珠海市 2020-2021 学年度第二学期高三学生第二次学业质量监测　数学评分参考

第Ⅰ卷　选择题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A=\{x\mid 0.7^x>1, x\in R\}$，$B=\{x\mid x^2-x-2<0, x\in R\}$，则 $A\cap B=$　B

A. $(0,1)$　B. $(-1,0)$　C. $(1,2)$　D. $(-1,2)$

2. 已知 i 是虚数单位，复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$，z 对应复平面内的点 Z，则 $|\overrightarrow{OZ}|=$　A

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

3. 已知 $a,b\in R$，满足 $ab<0$，$a+b>0$，$a>b$，则　C

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　B. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>0$　C. $a^2>b^2$　D. $a<|b|$

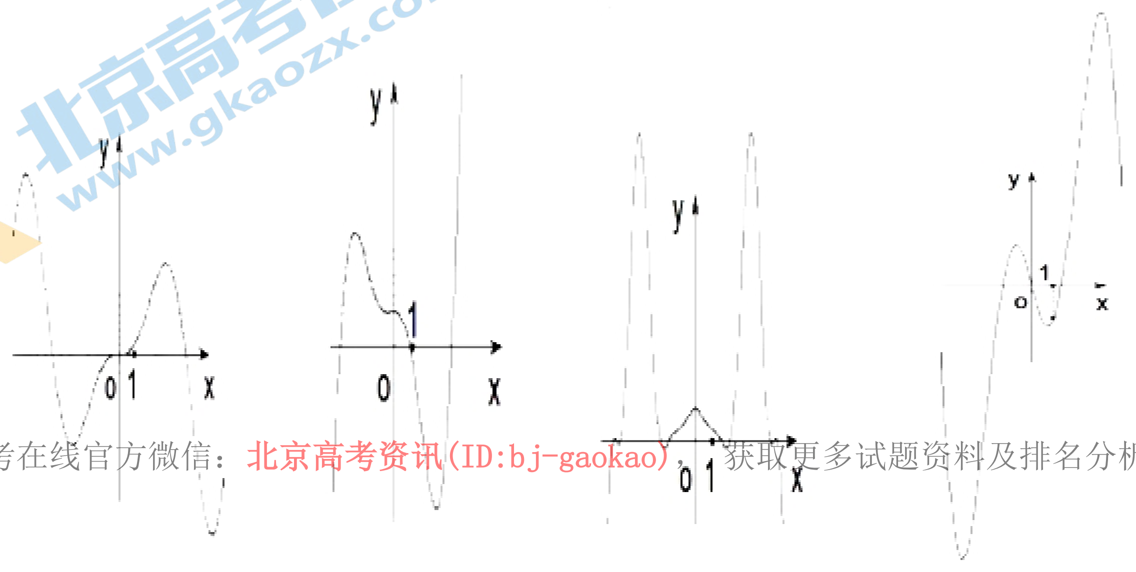
4. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=3$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$　D

A. 3　B. $\sqrt{3}$　C. 7　D. $\sqrt{7}$

5. 5 位医生被分配到 4 个接种点承担接种新冠疫苗工作，每个医生只能去一个接种点，每个接种点至少有一名医生，其中医生甲不能单独完成接种工作，则共有（　）种不同的分配方法　C

A. 24　B. 48　C. 96　D. 12

6. 函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 的图像为　A



A.　　B.　　C.　　D.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_3+a_5=10$，$S_5=15$，则 $S_6=$　D

A. 18　B. 30　C. 36　D. 24

8.《九章算术》勾股章有一问题："今有立木，系索其末，委地三尺.引索却行,去本八尺而索尽,问索长几何?",其意思是:现有一竖立着的木柱,在木柱的上端系有绳索,绳索从木柱的上端顺木柱下垂后,堆在地面的部分尚有三尺,牵着绳索退行，拉直绳索，绳索头与地面接触点离木柱根部八尺处时绳索用尽．现从该绳索上任取一点,该点取自木柱中点上方的概率为　B

