

昌平区 2020—2021 学年第一学期高一年级期末质量抽测

数学试卷

2021.1

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡收回。

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

(1) 已知集合  $A = \{0, 1, 2, 4\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$

- (A)  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  (B)  $\{3\}$  (C)  $\{1, 2\}$  (D)  $\{0, 4\}$

(2) 下列函数中，既是奇函数又在  $(0, +\infty)$  上是增函数的是

- (A)  $f(x) = 2^{-x}$  (B)  $f(x) = x^3$  (C)  $f(x) = \lg x$  (D)  $f(x) = \frac{1}{x}$

(3) 已知点  $A(1, -1)$ ,  $B(3, 4)$ , 则  $|AB| =$

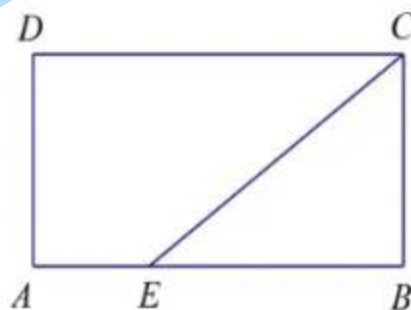
- (A)  $\sqrt{5}$  (B) 5 (C)  $\sqrt{29}$  (D) 29

(4) 函数  $f(x)$  的图象向右平移一个单位长度，所得图象与曲线  $y = e^x$  关于直线  $y = x$  对称，则  $f(x) =$

- (A)  $e^{x-1}$  (B)  $e^{x+1}$  (C)  $\ln(x-1)$  (D)  $\ln(x+1)$

(5) 已知矩形  $ABCD$  中， $AE = \frac{1}{3}AB$ ，若  $\overrightarrow{AD} = a$ ,  $\overrightarrow{AB} = b$ ，则  $\overrightarrow{CE} =$

- (A)  $-a + \frac{2}{3}b$  (B)  $-a - \frac{2}{3}b$   
(C)  $a + \frac{2}{3}b$  (D)  $a - \frac{2}{3}b$



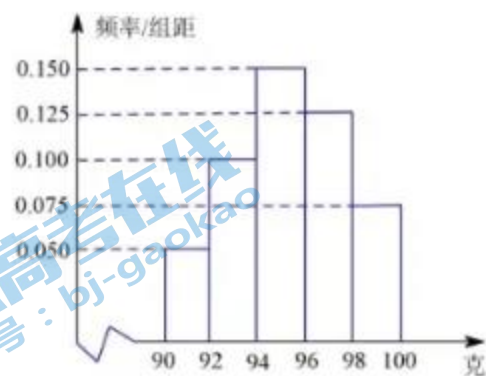
(6) 2020 年 11 月 5 日—11 月 10 日，在上海国家会展中心举办了第三届中国国际进口博览会，其中的“科技生活展区”设置了各类与人民生活息息相关的科技专区。现从“高档家用电器”、“智能家居”、“消费电子”、“服务机器人”、“人工智能及软件技术”五个专区中选择两个专区参观，则选择的两个专区中包括“人工智能及软件技术”专区的概率是

- (A)  $\frac{1}{10}$  (B)  $\frac{3}{10}$  (C)  $\frac{2}{5}$  (D)  $\frac{3}{5}$

(7) 已知  $2^x = 3$ ,  $\log_2 \frac{8}{9} = y$ , 则  $2x + y =$

- (A) 3 (B) 4 (C) 8 (D) 9

(8) 某工厂对一批产品进行了抽样检测. 下图是根据抽样检测后的产品净重 (单位: 克) 数据绘制的频率分布直方图, 其中产品净重的范围是  $[90, 100]$ , 样品数据分组为  $[90, 92)$ ,  $[92, 94)$ ,  $[94, 96)$ ,  $[96, 98)$ ,  $[98, 100]$ . 已知样本中产品净重小于 94 克的个数为 36, 则样本中净重大于或等于 92 克并且小于 98 克的产品的个数是



- (A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90

(9) 已知四边形  $ABCD$  中,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ , 则 “ $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ ” 是 “四边形  $ABCD$  是矩形” 的 (A)

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(10) 已知函数  $f(x) = x^2 - k$ . 若存在实数  $m, n$ , 使得函数  $f(x)$  在区间  $[\sqrt{m}, \sqrt{n}]$  上的值域为  $[2\sqrt{m}, 2\sqrt{n}]$ , 则实数  $k$  的取值范围为

- (A)  $(-1, 0]$  (B)  $(-1, +\infty)$  (C)  $(-2, 0]$  (D)  $(-2, +\infty)$

第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

(11) 已知命题  $p: \forall x \in (2, +\infty), x^2 > 4$ , 则  $\neg p$  为\_\_\_\_\_.

