.

19．为了让贫困地区的孩子们过一个温暖的冬天，某校阳光志愿者社团组织“这个冬天不再冷”冬衣募捐活动，共有 50 名志愿者参与，志愿者的工作内容有两项：①到各班做宣传，倡议同学们积极捐献冬衣；②整理、打包募捐上来的衣物，每位志愿者根据自身实际情况，只参与其中的某一项工作，相关统计数据如下表所示：

到班级宣传	整理、打包衣物	总计
20人	30人	50人

（1）如果用分层抽样的方法从参与两项工作的志愿者中抽取 5 人，再从这 5 人中选 2 人，那么“至少有 1 人是参与班级宣传的志愿者”的概率是多少？

（2）若参与班级宣传的志愿者中有 12 名男生，8 名女生，从中选出 2 名志愿者，用 X 表示所选志愿者中的女生人数，写出随机变量 X 的分布列及其数学期望.

20．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 6，且椭圆 C 与圆 $M:(x-2)^2+y^2=\dfrac{40}{9}$ 的公共弦长为 $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $P(0,2)$ 作斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于两点 A，B，试判断在 x 轴上是否存在点 D，使得 $\triangle ADB$ 为以 AB 为底边的等腰三角形，若存在，求出点 D 的横坐标的取值范围；若不存在，请说明理由.

21．已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$.

（1）当 $a \leqslant 0$ 时，试求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值，试求 a 的取值范围.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22．选修 4-4：坐标系与参数方程

已知曲线 C：$\rho=\dfrac{2}{1-\sin\theta}$，直线 $l:\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$0\leqslant\alpha<\pi$）.

（1）求曲线 C 的直角坐标方程；

（2）设直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点（A 在第一象限），当 $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ 时，求 a 的值.

23．选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x+1|$.

（1）求不等式 $f(x)\leqslant 3$ 的解集；

（2）若函数 $y=f(x)$ 的最小值记为 m，设 a，$b\in\mathbf{R}$，且有 $a^2+b^2=m$，试证明：$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{4}{b^2+1}\geqslant\dfrac{18}{7}$.

数学试题答案

一、选择题

1.【答案】A

【解析】几何概型

2.【答案】C

【解析】$\because \bar{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$|z|=1$，$\therefore \bar{z}+|z|=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$．故选 C.

3.【答案】A

【解析】$\because \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore \sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]=\dfrac{4-\sqrt{2}}{6}$，

故选 A.

4.【答案】C

【解析】$A=\{x|x>1或x<-1\}$，$B=\{y|y>0\}$，$\therefore A\cap B=\{x|x>1\}$，选 C..

5.【答案】C

【解析】由三视图可知：该几何体是由一个三棱锥和一个圆锥的$\dfrac{1}{4}$组成的，故选 C.

6.【答案】C

7.【答案】C

【解析】由题知$A=2\sqrt{3}$，$\dfrac{2\pi}{\omega}=2(6+2)$，$\omega=\dfrac{\pi}{8}$，再把点$\left(2,-2\sqrt{3}\right)$代入可得$\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$，

$\therefore g(x)=2\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$，故选 C.

8.【答案】D

【解析】由函数$y=\mathrm{e}^{\sin x}\left(-\pi\leqslant x\leqslant\pi\right)$不是偶函数，排除 A、C，当$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$y=\sin x$为单调递增函数，而外层函数$y=\mathrm{e}^{x}$也是增函数，所以$y=\mathrm{e}^{\sin x}\left(-\pi\leqslant x\leqslant\pi\right)$在$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上为增函数．故选 D.

9.【答案】D

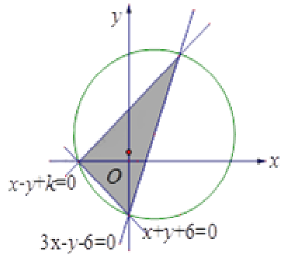
【解析】根据条件可知球心O在侧棱DA中点，从而有AC垂直CD，$AD=4$，所以球的半径为 2，故球的表面积为16π.

10.【答案】B

【解析】设$M(x_0，y_0)$，$\because$四边形$OFMN$为平行四边形，$\therefore x_0=\dfrac{c}{2}$，$\because$四边形$OFMN$的面积为$bc$，$\therefore |y_0|c=bc$，即$|y_0|=b$，$\therefore M\left(\dfrac{c}{2}，b\right)$，代入双曲线方程得$\dfrac{e^2}{4}-1=1$，$\because e>1$，$\therefore e=2\sqrt{2}$．选 B.