A．$\frac{55}{73}$　B．$\frac{55}{146}$　C．$\frac{11}{15}$　D．$\frac{55}{72}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9．已知函数 $f(x)=-x^2\ln x\,(x>0)$，则　CD

A．$f(x)\le 0$ 恒成立

B．$f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数

C．$f(x)$ 在 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 得到极大值 $\frac{1}{2e}$

D．$f(x)$ 只有一个零点

10．已知函数 $f(x)=\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x$，则　ACD

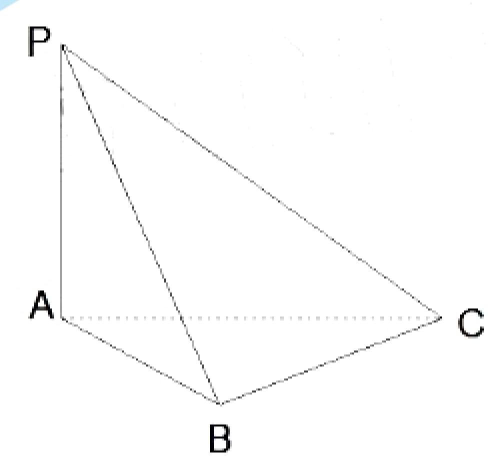
A．π 是函数 $f(x)$ 的一个周期

B．$x=-\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴

C．函数 $f(x)$ 的一个增区间是 $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$

D．把函数 $y=2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，得到函数 $f(x)$ 的图像.

11．如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB=2$，$BC=2\sqrt{3}$，$AC=4$，A 到平面 PBC 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$，则　ABD



A．$PA=4$

B．三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 32π

C．直线 AB 与直线 PC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{16}$

D．AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12．分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学．分形的外表结构极为复杂，

但其内部却是有规律可寻的．一个数学意义上的分形的生成是基于一个不断迭代的方程式，即一种基于递归的反馈系统．下面我们用分形的方法得到一系列图形，如图 1，在长度为 1 的线段 AB 上取两个点 C,D，使得 $AC=DB=\frac{1}{4}AB$，以 CD 为边在线段 AB 的上方做一个正方形，然后擦掉 CD，就得到图形 2；对图形 2 中的最上方的线段 EF 作同样的操作，得到图形 3；依次类推，我们就得到以下的一系列图形.设图 1，图 2，图 3，…，图 n，各图中的线段长度和为 a_n，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 **BC**

图 1

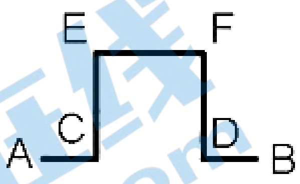


图 2

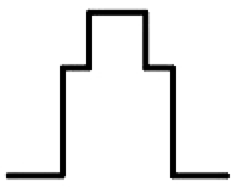


图 3

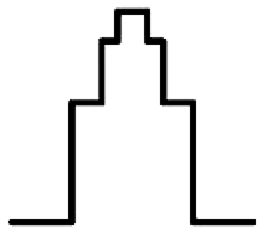


图 4

A．数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

B．$S_{10}=\frac{6657}{256}$

C．$a_n<3$ 恒成立

D．存在正数 m，使得 $S_n<m$ 恒成立

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若 $(x-\frac{a}{\sqrt{x}})^8\ (a>0)$ 的二项展开式中二项式系数最大项为 $5670x^2$，则 $a=$______．

3

14．已知某校期末考试数学平均分 $X\sim N(75,100)$，则 $P(65<X<95)=$________．

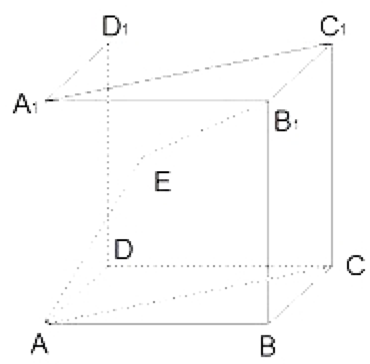
0.81855

附：$P(\mu-\sigma\le X<\mu+\sigma)=0.6826$

$P(\mu-2\sigma\le X<\mu+2\sigma)=0.9545$

15．设圆锥曲线 C 的两个焦点分别为 F_1,F_2，P 为曲线 C 上一点，$|PF_1|:|PF_2|:|F_1F_2|=5:4:2$，则曲线 C 的离心率为________．$\frac{2}{9}$ **或 2**