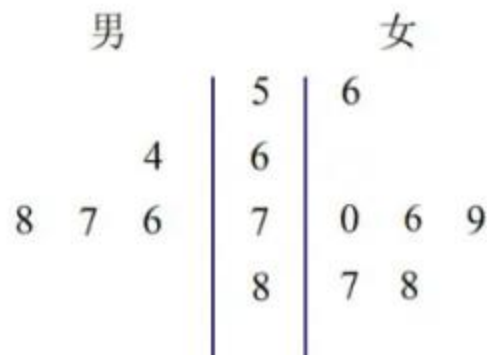
(12) 已知函数  $y = 3^x$ , 则函数在区间  $[1, 3]$  上的平均变化率为\_\_\_\_\_.

(13) 已知  $x > 1$ , 则  $y = x + \frac{1}{x-1}$  的最小值为\_\_\_\_\_, 当  $y$  取得最小值时  $x$  的值为\_\_\_\_\_.

(14) 已知向量  $\vec{a} = (1, k), \vec{b} = (2, 2)$ , 且  $\vec{a} + \vec{b}$  与  $\vec{a}$  共线, 则实数  $k =$ \_\_\_\_\_.

(15) 某学校开展了“国学”系列讲座活动, 为了了解活动效果, 用分层抽样的方法从高一年级所有学生中抽取 10

人进行国学素养测试, 这 10 名同学的性别和测试成绩 (百分制) 的茎叶图如图所示. 则男生成绩的 75% 分位数为\_\_\_\_\_; 已知高一年级中男生总数为 80 人,



试估计高一年级学生总数为\_\_\_\_\_.



(16) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1}, & x < a, \\ 2a - |x|, & x \geq a. \end{cases}$

(I) 若  $a=1$ , 则函数  $f(x)$  的零点是\_\_\_\_\_;

(II) 如果函数  $f(x)$  满足对任意  $x_1 \in (-\infty, a)$ , 都存在  $x_2 \in (a, +\infty)$ , 使得  $f(x_2) = f(x_1)$ , 称实数  $a$  为函数  $f(x)$  的包容数.

在给出的①  $\frac{1}{2}$ ; ② 1; ③  $\frac{3}{2}$  三个数中, 为函数  $f(x)$  的包容数是\_\_\_\_\_. (填出所有正确答案的序号)

三、解答题(本大题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

(17) (本小题满分 14 分)

已知全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | x \leq a - 2 \text{ 或 } x \geq a\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x < 0\}$ .

(I) 当  $a=1$  时, 求  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $(C_U A) \cap B$ ;

(II) 若  $A \cap B = B$ , 求实数  $a$  的取值范围.

(18) (本小题满分 14 分)

已知关于  $x$  的方程  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  有两个不等实根.

(I) 求实数  $m$  的取值范围;

(II) 设方程的两个实根为  $x_1, x_2$ , 且  $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 12 = 0$ , 求实数  $m$  的值;

(III) 请写出一个整数  $m$  的值, 使得方程有两个正整数的根. (结论不需要证明)



(19) (本小题满分 14 分)

某班倡议假期每位学生每天至少锻炼一小时.为了解学生的锻炼情况,对该班全部 34 名学生在某周的锻炼时间进行了调查,调查结果如下表:

锻炼时长 (小时)	5	6	7	8	9
男生人数 (人)	1	2	4	3	4
女生人数 (人)	3	8	6	2	1

- (I) 试根据上述数据,求这个班级女生在该周的平均锻炼时长;
- (II) 若从锻炼 8 小时的学生中任选 2 人参加一项活动,求选到男生和女生各 1 人的概率;
- (III) 试判断该班男生锻炼时长的方差  $s_1^2$  与女生锻炼时长的方差  $s_2^2$  的大小.(直接写出结果)

(20) (本小题满分 14 分)

已知函数  $f(x) = \log_a \frac{1}{|x|+2}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

(I) 试判断函数  $f(x)$  的奇偶性;

(II) 当  $a = 2$  时, 求函数  $f(x)$  的值域;

(III) 若对任意  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) \geq 1$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.