11.【答案】D

【解析】由于圆心$(3,3)$在直线$3x-y-6=0$上，又由于直线$x-y+k=0$与直线$x+y+6=0$互相垂直其交点为$\begin{cases}x=-\dfrac{k+6}{2}\\ y=\dfrac{k-6}{2}\end{cases}$，直线$3x-y-6=0$与$x+y+6=0$的交点为$(0,-6)$．由于可行域恰好被圆所覆盖，及三角形为圆的内接三角形圆的半径为$r=\sqrt{(3-0)^2+(3+6)^2}=3\sqrt{10}$，解得$k=6$或$k=-6$（舍去）．故选 D.



12.【答案】C

【解析】方程即为 $2x_0^{\,2}e^{2x_0}=-\ln x_0$，即 $2x_0e^{2x_0}=e^{-\ln x_0}\left(-\ln x_0\right)$，令 $f\left(x\right)=xe^x$，∴ $f\left(2x_0\right)=f\left(-\ln x_0\right)$，则 $f'\left(x\right)=e^x\left(x+1\right)>0$，函数 $f\left(x\right)$ 在定义域内单调递增，结合函数的单调性有：$2x_0=-\ln x_0$，故选 C.

二、填空题

13.【答案】0

【解析】$(x-1)^5$ 展开式中含 x^3 项的系数为 $C_5^3=10$，含 x^2 项的系数为 $-C_5^3=-10$，所以 $(x+1)\left(x-1\right)^5$ 展开式中含 x^3 项的系数为 10−10=0.

14.【答案】$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

【解析】由题知 $\lambda=1$，所以投影为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

15.【答案】$4\sqrt{5}$

【解析】∵ $b\tan B+b\tan A=-2c\tan B$，∴ 由正弦定理 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$A=\dfrac{2\pi}{3}$，

∵ $a=8$，由余弦定理可得：$64=b^2+c^2+bc=\left(b+c\right)^2-bc$，又因为 $\triangle ABC$ 面积 $4\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc$，

$bc=16$，$b+c=4\sqrt{5}$.

16.【答案】$(8,12)$

【解析】易知圆 $\left(x-2\right)^2+y^2=16$ 的圆心为（2，0），正好是抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，圆 $\left(x-2\right)^2+y^2=16$ 与抛物线 $y^2=8x$ 在第一象限交于点 $C(2,4)$，过点 A 作抛物线准线的垂线，垂足为点 D，则 $AF=AD$，则 $AF+AB=AD+AB=BD$，当点 B 位于圆 $\left(x-2\right)^2+y^2=16$ 与 x 轴的交点（6，0）时，BD 取最大值 8，由于点 B 在实线上运动，因此当点 B 与点 C 重合时，BD 取最小值 4，此时 A 与 B 重合，由于 F、A、B 构成三角形，因此 $4<BD<8$，所以 $8<BF+BD<12$.

三、解答题

17.【答案】(1) 因为 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，

所以 $n(S_{n+1}-S_n)=(n+2)S_n+n(n+1)$，

即 $nS_{n+1}=2(n+1)S_n+n(n+1)$，则 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=2\times\dfrac{S_n}{n}+1$，

所以 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}+1=2(\dfrac{S_n}{n}+1)$，又 $\dfrac{S_1}{1}+1=2$，

故数列 $\{\dfrac{S_n}{n}+1\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列.

(2) 由 (1) 知 $\dfrac{S_n}{n}+1=(\dfrac{S_1}{1}+1)\cdot 2^{n-1}=2^n$，

所以 $S_n=n\cdot 2^n-n$，

故 $T_n=(1\times 2+2\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^n)-(1+2+\cdots+n)$.

设 $M=1\times 2+2\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^n$，

则 $2M=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+n\cdot2^{n+1}$，

所以 $-M=2+2^2+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}$，

所以 $M=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$，

所以 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2-\dfrac{n(n+1)}{2}$．

18.【答案】（1）因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，

又平面 $BDEF\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $BDEF\cap$ 平面 $ABCD=BD$，