16．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E 为平面 AA_1C_1C 内的动点，$B_1E=2$,则 AE 长度的最小值为______．



$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

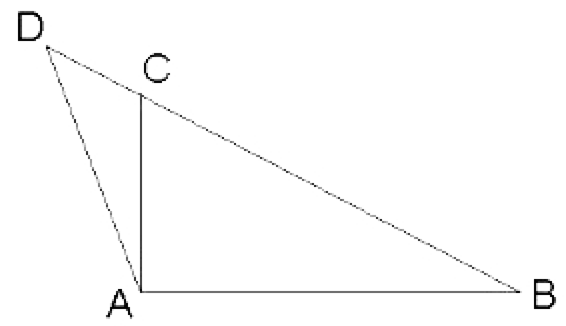
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）在①$3\cos 2B-\cos C=1$；②$\tan\frac{C}{2}=\tan B$；③$\sin B+\sqrt{3}\sin C=2$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中.

问题：

如图，直角ΔABC中，$A=\frac{\pi}{2}$，$BC=4$，且________，点D在BC的延长线上，$CD=1$，求AD长.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.



(第 17 题图)

解：选①∵直角ΔABC中，$A=\frac{\pi}{2}$

$\therefore 3\cos 2B-\cos C=3(1-2\sin^2 B)-\sin B=1$ ……………………2 分

即$6\sin^2 B+\sin B-2=0$

得$\sin B=\frac{1}{2}$ ……………………4 分

$\because 0<B<\frac{\pi}{2}$

$\therefore B=\frac{\pi}{6}$ ……………………6 分

$\because BC=4$

$\therefore AC=2$且$\angle ACD=\frac{2\pi}{3}$ ……………………8 分

$\because CD=1$

$\therefore AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD}=\sqrt{7}$. ……………………10 分

选②∵直角ΔABC中，$A=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \tan\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$

$= \dfrac{1-\cos C}{\sin C} = \tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{\cos C}{\sin C}$ ……………………………………4 分

得 $\cos C = \dfrac{1}{2}$

$\because 0 < C < \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore C = \dfrac{\pi}{3}$ ……………………………………6 分

$\because BC = 4$

$\therefore AC = 2$ 且 $\angle ACD = \dfrac{2\pi}{3}$ ……………………………………8 分

$\because CD = 1$

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos\angle ACD} = \sqrt{7}$． ……………………………10 分

选③$\because$直角 ΔABC 中， $A = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \sin B + \sqrt{3}\sin C = \sqrt{3}\sin C + \cos C = 2$

$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C + \dfrac{1}{2}\cos C = \sin(C + \dfrac{\pi}{6}) = 1$ ……………………………………4 分

$\because 0 < C < \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \dfrac{\pi}{6} < C + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore C + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore C = \dfrac{\pi}{3}$ ……………………………………6 分

$\because BC = 4$

$\therefore AC = 2$ 且 $\angle ACD = \dfrac{2\pi}{3}$ ……………………………………8 分

$\because CD = 1$

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos\angle ACD} = \sqrt{7}$． ……………………………10 分

18．（12 分）已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_1 = -1$， $a_4 = 2a_2 + a_3$