(21) (本小题满分 14 分)

已知集合  $S_n = \{X | X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{k, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\} (n \geq 2)$ .

对于  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$ , 定义:

$A$  与  $B$  的差为  $A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|)$ ;

$A$  与  $B$  之间的距离为  $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ .

(I) 当  $k = 2, n = 5$  时, 设  $A = (1, 2, 1, 1, 2), B = (2, 1, 1, 2, 1)$ , 求  $A - B, d(A, B)$ ;

(II) 若对于任意的  $A, B, C \in S_n$ , 有  $A - B \in S_n$ , 求  $k$  的值并证明:  $d(A - C, B - C) = d(A, B)$ .





昌平区 2020—2021 学年第一学期高一年级期末质量抽测

数学试卷参考答案及评分标准 2020.1

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	C	D	B	C	A	D	B	A

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

11.  $\neg p: \exists x \in (2, +\infty), x^2 \leq 4$       12. 12      13. 3 ; 2

14. 1      15. 77.5; 200      16. 2; ②③

(第 13、15 题: 第一空 3 分, 第二空 2 分; 第 16 题: 第一空 2 分, 第二空答对一个给 2 分, 答对两个给 3 分, 不选或有错选得 0 分.)

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

(17) (本小题满分 14 分)

解: (I) 当  $a=1$  时,  $A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$ . .....1 分

由  $x^2 - 5x < 0$ , 可得  $0 < x < 5$ . .....3 分

所以  $B = \{x | 0 < x < 5\}$ .

所以  $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 5\}$ . .....5 分

$A \cup B = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 0\}$ . .....7 分

$(C_U A) \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$ . .....10 分

(II) 因为  $A \cap B = B$ ,

所以  $B \subseteq A$ .

所以  $a \leq 0$  或  $a - 2 \geq 5$ . .....12 分

即  $a \leq 0$  或  $a \geq 7$ .

所以若  $A \cap B = B$ , 则实数  $a$  的取值范围为  $\{a | a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 7\}$ . .....14 分

(18) (本小题满分 14 分)

解: (I) 因为关于  $x$  的方程  $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$  有两个不等实根,

所以  $\Delta = [-2(m+1)]^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 3) > 0$ .



即  $8m+16>0$ .

所以  $m>-2$ .

..... 4分

(II) 因为方程的两个实根为  $x_1, x_2$ ,

所以  $x_1+x_2=2(m+1)$ .

因为  $(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)-12=0$ ,

所以  $[(x_1+x_2)-4][(x_1+x_2)+3]=0$ .

所以  $x_1+x_2=4$  或  $x_1+x_2=-3$ .

当  $x_1+x_2=4$ , 即  $2(m+1)=4$  时,  $m=1$ ;

当  $x_1+x_2=-3$ , 即  $2(m+1)=-3$  时,  $m=-\frac{5}{2}$  (舍).

..... 10分

(III)  $m=6, 16, \dots$  答案不唯一.

..... 14分

(19) (本小题满分 14 分)

解: (I) 依题意, 这个班级女生在该周的平均锻炼时长为

$$\frac{5 \times 3 + 6 \times 8 + 7 \times 6 + 8 \times 2 + 9 \times 1}{3 + 8 + 6 + 2 + 1} = 6.5 \text{ (小时)}.$$

..... 4分

(II) 设事件  $A =$  “从锻炼 8 小时的学生中任选 2 人, 其中男生和女生各 1 人”.

锻炼 8 小时的 3 名男生分别记为  $a_1, a_2, a_3$ ,

锻炼 8 小时的 2 名女生分别记为  $b_1, b_2$ .

从锻炼 8 小时的 5 名学生中任取 2 人的样本空间可记为

$$\Omega = \{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, a_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (b_1, b_2)\}.$$

共包含 10 个样本点.

$$A = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

$A$  包含 6 个样本点.

$$\text{所以 } P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

.....11分

(III)  $s_1^2 > s_2^2$ .