因此 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，从而 $AC\perp EF$．

又 $BD\perp DE$，所以 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，

由 $AB=2a$，$DE=2BF=2\sqrt{2}a$，$\angle ABC=120^\circ$，

可知 $AF=\sqrt{4a^2+2a^2}=\sqrt{6}a$，$BD=2a$，

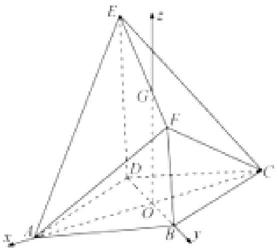
$EF=\sqrt{4a^2+2a^2}=\sqrt{6}a$，$AE=\sqrt{4a^2+8a^2}=2\sqrt{3}a$，

从而 $AF^2+FE^2=AE^2$，故 $EF\perp AF$．

又 $AF\cap AC=A$，所以 $EF\perp$ 平面 AFC．

又 $EF\subset$ 平面 AEF，所以平面 $AEF\perp$ 平面 AFC．

（2）取 EF 中点 G，由题可知 $OG/\!/DE$，所以 $OG\perp$ 平面 $ABCD$，又在菱形 $ABCD$ 中，$OA\perp OB$，所以分别以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OG}$ 的方向为 x，y，z 轴正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$（如图所示），



则 $O(0,0,0)$，$A(\sqrt{3}a,0,0)$，$C(-\sqrt{3}a,0,0)$，$E(0,-a,2\sqrt{2}a)$，$F(0,a,\sqrt{2}a)$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,-a,2\sqrt{2}a)-(\sqrt{3}a,0,0)=(-\sqrt{3}a,-a,2\sqrt{2}a)$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3}a,0,0)-(\sqrt{3}a,0,0)=(-2\sqrt{3}a,0,0)$，

$\overrightarrow{EF}=(0,a,\sqrt{2}a)-(0,-a,2\sqrt{2}a)=(0,2a,-\sqrt{2}a)$．

由（1）可知 $EF\perp$ 平面 AFC，所以平面 AFC 的法向量可取为 $\overrightarrow{EF}=(0,2a,-\sqrt{2}a)$．

设平面 AEC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y+2\sqrt{2}z=0,\\ x=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=2\sqrt{2}z,\\ x=0,\end{cases}$，令 $z=\sqrt{2}$，得 $y=4$，

所以 $\vec{n}=(0,4,\sqrt{2})$．

从而 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{EF}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{6a}{6\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

故所求的二面角 $E-AC-F$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

19.【答案】（1）用分层抽样的方法，每个人被抽中的概率是 $\dfrac{5}{50}=\dfrac{1}{10}$，

所以，参与到班级宣传的志愿者被抽中的有 $20\cdot\dfrac{1}{10}=2$ 人，

参与整理、打包衣物的志愿者被抽中的有 $30\cdot\dfrac{1}{10}=3$ 人，

故“至少有 1 人是参与班级宣传的志愿者”的概率是 $P=1-\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{7}{10}$．

（2）女生志愿者人数 $X=0,1,2$，则 $P(X=0)=\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{33}{95}$，$P(X=1)=\frac{C_{12}^1C_8^1}{C_{20}^2}=\frac{48}{95}$，$P(X=2)=\frac{C_8^2}{C_{20}^2}=\frac{14}{95}$.

∴ X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{33}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{14}{95}$

∴ X 的数学期望为 $E(X)=0\cdot\frac{33}{95}+1\cdot\frac{48}{95}+2\cdot\frac{14}{95}=\frac{76}{95}$.

20.【答案】（1）由题意可得 $2a=6$，所以 $a=3$.

由椭圆 C 与圆 M：$(x-2)^2+y^2=\frac{40}{9}$ 的公共弦长为 $\frac{4\sqrt{10}}{3}$，恰为圆 M 的直径，

可得椭圆 C 经过点 $(2,\pm\frac{2\sqrt{10}}{3})$，所以 $\frac{4}{9}+\frac{40}{9b^2}=1$，解得 $b^2=8$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

（2）直线 l 的解析式为 $y=kx+2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点为 $E(x_0,y_0)$．假设存在点 $D(m,0)$，使得 $\triangle ADB$ 为以 AB 为底边的等腰三角形，则 $DE\perp AB$．由 $\begin{cases} y=kx+2 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1 \end{cases}$ 得 $(8+9k^2)x^2+36kx-36=0$，故

$x_1+x_2=-\frac{36k}{9k^2+8}$，所以 $x_0=\frac{-18k}{9k^2+8}$，$y_0=kx_0+2=\frac{16}{9k^2+8}$.