(1)求数列$\{a_n\}$的通项 a_n；

(2)若 $b_n = a_n^2 \cos\dfrac{n\pi}{2}$， 求数列$\{b_n\}$的前 40 项和 S_{40}．

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d

由 $a_1=-1$，$a_4=a_1+3d=3a_1+4d=2a_2+a_3$

得 $d=2$ ……………………………………2 分

$\therefore a_n=2n-3$ ……………………………………4 分

(2) $\because b_n=a_n^2\cos\dfrac{n\pi}{2}$

$\therefore$①n 为奇数时，$b_n=0$ ……………………………………5 分

②n 为偶数时，

$n=4k+2, k\in N$ 时，$b_n=-a_n^2$ ……………………………………6 分

$n=4k+4, k\in N$ 时，$b_n=a_n^2$ ……………………………………7 分

$\therefore S_{50}=(a_4^2-a_2^2)+(a_8^2-a_6^2)+(a_{12}^2-a_{10}^2)+\cdots+(a_{36}^2-a_{34}^2)+(a_{40}^2-a_{38}^2)$ ……………9 分

$=4(a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{40})$ ……………………………………10 分

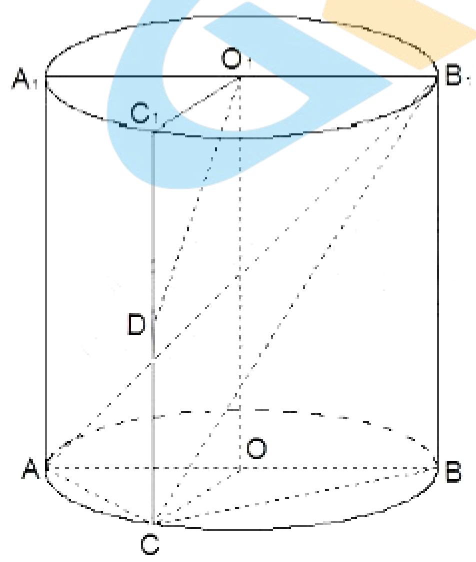
$=4(20a_2+\dfrac{20\times19}{2}\times2d)$ ……………………………………11 分

$=3120$ ……………………………………12 分

19.（12 分）如图，圆柱 OO_1，矩形 ABB_1A_1 为过轴 OO_1 的圆柱的截面，点 C,C_1 为弧 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{A_1B_1}$ 的中点，点 D 为 CC_1 的中点

(1)求证：O_1D // 平面 AB_1C；

(2)若 $BB_1=2$，三棱锥 B_1-ABC 的体积为 $\dfrac{2}{3}$，求二面角 $C-AB_1-B$ 的余弦值.



(第19题图)

(1)证明：设 $AB_1\cap OO_1=E$，连接 CE

则E为OO_1中点在矩形CC_1O_1O中

$\because$点D为CC_1的中点

$\therefore O_1E // CD$，　$O_1E = CD$ ……………………………………2 分

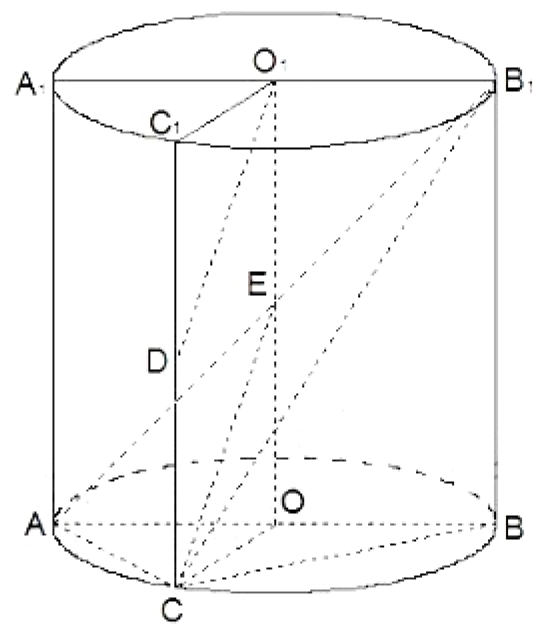
$\therefore$四边形CDO_1E是平行四边形

$\therefore O_1D // CE$，$CE \subset$平面AB_1C，$O_1D \not\subset$平面AB_1C ………………3 分

$\therefore O_1D //$ 平面AB_1C ……………………………………………4 分

(2) 解：取AE中点F，连接CF，OF

设圆锥底面半径r



$\because$点C, C_1为弧$\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{A_1B_1}$的中点