..... 14分

(20) (本小题满分 14 分)

解：(I) 因为函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，所以  $x \in \mathbf{R}$  时， $-x \in \mathbf{R}$ 。………… 1 分

$$\text{又因为 } f(-x) = \log_a \frac{1}{|-x|+2} = \log_a \frac{1}{|x|+2} = f(x),$$

所以  $f(x) = \log_a \frac{1}{|x|+2}$  是偶函数。………… 4 分

(II) 当  $a = 2$  时， $f(x) = \log_2 \frac{1}{|x|+2}$ 。

因为  $|x| \geq 0$ ,

所以  $|x|+2 \geq 2$ 。

$$\text{所以 } 0 < \frac{1}{|x|+2} \leq \frac{1}{2}.$$

所以  $f(x) \leq -1$ 。

所以当  $a = 2$  时，函数  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, -1]$ 。………… 9 分

(III) 因为  $f(x) \geq 1$  恒成立，即  $\log_a \frac{1}{|x|+2} \geq 1$  恒成立，

$$\text{所以 } \log_a \frac{1}{|x|+2} \geq \log_a a \text{ 恒成立.}$$

①当  $a > 1$  时，即  $a \leq \frac{1}{|x|+2}$  恒成立。

$$\text{因为 } 0 < \frac{1}{|x|+2} \leq \frac{1}{2},$$

所以当  $a > 1$  时不合题意。

②当  $0 < a < 1$  时，即  $a \geq \frac{1}{|x|+2}$  恒成立。

$$\text{因为 } 0 < \frac{1}{|x|+2} \leq \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \frac{1}{2} \leq a < 1.$$

所以对任意  $x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) \geq 1$  恒成立时，实数  $a$  的取值范围为  $[\frac{1}{2}, 1)$ 。…… 14 分

(21) (本小题满分 14 分)

解: (I)  $A-B = (|1-2|, |2-1|, |1-1|, |1-2|, |2-1|) = (1, 1, 0, 1, 1)$ ,

$$d(A, B) = |1-2| + |2-1| + |1-1| + |1-2| + |2-1| = 4. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 因为对于任意的  $A, B \in S_n$ , 都有  $A-B \in S_n$ ,

由  $A-B = (|a_1-b_1|, |a_2-b_2|, \dots, |a_n-b_n|)$ ,  $a_i, b_i \in \{k, 1\}, i=1, 2, \dots, n$ ,

可知  $|a_i-b_i| = k$  或  $|a_i-b_i| = 1$ .

(1) 当  $a_i = k, b_i = 1$  时,  $|k-1| = k$  或  $|k-1| = 1$ , 即  $k = \frac{1}{2}$  或  $k = 2$  或  $k = 0$ ;

(2) 当  $a_i = k, b_i = k$  时,  $|k-k| = k$  或  $|k-k| = 1$ , 即  $k = 0$ ;

(3) 当  $a_i = 1, b_i = 1$  时,  $|1-1| = k$  或  $|1-1| = 1$ , 即  $k = 0$ ;

(4) 当  $a_i = 1, b_i = k$  时,  $|1-k| = k$  或  $|1-k| = 1$ , 即  $k = \frac{1}{2}$  或  $k = 2$  或  $k = 0$ ;

若  $k = 2$ , 不妨取  $A = (2, 1, \dots, 1), B = (1, 1, \dots, 1)$ ,

则  $A-B = (1, 0, \dots, 0) \in S_n$ , 与  $k = 2$  矛盾;

若  $k = \frac{1}{2}$ , 不妨取  $A = (\frac{1}{2}, 1, \dots, 1), B = (1, 1, \dots, 1)$ ,

则  $A-B = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0) \in S_n$  与  $k = \frac{1}{2}$  矛盾;

当  $k = 0$  时, 对任意的  $a_i, b_i \in \{k, 1\}, i=1, 2, \dots, n$ .

都有  $|a_i-b_i| \in \{0, 1\}$ , 故任意的  $A, B \in S_n$ , 都有  $A-B \in S_n$ .

综上,  $k = 0$ . \dots\dots 9 \text{ 分}

设  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in S_n$ .

所以  $a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, n$ .

当  $c_i = 0$  时,  $\|a_i - c_i\| - \|b_i - c_i\| = |a_i - b_i|$ ;

当  $c_i = 1$  时,  $\|a_i - c_i\| - \|b_i - c_i\| = |(1-a_i) - (1-b_i)| = |a_i - b_i|$ ;

所以  $d(A-C, B-C) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = d(A, B)$ . \dots\dots 14 \text{ 分}



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