因为 $DE\perp AB$，所以 $k_{DE}=-\frac{1}{k}$，即 $\dfrac{\frac{16}{9k^2+8}-0}{\frac{-18k}{9k^2+8}-m}=-\frac{1}{k}$，所以 $m=\frac{-2k}{9k^2+8}=\dfrac{-2}{9k+\frac{8}{k}}$.

当 $k>0$ 时，$9k+\frac{8}{k}\geqslant 2\sqrt{9\times 8}=12\sqrt{2}$，所以 $-\frac{\sqrt{2}}{12}\leqslant m<0$.

综上所述，在 x 轴上存在满足题目条件的点 D，且点 D 的横坐标的取值范围为 $-\frac{\sqrt{2}}{12}\leqslant m<0$.

21.【答案】（1）$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-a(1-\frac{1}{x})=\frac{e^x(x-1)-ax(x-1)}{x^2}=\frac{(e^x-ax)(x-1)}{x^2}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，对于 $\forall x\in(0,+\infty)$，$e^x-ax>0$ 恒成立，

所以 $f'(x)>0$，$x>1$；$f'(x)<0$，$0<x<1$.

所以单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(0,1)$.

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值，则 $f'(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 内有解.

令 $f'(x)=\frac{(e^x-ax)(x-1)}{x^2}=0$，$e^x-ax=0$，$a=\frac{e^x}{x}$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，$x\in(0,1)$，

所以 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$ 恒成立，

所以 $g(x)$ 单调递减.

又因为 $g(1)=e$，又当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$，

即 $g(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上的值域为 $(e,+\infty)$，

所以当 $a>e$ 时，$f'(x)=\frac{(e^x-ax)(x-1)}{x^2}=0$ 有解.

设 $H(x)=\mathrm{e}^x-ax$，则 $H'(x)=\mathrm{e}^x-a<0\ x\in(0,1)$，
所以 $H(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 单调递减.
因为 $H(0)=1>0$，$H(1)=\mathrm{e}-a<0$，
所以 $H(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 在 $x\in(0,1)$ 有唯一解 x_0.
所以有：

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,1)$
$H(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $a>\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值且唯一.
当 $a\leqslant\mathrm{e}$ 时，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递增，不成立.
综上，a 的取值范围为 $(\mathrm{e},+\infty)$.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22．选修 4—4：坐标系与参数方程

【答案】（1）由 $\rho=\dfrac{2}{1-\sin\theta}$，得 $\rho=\rho\sin\theta+2$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2=4y+4$；

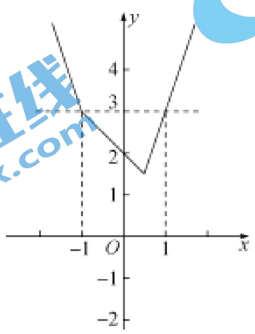
（2）设 $A(\rho_1,\alpha)$，则 $B(\rho_2,\pi+\alpha)$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\overline{OA}+3\overline{OB}=\vec{0}\Leftrightarrow\rho_1=3\rho_2$，

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{1-\sin\alpha}=3\left(\dfrac{2}{1+\sin\alpha}\right)\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

23．选修 4-5：不等式选讲.

【答案】（1）因为 $f(x)=|2x-1|+|x+1|=\begin{cases}-3x, x<-1,\\ -x+2,-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 3x, x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

从图可知满足不等式 $f(x)\leqslant3$ 的解集为 $[-1,1]$.



（2）证明：由图可知函数 $y=f(x)$ 的最小值为 $\dfrac{3}{2}$，即 $m=\dfrac{3}{2}$.

所以 $a^2+b^2=\dfrac{3}{2}$，从而 $a^2+1+b^2+1=\dfrac{7}{2}$，

从而 $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{4}{b^2+1}=\dfrac{2}{7}[(a^2+1)+(b^2+1)](\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{4}{b^2+1})=$

$\dfrac{2}{7}[5+(\dfrac{b^2+1}{a^2+1}+\dfrac{4(a^2+1)}{b^2+1})]\geqslant\dfrac{2}{7}[5+2\sqrt{\dfrac{b^2+1}{a^2+1}\cdot\dfrac{4(a^2+1)}{b^2+1}}]=\dfrac{18}{7}$.

当且仅当$\dfrac{b^2+1}{a^2+1}=\dfrac{4(a^2+1)}{b^2+1}$时，等号成立，

即$a^2=\dfrac{1}{6}$，$b^2=\dfrac{4}{3}$时，有最小值，

所以$\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{4}{b^2+1}\geqslant\dfrac{18}{7}$得证.