$\therefore CC_1 \perp$平面ABC，$OC \perp AB$

$\because$矩形ABB_1A_1为过轴OO_1的圆柱的截面

$\therefore$平面$ABB_1A_1 \perp$平面ABC

$\therefore OC \perp$平面ABB_1A_1 ……………………………………………6 分

$\because BB_1 = 2$，三棱锥$B_1 - ABC$的体积为$\dfrac{2}{3}$

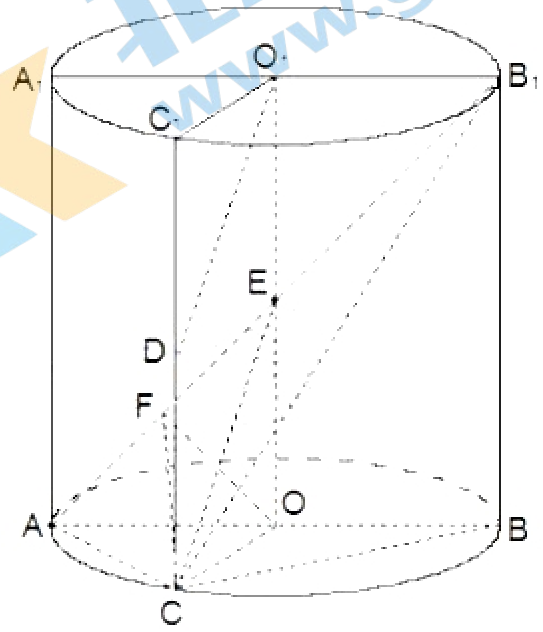
$\therefore V_{三棱锥B_1-ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot BB_1 \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \times 2 \times \dfrac{1}{2} \cdot r \cdot 2r = \dfrac{2}{3}$

得$r = 1 = OA = OB = OC$ ……………………………………7 分

$\because OO_1 \perp$平面ABC，$OO_1 = BB_1 = 2$

$\therefore OE = 1$

$\therefore CE = CA = AE = \sqrt{2}$



$\therefore FO \perp AB_1$，$FC \perp AB_1$ ……………………………………8 分

$\therefore \angle OFC$为二面角$C - AB_1 - B$的平面角………9 分

由$OF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$CF = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \cos\angle OFC=\dfrac{OF}{CF}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……………………11 分

$\therefore$二面角 $C-AB_1-B$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………12 分

20. （12 分）现有甲乙两个项目，对甲、乙两个项目分别投资 20 万元，甲项目一年后利润是 1 万元、2 万元、4 万元的概率分别是 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$；乙项目的利润随乙项目的价格变化而变化，乙项目在一年内，价格最多可进行两次调整，每次调整的概率为 $p\,(0<p<1)$，设乙项目一年内价格调整次数为 X ，X 取 0，1，2 时，一年后利润分别是 3 万元、 2 万元、1 万元．设 y_1,y_2 分别表示对甲、乙两个项目各投资 20 万元一年后的利润.

(1)写出 y_1,y_2 的概率分布列和数学期望；

(2)当 $E(y_1)>E(y_2)$ 时，求 p 的取值范围.

解：(1) y_1 的概率分布列如下：

y_1	1	2	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

……………………………………2 分

y_2 的概率分布列如下：

y_2	3	2	1
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

……………………………………4 分

$E(y_1)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$ ……………………………………6 分

$E(y_2)=3\times(1-p)^2+2\times2p(1-p)+1\times p^2=3-2p$ ……………………………8 分

(2) $E(y_1) > E(y_2)$ 得 $3-2p < \frac{11}{6}$ ……………………………………10 分

得 $p > \frac{7}{12}$

又 $0 < p < 1$

$\therefore \frac{7}{12} < p < 1$ ……………………………………11 分

$\therefore p$ 的范围是 $(\frac{7}{12}, 1)$． ……………………………………12 分

21．（12 分）已知函数 $f(x) = (x+1)e^x + mx + 3n\cos x + 3\ (m, n \in R)$

(1) $m > 0, n = 0$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的单调性；

(2) $n = -1$ 时，不等式 $f(x) \geq \frac{1}{3}mx + 1$ 对 $x \geq 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

解：(1) $m > 0, n = 0$ 时，$f(x) = (x+1)e^x + mx + 3$

$f'(x) = (x+2)e^x + m$ ……………………………………1 分

$f''(x) = (x+3)e^x$ ……………………………………2 分

当 $x < -3$ 时，$f''(x) < 0$；当 $x > -3$ 时，$f''(x) > 0$ ……………………3 分

$\because f'(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单减，在 $(-3, +\infty)$ 上单增． ……………………4 分

(2) $n = -1$ 时，不等式 $f(x) = (x+1)e^x + mx - 3\cos x + 3 \geq \frac{1}{3}mx + 1$ 对 $x \geq 0$ 恒成立

等价于 $3(x+1)e^x + 2mx - 9\cos x + 6 \geq 0$ 对 $x \geq 0$ 恒成立……“*” ……………5 分

令 $q(x) = 3(x+1)e^x + 2mx - 9\cos x + 6$，$x \geq 0$

则 $q'(x) = 3(x+2)e^x + 2m + 9\sin x$

$q(0) = 0$

$q'(0) = 2(m+3)$

$\because q''(x) = 3(x+3)e^x + 9\cos x = 3xe^x + 9(e^x + \cos x) > 0$ 对 $x \geq 0$ 恒成立

$\therefore q'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增……………………………………6 分

1) $m \ge -3$ 时， $q'(x) \ge q'(0) \ge 0$

$\therefore q(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增

$\therefore q(x) \ge q(0)=0$

$\therefore$ “*” 成立……………………………………………8 分

2) $m < -3$ 时， $q'(0) = 2(m+3) < 0$

$\because 2-\frac{2}{3}m > 4$

$\therefore q'(2-\frac{2}{3}m) = 3(4-\frac{2}{3}m)e^{2-\frac{2}{3}m} + 2m+9\sin(2-\frac{2}{3}m)$

$> 12-2m+2m+9\sin(2-\frac{2}{3}m) = 12+9\sin(2-\frac{2}{3}m) > 0$ ……………………9 分

$\therefore \exists x_0 \in (0, 2-\frac{2}{3}m)$， 使得 $q'(x_0)=0$

当 $0 < x < x_0$ 时， $q'(x) < 0$

$\therefore q(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单减

当 $0 < x \le x_0$ 时， $q(x) < q(0)=0$

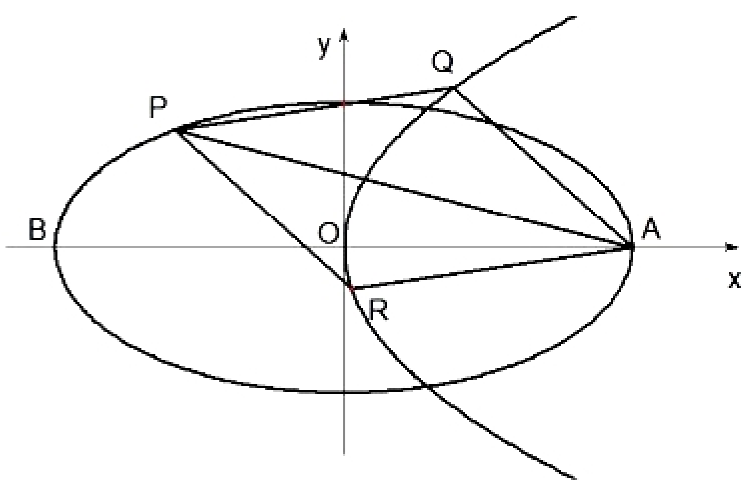
故“*”不成立. ……………………………………………11 分

综上， m 的取值范围是 $[-3,+\infty)$.……………………………………………12 分

22. （12 分）已知椭圆 $C_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$， 且 $ab=2$.

(1)求椭圆 C_1 的方程；

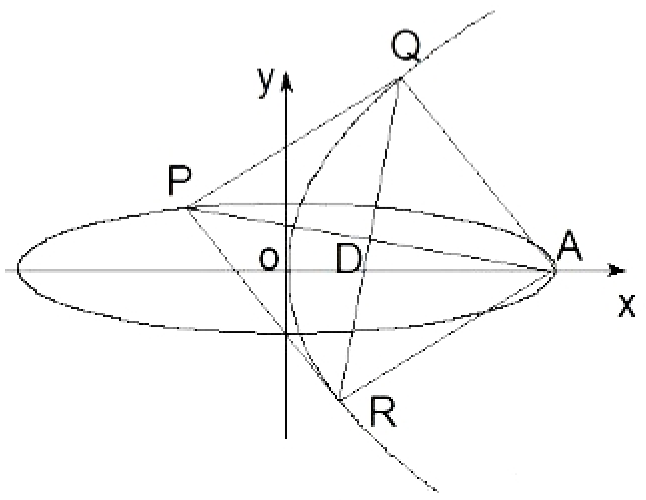
(2) 已知点 B， A 为椭圆 C_1 的左、右顶点，点 P 为椭圆 C_1 上不同于 A、B 的任一点，在抛物线 $C_2 : y^2 = 2px\,(p>0)$ 上存在两点 Q, R，使得四边形 $AQPR$ 为平行四边形，求 p 的最小值.



(第 22 题图)

解：(1)由 $\begin{cases} e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ ab=2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$

$\therefore C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………………4 分



(2)由(1)知 $A(2,0)$，设 $Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2),P(x_3,y_3)$

连接 AP,QR 设交于 $D(x_0,y_0)$

$\because$ 四边形 $AQPR$ 为平行四边形

$\therefore$ D 为 AP,QR 的中点且 QR 与 x 轴既不垂直也不平行…………………………5 分

设 $QR:y=kx+m\ (k\neq 0)$

QR 与 C_2 联立消 y 得 $k^2x^2+2(km-p)x+m^2=0$……“*”

则 x_1,x_2 是“*”的二根

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2(km-p)}{k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{m^2}{k^2} \end{cases}$ ……………………………………6 分

且 $\Delta=4(km-p)^2-4k^2m^2>0$

即 $-2km+p>0$ ……① ……………………………………7 分

$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{km-p}{k^2}$，$y_0=kx_0+m=\dfrac{p}{k}$

$\because x_0=\dfrac{x_3+2}{2}, y_0=\dfrac{y_3}{2}$

$\therefore$ 得 $x_3=2x_0-2=-\dfrac{2(km-p)}{k^2}-2$，$y_3=2y_0=\dfrac{2p}{k}$

$\therefore P(-\dfrac{2(km-p)}{k^2}-2,\dfrac{2p}{k})$ ……………………………………8 分

$\because$ 点 $P \in C_1$

$$\therefore \frac{[-\frac{2(km-p)}{k^2}-2]^2}{4}+(\frac{2p}{k})^2=1$$

即 $(\frac{km-p}{k^2}+1)^2+(\frac{2p}{k})^2=1$ ……………………………………9 分

令 $\begin{cases} \frac{2p}{k}=\sin\theta \cdots\cdots ② \\ \frac{km-p}{k^2}+1=\cos\theta \cdots\cdots ③ \end{cases}$ ……………………………………10 分

其中 $\theta \neq k\pi, k \in Z$

由②得 $k=\frac{2p}{\sin\theta}$ 代入③得

$km=p-\frac{4p^2}{1+\cos\theta}$ 代入①得

$$-2km+p=-2p+\frac{8p^2}{1+\cos\theta}+p>0$$

得 $p>\frac{1+\cos\theta}{8}$ ……………………………………11 分

$\because \sin\theta \neq 0$

$\therefore \cos\theta<1$

$\therefore \frac{1+\cos\theta}{8}<\frac{1}{4}$

$\therefore p \geq \frac{1}{4}$

$\therefore p$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$. ……………………………………12 分